M. D'OCAGNE

Sur les transformations polaires de la courbure

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 365-369

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__365_1>

[O2e]

SUR LES TRANSFORMATIONS POLAIRES DE LA COURBURE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Nous appelons *transformations polaires des courbes planes* toutes celles qui utilisent un pôle fixe O dans le plan.

Si l'on veut, pour une telle transformation, étudier la relation qui lie les rayons de courbure en deux points correspondants, on est tout naturellement amené à se servir des coordonnées polaires en prenant le pôle O pour origine. La question revient alors à un simple changement de variables; mais ce changement de variables, étendu à des dérivées du second ordre, comporte, en général, des calculs assez compliqués et qui ne sont pas toujours d'une traduction géométrique immédiate. Voici quelques formules qui permettent dans bien des cas d'y introduire une notable simplification.

Appelons ρ et ω les coordonnées polaires d'un point courant M, ν et θ les angles que la tangente en M fait respectivement avec le rayon vecteur OM et l'axe polaire Ox, s l'arc, N et n la normale et la sous-normale polaire, R le rayon de courbure, enfin γ le rapport $\frac{cO}{cM}$, pris avec son signe, dans lequel la projection c sur OM du centre de courbure, répondant au point M, divise ce rayon vecteur.

On connaît les formules fondamentales

$$d\rho = \rho \cot v . d\omega, \tag{1}$$

et

$$d\rho = \cos v . ds, \tag{2}$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$ds = \rho \sin v . d\omega. \tag{3}$$

Les formules (1) et (3) peuvent d'ailleurs s'écrire

$$d\rho = n . d\omega, \tag{1'}$$

et

$$ds = \mathrm{N}\, d\omega. \tag{3'}$$

Remplaçant ds par sa valeur en fonction de $d\theta$, on a, en retranchant de part et d'autre la quantité $\mathrm{R}\, d\omega$,

$$\mathrm{R}(d\theta - d\omega) = (\mathrm{N} - \mathrm{R})\, d\omega$$

ou

$$\mathrm{R}\, dv = (\mathrm{N} - \mathrm{R})\, d\omega,$$

qu'on peut écrire, comme on le voit, en se reportant à la définition de γ donnée ci-dessus,

$$dv = -\gamma\, d\omega. \tag{4}$$

Il est aisé d'apercevoir que cette formule (4) permet de trouver la relation entre les rayons de courbure dans une transformation polaire.

En effet, en différentiant les deux équations qui lient ρ et ω à ρ' et ω' on obtient deux équations dans lesquelles la formule (1) permet de ne conserver que $d\omega$ et $d\omega'$, et comme ces équations sont homogènes par rapport à ces différentielles, elles se prêtent à leur élimination, ce qui conduit à la relation entre les tangentes correspondantes.

Si l'on différentie à son tour l'équation obtenue, les formules (1) et (4) permettront encore de n'y laisser subsister que $d\omega$ et $d\omega'$, qui pourront encore être éliminés au moyen d'une des équations précédentes, et l'on aura cette fois la relation entre les centres de courbure.

Nous donnerons à titre d'application la démonstration d'un théorème que nous avons énoncé ailleurs ([1]). Il s'agit de la transformation définie par les équations

$$a^{m-1}\rho' = \rho^m, \qquad \omega' = m\omega,$$

qui pourrait être dite *transformation potentielle d'exposant m*, puisqu'elle fait correspondre au point M, dont l'affixe est $x + yi$, le point M', dont l'affixe est $\frac{(x+yi)^m}{a^{m-1}}$.

Les équations de définition différentiées donnent ici

$$a^{m-1}\,d\rho' = m\,\rho^{m-1}\,d\rho,$$
$$d\omega' = m\,d\omega,$$

ou, en divisant membre à membre et tenant compte de (1),

$$a^{m-1}\rho' \cot v' = \rho^m \cot v,$$

c'est-à-dire

$$\cot v' = \cot v.$$

On trouve ainsi que *la transformation conserve les angles*, propriété bien connue remarquée d'abord par W. Roberts et qui n'est qu'un cas particulier du célèbre théorème de Riemann, puisque la fonction $(x+yi)^m$ est monogène. Les angles v' et v étant égaux, nous avons maintenant

$$dv' = dv,$$

([1]) *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. XVIII, p. 108; 1890.

ou, en vertu de (4),

$$\gamma' d\omega' = \gamma\, d\omega,$$

c'est-à-dire

$$m\gamma' = \gamma.$$

Si nous appelons P le point où la droite MM', qui joint les deux points correspondants, est coupée par la droite qui joint les projections c et c' des centres de courbure répondant à M et M' respectivement sur les vecteurs OM et OM', nous voyons, d'après le théorème des transversales, que

$$\frac{\mathrm{PM'}}{\mathrm{PM}} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Donc, d'après la dernière formule écrite, on a

$$\frac{\mathrm{PM'}}{\mathrm{PM}} = m,$$

ce qui constitue le théorème en question.

Supposons, par exemple, que la courbe (M) soit un cercle de diamètre a passant par l'origine O et ayant son centre sur Ox. Son équation est

$$\rho = a \cos\omega,$$

et celle de sa potentielle d'exposant m

$$\rho'^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \cos\frac{\omega'}{m}.$$

Dans ce cas le point c étant le milieu de OM, on a $\gamma = -1$, et la formule précédente devient

$$\gamma' = -\frac{1}{m}.$$

Pour $m = 2$, la courbe obtenue est un limaçon de Pascal; pour $m = \frac{1}{2}$, une lemniscate de Bernoulli;

pour $m = -\frac{1}{2}$, une hyperbole équilatère. On a ainsi des déterminations très simples des centres de courbure de ces trois courbes que nous avons déjà fait connaître ailleurs.