AUDIBERT

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Solution d'une épreuve pratique de mécanique rationnelle (Toulouse, juillet 1900)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 321-323

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__321_1>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SOLUTION D'UNE ÉPREUVE PRATIQUE DE MÉCANIQUE RATIONNELLE (TOULOUSE, JUILLET 1900);

Par M. AUDIBERT.

Calculer l'attraction newtonienne d'un solide homogène limité par un paraboloïde de révolution et par un plan perpendiculaire à l'axe sur un point matériel situé au foyer de la parabole génératrice.

Soit AB *la trace du plan sécant qui limite le segment. On donne le paramètre* p *de la parabole,* *l'angle* AFH $= \alpha$, *la densité* ρ *du paraboloïde, le coefficient* μ *d'attraction.*

Pour quelle valeur de l'angle α *l'attraction du segment sur le foyer est-elle nulle?*

L'équation polaire de la génératrice, le pôle étant en F, est

$$r = \frac{p}{2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

L'élément de volume est

$$r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\omega;$$

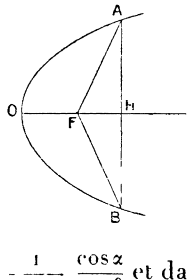
il exercera sur F une attraction dont la composante suivant l'axe sera

$$\mu\rho \sin\theta \cos\theta \, dr \, d\theta \, d\omega:$$

celle de l'anneau matériel élémentaire qu'il détermine par une rotation de 2π autour de l'axe sera

$$2\pi\mu\rho \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, dr.$$

En laissant θ constant, si l'anneau élémentaire est situé à l'intérieur du cône AFB, le rayon vecteur r



variera de zéro à $\frac{p}{2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$ et dans le reste du solide, en dehors du cône, de zéro à $\frac{p}{2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$.

L'action totale du segment est égale à la somme des deux intégrales

$$I_1 = 2\pi\mu\rho p \int_0^\alpha \frac{\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \sin\theta \, d\theta = 2\pi\mu\rho p \cos\alpha,$$

$$I_2 = 2\pi\mu\rho p \int_\alpha^\pi \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \sin\theta\cos\theta \, d\theta$$

$$= -2\pi\mu\rho p\left(1 + \cos\alpha + 2\log\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$I_1 - I_2 = -2\pi\mu\rho p\left(1 + 2\log\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Cette attraction sera nulle pour

$$\log\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \qquad \frac{\alpha}{2} = 37^\circ 20' 21''.$$

En adoptant les coordonnées cartésiennes, l'origine étant au sommet du paraboloïde, on aurait à intégrer

$$2\pi\mu\rho\left\{\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\right)^2} dx\left(x - \frac{p}{2}\right)\int_0^{(2px)^{\frac{1}{2}}} \frac{y\,dy}{\left[y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{p}{2}} dx\left(\frac{p}{2} - x\right)\int_0^{(2px)^{\frac{1}{2}}} \frac{y\,dy}{\left[y^2 + \left(\frac{p}{2} - x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Le calcul conduit au même résultat.