Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 44-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__44_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 525.

(1860, p. 234.)

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *les racines d'une équation*

$$f(x) = 0,$$

que nous écrirons sous la forme

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, 1)^n = 0.$$

Posons

$$A_m = (-1)^m a_0^{n-2} \sum \frac{x_1^m f'(x_2) f'(x_3) \ldots f'(x_n)}{f'(x_1)},$$

où f' est la dérivée de f; démontrer que la forme

$$\varphi = (A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n-4})(x, y)^{2n-4},$$

est un covariant de la forme

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, y)^n \quad (^1).$$

(Michael Roberts.)

SOLUTION

Par M. A. Boulanger.

Soit la forme

$$f(x, y) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + n a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n,$$

ou, avec la notation abrégée de Cayley,

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)(x, y)^n.$$

---

(1) L'énoncé des *Nouvelles Annales* est incorrect; il doit y avoir alternance de signe des A. L'énoncé transcrit ici est *exact*.

Tout covariant $\varphi(x, y, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de f vérifie les équations aux dérivées partielles

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} y\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots + na_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n},\\ x\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= a_n\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}} + 2a_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + na_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}.\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, si la fonction entière $\varphi(x, y, a_0, \ldots, a_n)$, homogène séparément par rapport aux variables et aux coefficients, satisfait identiquement aux équations (1), elle sera un covariant de $f(x, y)$. (Cayley, 1855; *voir* la démonstration de Brioschi, *Annali di Matematica,* 1858.)

Soit

$$\varphi = A_0 x^p + pA_1 x^{p-1}y + \frac{p(p-1)}{1.2}A_2 x^{p-2}y^2 + \ldots + A_p y^p,$$

cette fonction où les A sont de formes de même degré en $a_0, a_1, \ldots, a_n$; la condition de vérification du système (1) en $x, y, a_0, a_1, \ldots, a_n$ équivaut à celle du système suivant, en $a_0, a_1, \ldots, a_n$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} a_0\frac{\partial A_m}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial A_m}{\partial a_2} + 3a_2\frac{\partial A_m}{\partial a_3} + \ldots + na_{n-1}\frac{\partial A_m}{\partial a_n} &= mA_{m-1},\\ na_1\frac{\partial A_m}{\partial a_0} + (n-1)a_2\frac{\partial A_m}{\partial a_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n\frac{\partial A_m}{\partial a_{n-1}} &= mA_{p-m+1}\end{aligned}\right.$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots, p).$$

Ces propriétés rappelées, le théorème à établir est immédiat. Soit

$$f(x, 1) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n);$$

comme

$$f'(x_i, 1) - a_0(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n),$$

les coefficients de la forme φ de l'énoncé s'écrivent

$$A_m = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} a_0^{2n-4}\sum x_1^m(x_2 - x_3)^2\ldots(x_{n-1} - x_n)^2;$$

comme $m \leqq 2n - 4$, la fonction symétrique entière mise en évidence, où chaque racine a pour exposant maximum $2n - 4$, est, à $\frac{1}{a_0^{2n-4}}$ près, une forme de degré $(2n-4)$ en a_0, $a_1, \ldots, a_n$; A_m est donc une telle forme.

Il suffit dès lors de vérifier que les A_m vérifient les équations (2). A cet effet, utilisons la substitution

$$x = x' + hy', \qquad y = y',$$

qui transforme la forme $(a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n$ en la forme $(a'_0, a'_1, \ldots, a'_n)(x', y')^n$, avec

$$(3) \quad a'_i = a_i + i a_{i-1} h + \frac{i(i-1)}{1.2} a_{i-2} h^2 + \ldots + i a_1 h^{i-1} + a_0 h^i$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Pour cette nouvelle forme, on a

$$A_m(a'_0, a'_1, \ldots, a'_n)$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} a_0'^{2n-4} \sum x_1'^m (x'_2 - x'_3)^2 \ldots (x'_{n-1} - x_n)^2,$$

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ étant les racines de $(a'_0, a'_2, \ldots, a'_n)(x', 1) = 0$, c'est-à-dire $x_1 - h, x_2 - h, \ldots$; donc la relation

$$A_m(a'_0, a'_1, \ldots, a'_n)$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} a_0^{2n-4} \sum (x_1 - h)^m (x_2 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2$$

sera, après remplacement des a'_i par leurs valeurs (3), une identité en h; si l'on développe le premier membre par la formule de Taylor en regardant a_i comme valeur initiale de a'_i, on reconnaît immédiatement, par l'identification des termes du premier degré en h, que les A_m vérifient la première série des équations (2).

La seconde série des équations (2) sera évidemment vérifiée si l'on démontre que l'échange dans $f(x, y)$ des coefficients équidistants des extrêmes échange entre eux dans φ les coefficients A équidistants des extrêmes. Or la substitution

$$x = y', \qquad y = x'$$

transforme $f(x, y)$ en $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)(x', y')$, forme pour laquelle on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_m(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)\\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} a_n^{2n-4} \sum \frac{1}{x_1^m}\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)^2 \cdots \left(\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_n}\right)^2\\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} \frac{a_n^{2n-4}}{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{2n-4}} \sum x_1^{2n-4-m}(x_2-x_3)_2 \ldots (x_{n-1}-x_n)^2\\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} a_0^{2n-4} \sum x_1^{(2n-4)-m}(x_2-x_3)^2 \ldots (x_{n-1}-x_n)^2\\
&= \mathrm{A}_{(2n-4)-m}(a_0, a_1, \ldots . a_n).
\end{aligned}$$

Le théorème est donc établi.