Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 376-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__376_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1683.

(1894, p. 5[illegible].)

On donne une ellipse de foyers F *et* F'. *Par l'un des foyers l'on mène une sécante quelconque rencontrant l'ellipse aux points* M *et* M' :

1° *Enveloppe des cercles de diamètres* MM', FM, F'M;

2° *Soit* N *le point de concours des normales en* M *et* M'.

Lieu du point de rencontre de la sécante MFM′ *avec la parallèle au grand axe, menée par le point* N;

3° *Soit* P *le point de rencontre des tangentes à l'ellipse en* M *et* M′. *Lieu du centre de gravité du quadrilatère* MNM′F. (ANDRÉ CAZAMIAN.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

On pourrait traiter la question en rapportant l'ellipse à son centre et à ses axes. Mais il est préférable de mettre l'origine des coordonnées au foyer F et de prendre le grand axe pour axe des x. De cette façon on pourra passer, sans nouveaux calculs, du cas de la conique à centre au cas de la parabole.

L'équation de l'ellipse en coordonnées polaires étant

$$(1) \qquad r = \frac{p}{1 - e\cos\theta},$$

dans laquelle

$$(2) \qquad p = \frac{b^2}{a}, \qquad e = \frac{c}{a},$$

l'équation (1), transformée en coordonnées rectilignes, devient

$$(3) \qquad x^2(1 - e^2) + y^2 - 2epx - p^2 = 0.$$

Soient $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ les coordonnées des points M et M′, et m le coefficient angulaire de la corde MM′. Si l'on pose $m = \operatorname{tang}\theta$, on a, d'après (1),

$$(4) \qquad x_1 = \frac{p\cos\theta}{1 - e\cos\theta}, \qquad y_1 = \frac{p\sin\theta}{1 - e\cos\theta},$$

$$(5) \qquad x_2 = \frac{-p\cos\theta}{1 + e\cos\theta}, \qquad y_2 = \frac{-p\sin\theta}{1 + e\cos\theta}.$$

L'équation de MM′ étant

$$(6) \qquad y = mx,$$

on a aussi, en résolvant (3) et (6),

$$(7) \qquad x_1 + x_2 = \frac{2ep}{1 - e^2 + m^2}, \qquad x_1 x_2 = \frac{-p^2}{1 - e^2 + m^2},$$

$$(8) \qquad y_1 + y_2 = \frac{2epm}{1 - e^2 + m^2}, \qquad y_1 y_2 = \frac{-m^2 p^2}{1 - e^2 + m^2}.$$

1° *Enveloppe du cercle de diamètre* MM'. — L'équation de ce cercle est

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{4}$$

ou

$$(9)\quad x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0,$$

ou encore, d'après (4) et (5),

$$(1 - e^2\cos^2\theta)(x^2 + y^2) - 2epx\cos^2\theta - 2epy\sin\theta\cos\theta - p^2 = 0,$$

et puisque $\tang\theta = m$, cette équation devient, en fonction du paramètre variable m,

$$\begin{aligned} &m^2(x^2 + y^2 - p^2) - 2epym \\ &\quad + (1 - e^2)(x^2 + y^2) - 2epx - p^2 = 0. \end{aligned}$$

Comme m entre au second degré, l'enveloppe du cercle est immédiatement

$$(10)\quad (x^2 + y^2 - p^2)[(1 - e^2)(x^2 + y^2) - 2epx - p^2] - e^2p^2y^2 = 0.$$

A première vue, ce lieu semble être une quartique : mais, avec un peu d'attention, on voit que l'équation (10) se décompose en les deux facteurs du second degré

$$\begin{aligned} &[(1 - e)(x^2 + y^2) - epx - p^2] \\ &\quad \times [(1 + e)(x^2 + y^2) - epx - p^2] = 0. \end{aligned}$$

Le lieu se compose donc des deux cercles dont les équations sont

$$(11)\qquad (1 - e)(x^2 + y^2) - epx - p^2 = 0,$$

$$(12)\qquad (1 + e)(x^2 + y^2) - epx - p^2 = 0.$$

Si A est l'abscisse du centre de (11) et R son rayon ; si A' est l'abscisse du centre du cercle (12) et R' son rayon, on a

$$(13)\qquad 2\alpha = c + \frac{c^2}{a}, \qquad 2\alpha' = c - \frac{c^2}{a},$$

$$(14)\qquad R = \frac{(a + c)(2a - c)}{2a}, \qquad R' = \frac{(a - c)(2a + c)}{2a}.$$

Si donc S et S' sont les points de rebroussement de la développée de l'ellipse, situés sur le grand axe, les centres de chacun des deux cercles sont les milieux de FS et FS'. On remarque ainsi que l'on a

$$R - R' = c.$$

Enveloppe du cercle de diamètre FM. — L'équation de ce cercle est

$$x^2 + y^2 - xx_1 - yy_1 = 0,$$

ou, d'après (4),

$$(1 - e\cos\theta)(x^2 + y^2) - px\cos\theta - py\sin\theta = 0,$$

ou encore

$$[e(x^2 + y^2) + px]\cos\theta + py\sin\theta = x^2 + y^2.$$

Ce cercle enveloppe donne la courbe d'équation

$$[e(x^2 + y^2) + px]^2 + p^2y^2 = (x^2 + y^2)^2,$$

laquelle développée s'écrit

$$(x^2 + y^2)[(1 - e^2)(x^2 + y^2) - 2epx - p^2] = 0.$$

L'enveloppe de FM est donc le cercle d'équation

(15) $$(1 - e^2)(x^2 + y^2) - 2epx - p^2 = 0.$$

D'après (2), cette équation s'écrit

(16) $$(x - c)^2 + y^2 = a^2.$$

On reconnaît le cercle principal de l'ellipse.

Il est évident, d'après la symétrie, que l'enveloppe des cercles de diamètre F'M est aussi le cercle principal [1].

2° Les équations des normales en M et en M' sont

(17) $$Xy_1 - Y[(1 - e^2)x_1 - ep] = ey_1(ex_1 + p),$$

(18) $$Xy_2 - Y[(1 - e^2)x_2 - ep] = ey_2(ex_2 + p).$$

---

[1] L'enveloppe des cercles de diamètres FM et FM' a déjà été proposée dans ce Recueil. (Question 1620, t. X, 3e série, p. 43*; 1891.)

En tenant compte de (7) et de ce que

$$y_1 = mx_1, \qquad y_2 = mx_2,$$

on trouve pour les coordonnées (XY) de N

$$(19) \qquad X = \frac{ep(2 + m^2)}{1 - e^2 + m^2},$$

$$(20) \qquad Y = \frac{emp}{1 - e^2 + m^2}.$$

Si donc on élimine m entre (20) et

$$Y = mX,$$

on aura l'équation du lieu du point de rencontre de la corde MM' avec la parallèle au grand axe menée par le point N.

On trouve ainsi la conique d'équation

$$(21) \qquad (1 - e^2)X^2 + Y^2 - epX = 0,$$

qui est homothétique à la conique donnée.

On voit accessoirement qu'en éliminant m entre (19) et (20), on trouve pour lieu du point N la conique d'équation

$$(22) \quad (1 - e^2)X^2 + (1 + e^2)^2 Y^2 + ep(3 - e^2)X + 2e^2p^2 = 0.$$

3° On sait que le point P est à la rencontre de la directrice relative au foyer F et de la perpendiculaire à MM' élevée en F.

Si α et β sont les coordonnées du point P, on a donc

$$(23) \qquad \alpha = -\frac{p}{e},$$

$$m\beta + \alpha = 0,$$

et par suite

$$(24) \qquad \beta = \frac{p}{em}.$$

Cherchons maintenant le lieu du centre de gravité, soit du périmètre, soit de l'aire du quadrilatère MNM'P.

Centre de gravité du périmètre du quadrilatère MNM'P. — C'est alors le lieu du centre des moyennes distances des quatre points M, N, M' et P. On a pour les coordonnées de ce centre

$$4x = x_1 + x_2 + X + \alpha,$$
$$4y = y_1 + y_2 + Y + \beta,$$

et d'après (7), (8), (19), (20), (23) et (24), on a

$$(25)\qquad 4x = \frac{ep(4+m^2)}{1-c^2+m^2} - \frac{p}{e},$$

$$(26)\qquad 4y = \frac{3emp}{1-e^2+m^2} + \frac{p}{em}.$$

On a ainsi l'équation du lieu sous forme unicursale. La courbe lieu du centre de gravité est donc une courbe unicursale.

Si l'on élimine m entre les équations (25) et (26), on trouve que le lieu est la cubique d'équation

$$(27)\qquad y^2 = \frac{[3(1-e^2)x - 4ep]^2[4ex + (1-e^2)p]}{(3+e^2)^2[(5e^2-1)p - 4e(1-e^2)x]}.$$

Centre de gravité de la surface du quadrilatère MNM'P. — Si g est le centre de gravité du triangle MPM' et g' le centre de gravité du triangle MNM', on a pour les coordonnées des centres g et g'

$$(28)\qquad 3x_g = x_1 + x_2 + \alpha = \frac{2ep}{1-e^2+m^2} + \frac{p}{e},$$

$$(29)\qquad 3y_g = y_1 + y_2 + \beta = \frac{2emp}{1-e^2+m^2} + \frac{p}{em},$$

$$(30)\qquad 3x_{g'} = x_1 + x_2 + \mathrm{X} = \frac{ep(4+m^2)}{1-e^2+m^2},$$

$$(31)\qquad 3y_{g'} = y_1 + y_2 + \mathrm{Y} = \frac{3emp}{1-e^2+m^2}.$$

Or si G est le centre de gravité de la surface du quadrilatère MNM'P et si S et S' sont les aires des deux triangles MPM' et MNM', on a pour les coordonnées du point G

$$(32)\qquad (\mathrm{S}+\mathrm{S}')\mathrm{X}_\mathrm{G} = \mathrm{S}x_g + \mathrm{S}'x_{g'},$$

$$(33)\qquad (\mathrm{S}+\mathrm{S}')\mathrm{Y}_\mathrm{G} = \mathrm{S}x_\mathrm{G} + \mathrm{S}'y_{g'}.$$

Mais les deux triangles MPM' et MNM' ont même base MM' : leurs aires sont donc dans le rapport des hauteurs abaissées de P et N sur MM'. Donc

$$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'} = \frac{\beta - m\alpha}{m\mathrm{X} - \mathrm{Y}} = \frac{1-e^2+m^2}{e^2m^2}.$$

Par suite (32) et (33) deviennent, en supprimant l'indice G,

$$[(1 - e^2 + m^2) + e^2 m^2]X = (1 - e^2 + m^2)x_g + e^2 m^2 x_{g'},$$
$$[(1 + e^2 + m^2) + e^2 m^2]Y = (1 - e^2 + m^2)y_g + e^2 m^2 y_{g'},$$

ou, en substituant les coordonnées de g et g',

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} & 3X[(1 - e^2) + (1 + e^2)m^2] \\ & \quad = 2ep - \frac{p}{e}(1 - e^2 + m^2) + \frac{e^3 p m^2 (4 + m^2)}{1 - e^2 + m^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} & 3Y[(1 - e^2) + (1 + e^2)m^2] \\ & \quad = 2emp + \frac{p(1 - e^2 + m^2)}{em} + \frac{3e^3 m^3 p}{1 - e^2 + m^2}. \end{aligned} \right.$$

Le lieu du centre G est donc une courbe unicursale. L'élimination de m entre ces deux valeurs de X et Y ne paraît pas devoir donner un résultat simple.

Remarque. — On peut encore observer que le *lieu du centre de gravité* g *du triangle* MPM' est la cubique d'équation

$$(36)\qquad y^2 \frac{(3ex + p)[x(1 - e^2) - ep]^2}{p(3e^2 - 1) - 3e(1 - e^2)x}.$$

Le lieu du centre de gravité du triangle MNM' est l'ellipse d'équation

$$(37)\quad \left\{ \begin{aligned} & 9(1 - e^2)x^2 + (3 + e^2)^2 y^2 \\ & \qquad - 3e(5 - e^2)px + 4e^2 p^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Cas où la conique donnée est une parabole. — On obtient immédiatement les résultats relatifs à ce cas, en faisant $e = 1$ dans les résultats précédents. On trouve ainsi :

Enveloppe du cercle de diamètre MM'.

$$x + p = 0 \qquad \text{(directrice)}.$$

$$\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{9p^2}{16} \qquad \text{(cercle)}.$$

Enveloppe des cercles de diamètres FM et F'M.

$$2x + p = 0 \qquad \text{(tangente au sommet)}.$$

Lieu du point de rencontre de la sécante MFM′ *avec la parallèle au grand axe menée par* N.

$$Y^2 = pX \qquad \text{(parabole).}$$

Lieu du point N.

$$2Y^2 - pX + p^2 = 0 \qquad \text{(parabole).}$$

Lieu du centre de gravité du périmètre du quadrilatère MNM′P.

$$Y^2 = pX \qquad \text{(parabole).}$$

Lieu du centre de gravité de la surface du quadrilatère MNM′P.

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{p}{m^2}, \\ Y &= \frac{p}{m}, \end{aligned}\right.$$

$$Y^2 = pX \qquad \text{(parabole).}$$

Lieu du centre de gravité du triangle MPM′.

$$y^2 = \frac{p}{2}(3x + p) \qquad \text{(parabole).}$$

Lieu du centre de gravité du triangle MNM′.

$$y^2 = \frac{p}{4}(3x - p) \qquad \text{(parabole).}$$

On remarquera que, dans la parabole, l'angle MPM′ est droit : par conséquent le quadrilatère MNM′P est un rectangle. Dans ce cas, le centre de gravité du périmètre et le centre de gravité de la surface du rectangle MNM′P se confondent en un seul point, qui est le milieu de la corde MM′. Or le lieu de ce milieu est bien la parabole d'équation

$$y^2 = px.$$

Remarque. — On peut encore observer que, dans le cas d'une conique à centre, *le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* MPM′ *ou le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* MNM′ *est une cubique.*

1817.

(1899, p. 148.)

Soient K *et* H *les points d'intersection de deux cercles situés dans le même plan, dont les centres sont* C, C'; *on mène par* K *une droite mobile, et par les points où cette droite rencontre les cercles conduisons les tangentes respectives à ces courbes.*

Le lieu des points de rencontre de ces tangentes est une cardioïde. (CARDOSO-LAYNES.)

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Soient H, K, I, y les points communs à deux coniques C^2, C'^2, menons les tangentes a, a' à ces courbes en les points A, A' où elles sont coupées ultérieurement par un rayon issu du point K : les deux faisceaux de la deuxième classe $C^2(a, \ldots)$, $C'^2(a', \ldots)$ sont homographiques, car les ponctuelles du deuxième ordre $C^2(A, \ldots)$, $C'^2(A', \ldots)$ sont perspectives au faisceau (de la première classe) K; leur produit est donc une courbe du quatrième ordre (en général de la sixième classe); mais lorsque deux faisceaux de la deuxième classe, formés par les tangentes de deux coniques C^2, C'^2, sont homographiques et, en outre, les tangentes en l'un des points K commun à C^2, C'^2 forment un couple de rayons correspondants, K est un rebroussement, de la première espèce, sur le produit des deux faisceaux (théorème connu); donc, dans notre cas, la quartique lieu du point (aa') a un rebroussement en chacun des trois points H, I, y et touche les coniques données en les points où elles sont coupées par les tangentes en le point H. En prenant pour I, y les points circulaires à l'infini on obtient le théorème proposé.

Note. — La question proposée est bien connue; *voir,* par exemple, le beau travail de M. Weill : *Note sur la cardioïde et le limaçon de Pascal* (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t. XX, p. 160-171). (A. DROZ-FARNY.)

Autres solutions de MM. H. BROCARD, E. LEMOINE, CARDOSO-LAYNES, E. VALDÈS, etc.