NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Application de la méthode de Grassmann à une démonstration de deux théorèmes de géométrie différentielle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 414-416

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__414_1>

[B12c]

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE GRASSMANN A UNE DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE;

PAR UN ANONYME.

La méthode de Grassmann conduit très aisément aux théorèmes suivants démontrés par M. C. Lamioni dans le numéro de décembre des *Nouvelles Annales* :

1° *Si une ligne de courbure est géodésique elle est plane;*

2° *Chaque ligne géodésique plane est de courbure.*

Un point P fonction de deux variables indépendantes u et v appartient à une surface; u et v étant exprimées en fonction d'un paramètre, la variation de ce paramètre entraîne le déplacement de P le long d'une courbe de la surface.

Soient : T le vecteur unité parallèle à la tangente à cette courbe, N la normale principale, B la binormale; soit enfin n le vecteur unité normal à la surface en P.

La condition qui exprime que P décrit une ligne géodésique est la suivante ([1]) :

$$n\mathrm{NT} = 0, \tag{1}$$

en prenant comme paramètre la longueur de l'arc décrit et dérivant il vient

$$\frac{dn}{ds}\mathrm{NT} + n\frac{d\mathrm{N}}{ds}\mathrm{T} + n\mathrm{N}\frac{d\mathrm{T}}{ds} = 0,$$

ou en tenant compte des formules de Frenet :

$$\frac{dn}{ds}\mathrm{NT} + \frac{1}{\tau}n\mathrm{TB} = 0. \tag{2}$$

Supposons que cette ligne géodésique soit de courbure, nous aurons comme condition :

$$n\frac{dn}{ds}\mathrm{T} = 0; \tag{3}$$

mais la relation (1), qui exprime que n, N et T sont complanaires, peut se mettre sous la forme

$$n = \alpha\mathrm{N} + \beta\mathrm{T},$$

par suite (3) devient

$$\frac{dn}{ds}\mathrm{NT} = 0,$$

et comparée à (2) donne finalement

$$\frac{1}{\tau}n\mathrm{TB} = 0, \qquad \frac{1}{\tau} = 0,$$

car nTB est forcément différent de zéro. La ligne proposée est donc bien plane.

([1]) *Voir* Henri Fehr, *Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la Géométrie infinitésimale* (Thèse).

Inversement supposons que la ligne géodésique soit plane; on a successivement

$$\frac{dn}{ds}\,\mathrm{NT} = 0,$$

$$\mathrm{N} = \alpha\frac{dn}{ds} + \beta\,\mathrm{T},$$

$$n\,\mathrm{NT} = \alpha\frac{dn}{ds}\,n\,\mathrm{T} = 0,$$

$$n\,\frac{dn}{ds}\,\mathrm{T} = 0,$$

qui exprime qu'elle est de courbure.