NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI PICCIOLI

Sur les courbes en S_n et particulièrement sur celles à courbures constantes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 369-374

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__369_1>

[Q2]

SUR LES COURBES EN S_n (1) ET PARTICULIÈREMENT SUR CELLES A COURBURES CONSTANTES;

Par M. HENRI PICCIOLI.

1. Une courbe L en S_n étant donnée, nous appellerons $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ les surfaces à deux dimensions lieux des directions principales premières, secondes, ..., $n^{\text{ièmes}}$.

Cela posé, déplaçons-nous d'une longueur constante h_i le long de la direction principale $i^{\text{ième}}$, à partir du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de L; nous obtiendrons une nouvelle courbe que nous indiquerons par L_i. L'indice i variant de 1 jusqu'à n, nous aurons n lignes $L_1, L_2, \ldots, L_n$ et si nous considérons les angles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ qu'elles font respectivement avec les génératrices de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ on trouvera, après des calculs très simples,

$$\cos\theta_p = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{h_p}{R_p}\right)^2 + \left(\frac{h_p}{R_{p-1}}\right)^2}}, \tag{1}$$

p étant un des nombres $3, 4, 5, \ldots, n-1$; tandis que

(1) Nous rappelons que courbe en S_n veut dire : courbe dans un espace à n dimensions.

pour p égal à 1, 2, n on a :

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{h_1}{R_1}\right)^2}}, \\ \cos\theta_2 = \dfrac{1-\dfrac{h_2}{R_1}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{h_2}{R_1}\right)^2+\left(\dfrac{h_2}{R_2}\right)^2}}, \\ \cos\theta_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{h_n}{R_{n-1}}\right)^2}}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que, pour que les angles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ soient constants, il faut et il suffit que $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ soient constants, c'est-à-dire que la courbe L soit à courbures constantes.

Nous avons donc ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que, si on se déplace d'une longueur constante le long des directions principales d'une courbe, les lignes lieux des extrémités soient trajectoires isogonales des génératrices des surfaces à deux dimensions qui les contiennent, est que la courbe initiale soit à courbures constantes.

La nature des formules (1) et un examen spécial des formules (2) nous permettent d'ajouter que :

Parmi les courbes lieux des extrémités des segments constants mesurés à partir des points d'une ligne sur ses directions principales, celle qui est relative aux normales principales peut seule être trajectoire orthogonale des génératrices de la surface qui la contient.

Cela arrive lorsque le segment est égal au rayon de première courbure; alors cette trajectoire n'est autre chose que le lieu des centres de première courbure de L.

Et même on peut énoncer cette proposition :

En S_3, *si les courbes* L_1, L_3, *en deux points correspondants au même point de* L, *coupent sous le même angle* (*variable de point à point*) *les génératrices de* Σ_1, Σ_3 *respectivement, la ligne* L *est une hélice cylindrique; et réciproquement, pour toute hélice cylindrique, on peut toujours trouver deux courbes* L_1, L_3 *qui jouissent de cette propriété.*

Remarquons encore que lorsque

$$\theta_1,\quad \theta_2,\quad \ldots,\quad \theta_p(\theta_n, \theta_{n-1}, \ldots, \theta_{n-p})$$

sont constants, il en est de même de

$$R_1,\quad R_2,\quad \ldots,\quad R_p(R_{n-1}, R_{n-2}, \ldots, R_{n-p-1});$$

et que de la constance de $n-1$ des angles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ résulte la constance du $n^{\text{ième}}$.

2. Conservant les mêmes notations que plus haut, cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que les courbes $L_1, L_2, \ldots, L_n$ soient des lignes hypersphériques. En nous référant à la courbe générique L_p dont les équations sont :

$$z_i = x_i + h_p \alpha_{pi} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ représentant un point fixe dans S_n, posons

$$\sum_1^n {}_i (y_i - x_i - h_p \alpha_{pi})^2 = R^2 \qquad (\text{R const.}).$$

En dérivant par rapport à l'arc, on trouve aisément la relation

$$\frac{dA_p}{ds} + \frac{A_1}{h_p} = 0$$

qui est aussi une condition suffisante pour que L_p soit une courbe hypersphérique.

Pour toute courbe, les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont liées par n équations du type

$$\frac{dA_t}{ds} = \frac{A_{t+1}}{R_t} - \frac{A_{t-1}}{R_{t-1}}, \tag{3}$$

tout A dont l'indice est différent de $1, 2, \ldots, n$, étant nul; mais si nous voulons, par exemple, qu'une courbe jouisse de la propriété que L_t soit hypersphérique, il suffira de garder les $t-1$ premières et les $n-t$ dernières des relations (3), et de changer la $t^{\text{ième}}$ avec la suivante

$$\frac{dA_t}{ds} = \frac{A_{t+1}}{R_t} - \frac{A_{t-1}}{R_{t-1}} = -\frac{A_1}{h_t}. \tag{4}$$

Nous donnerons un exemple de ce qui précède en nous proposant de chercher les courbes de S_2 telles que, si l'on se déplace d'une longueur constante sur les tangentes, le lieu des extrémités soit un cercle.

Nous aurons le système d'équations

$$\frac{dA_1}{ds} = \frac{A_2}{R_1} - 1 = -\frac{A_1}{h_1}, \qquad \frac{dA_2}{ds} = -\frac{A_1}{R_1}.$$

On trouve, après des calculs tout à fait simples [1],

$$\frac{d}{ds}\left[R_1\left(1 - \frac{c}{h_1}e^{-\frac{s}{h_1}}\right)\right] + \frac{c}{R_1}e^{-\frac{s}{h_1}} = 0,$$

formule qui nous fournit l'équation intrinsèque des lignes cherchées. Pour c égal à zéro, on a un cercle.

---

[1] Cela avait été trouvé autrement par M. Pirondini dans son Travail : *Sulle linee a doppia curvatura* (*Giornale di Matematiche*, 1888). Le premier théorème du premier paragraphe de cette Note est la généralisation de celui que M. Pirondini a donné dans ce Travail.

Remarquons que les équations (4) se trouvent vérifiées quand on y fait

$$A_{2h-1} = 0, \qquad A_{2h} = \text{const.} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

$n = 2m$ étant la dimension de l'espace ambiant. Il est très facile de voir, d'après des résultats connus, que l'on a l'énoncé que voici :

Si l'on se déplace d'une longueur constante le long des directions principales d'une ligne hypersphérique à courbures constantes, on obtient une courbe hypersphérique.

3. Le théorème du premier paragraphe nous donne une propriété caractéristique des courbes à courbures constantes de S_n. Ici je me bornerai aux hélices cylindriques à courbures constantes (qui, d'après un théorème dû à M. Brunel, ne peuvent exister que dans un espace à un nombre impair de dimensions), renvoyant pour les lignes hypersphériques à courbures constantes à une Note insérée dans ce Journal [1].

Nous pouvons trouver une propriété des courbes à courbures constantes de S_{2p+1} en appliquant un théorème que j'ai énoncé dans la Note précitée, et qui est ainsi exprimé :

Les courbes de S_{2p+1} *définies par les équations*

$$(5) \qquad \frac{R_2}{R_1} = h_1, \qquad \frac{R_4}{R_3} = h_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{R_{2p}}{R_{2p-1}} = h_p,$$

les quantités h *étant des constantes, sont telles que leurs directions impaires coupent sous un angle con-*

---

[1] *Sur les développantes de certaines lignes en* S_n *et sur une propriété caractéristique des courbes hypersphériques à courbures constantes* (*N. A.*, septembre 1900, p. 385).

stant une direction donnée, pendant que les autres lui sont perpendiculaires.

Il suffit d'y joindre la condition que les H d'indice pair soient zéro et de remarquer que de ces conditions, au nombre de p, avec les relations (5), également au nombre de p, il s'ensuit que tous les rayons de courbure sont constants, pour en déduire le théorème que voici :

Les hélices à courbures constantes de S_{2p+1} *sont caractérisées par ce fait que les directions impaires coupent sous un angle constant une direction donnée, pendant que les autres lui sont perpendiculaires et que les* $2p$ *lignes* $b_1, b_2, \ldots, b_{2p}$ *lieux des centres de première, deuxième, ...,* $2p^{\text{ième}}$ *courbure se réduisent à* p, b_1 *coïncidant avec* b_2, b_3 *avec* $b_4, \ldots, b_{2p-1}$ *avec* b_{2p}.