NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Usage des formes quadratiques dans la théorie des équations

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 313-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__313_1>

[B10]

USAGE DES FORMES QUADRATIQUES DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS;

PAR M. H. LAURENT.

Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les racines d'une équation de degré n à coefficients réels

$$f(x) = 0,$$

et par $s_0, s_1, s_2, \ldots$ les sommes

$$\sum a^0, \quad \sum a, \quad \sum a^2, \quad \ldots.$$

Considérons la forme quadratique

$$\begin{aligned} &\varphi(a_1)(z_0 + z_1 a_1 + \ldots + z_{n-1} a_1^{n-1})^2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \varphi(a_n)(z_0 + z_1 a_n + \ldots + z_{n-1} a_n^{n-1})^2 = \mathrm{V}. \end{aligned}$$

Si les racines $a_1, a_2, \ldots$ sont toutes réelles, et si la fonction $\varphi(x)$ est réelle, V sera tout décomposé en n carrés réels; mais si, parmi les racines a, il s'en trouve d'imaginaires, on pourra encore décomposer V en n carrés réels, mais une petite transformation sera nécessaire. Or, je dis qu'*à chaque couple de racines imaginaires conjuguées correspondront deux carrés de signes contraires réels.*

Supposons, en effet, a_1 et a_2 imaginaires conjuguées et soit

$$\varphi(a_1) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1};$$

on aura

$$\varphi(a_2) = \mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{-1}.$$

Soit

$$z_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_1^{n-1} z_{n-1} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}\sqrt{-1};$$

on aura

$$z_0 + a_2 z_1 + \ldots + a_2^{n-1} z_{n-1} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}\sqrt{-1},$$

et la somme de nos deux premiers carrés sera

$$\begin{aligned}&(\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1})(\mathrm{X} + \mathrm{Y}\sqrt{-1})^2 \\ &+ (\mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{-1})(\mathrm{X} - \mathrm{Y}\sqrt{-1})^2 = \mathrm{P}(\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2) - 4\mathrm{QXY},\end{aligned}$$

ce qui est bien une somme de carrés réels, l'un positif, l'autre négatif.

En second lieu, les carrés dont la somme fait V ne seront distincts que si les racines de $f = 0$ sont inégales, et V sera la somme de μ carrés distincts si les racines de f se réduisent à μ distincts, c'est-à-dire si l'on compte pour *une* un ensemble de k racines égales.

Ceci posé, nous allons tirer de la remarque précédente une foule de conséquences plus ou moins intéressantes.

1. Supposons $\varphi(a) = 1$; on aura

$$\mathrm{V} = \sum (z_0 + a_i z_1 + \ldots + a_i^{n-1} z_{n-1})^2 = \sum z_i z_j \mathrm{S}_{i+j}.$$

Soient

ϖ le nombre des racines positives de $f = 0$;
ν le nombre des racines négatives;
$2\,\mathrm{I}$ le nombre des racines imaginaires, abstraction faite de leur degré de multiplicité;
$r = \varpi + \nu$ le nombre des racines réelles;
P le nombre des carrés positifs;
N le nombre des carrés négatifs de $\mathrm{V} = \sum z_i z_j \mathrm{S}_{i+j}$ décomposé en carrés réels.

On aura

$$r + \mathrm{I} = \mathrm{P}, \qquad \mathrm{I} = \mathrm{N},$$
$$r = \mathrm{P} - \mathrm{N}.$$

Et si l'on forme le polynome en x

$$\begin{vmatrix} s_0 - x & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 - x & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} \\ .. & .. & \ldots & \ldots. \end{vmatrix} = \mathrm{X},$$

en appelant v le nombre de ses variations, on aura

$$v = \mathrm{P},$$

et N sera égal à $n - \mathrm{P} - \omega$, ω désignant le nombre des racines nulles de $\mathrm{X} = 0$.

2. Prenons $\varphi = x - a$, on aura

$$\mathrm{V} = \sum (x - a_i)(z_0 + a_i z_1 + \ldots + a_i^{n-1} z_{n-1})^2$$
$$= \sum z_i z_j (x s_{i+j} - s_{i+j+1}).$$

Soient toujours

P le nombre des carrés positifs réels;
N le nombre des carrés négatifs de V;

ρ le nombre des racines de $f(x) = 0$ supérieures à x;
ρ' le nombre des racines de $f(x) = 0$ inférieures à x.

On aura

$$N = I + \rho, \qquad P = I - \rho',$$
$$N - P = \rho - \rho',$$

et, si l'on appelle P_1, N_1, ρ_1, ρ'_1 ce que deviennent P, N, ρ, ρ' quand on change x en x_1,

$$N_1 = I + \rho_1, \qquad P_1 = I - \rho'_1,$$

et, par suite,

$$P - P_1 = \rho' - \rho'_1;$$

donc le nombre des racines de $f = 0$ comprises entre x et x_1 est la différence entre le nombre des carrés positifs que présentent les polynomes $V(x)$ et $V(x_1)$ ou, si l'on veut, la différence du nombre de variations des polynomes en t

$$\begin{vmatrix} s_0 x - s_1 - t & s_1 x - s_2 & \ldots & s_{n-1} x - s_n \\ s_1 x - s_2 & s_2 x - s_3 - t & \ldots & s_n x - s_{n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix},$$

lorsque l'on suppose successivement $x = x$, $x = x_1$, théorème analogue au théorème de Sturm, et que j'ai donné dans mon *Traité d'Algèbre*.

3. Supposons toujours $\varphi = (x - a)$ et

$$V = \sum (x - a_i)(z_0 + \ldots - z_{n-1} a_i^{n-1})^2$$
$$= \sum z_i z_j (x s_{i+j} - s_{i+j+1});$$

le discriminant de V pourra se calculer de deux manières :

1° Soit directement, et ce sera

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_0 x - s_1 & s_1 x - s_2 & \ldots & s_{n-1} x - s_n \\ s_1 x - s_2 & s_2 x - s_3 & \ldots & s_n x - s_{n+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix};$$

2° Soit en observant que le discriminant de

$$\sum (x-a_i)X^2$$

est égal à $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ multiplié par le carré du déterminant de la substitution

$$X_1 = z_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_1^{n-1} z_{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui est égal à

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = D,$$

en sorte que

$$\Delta = D(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$

il en résulte qui si D est différent de zéro, $\Delta = 0$ sera une des formes de l'équation $f = 0$. Mais, si $D = 0$, notre conclusion est inexacte.

Si $f(x)$ a toutes ses racines inégales, D ne sera pas nul et $f(x) = 0$ pourra être remplacé par $\Delta = 0$.

Si $f = 0$ a *une* racine double, V se réduit à $n-1$ carrés, son discriminant Δ est nul, mais ses mineurs ne le sont pas, ce sont les discriminants de V obtenus en annulant la variable z_{n-1} et en faisant abstraction d'un carré correspondant à la racine double, mais en le doublant, en sorte que $f = 0$ débarrassé de sa racine double, ou plutôt réduit à n'avoir plus cette racine qu'en qualité de racine simple, sera

$$\begin{vmatrix} s_0 x - s_1 & \ldots & s_{n-2} x - s_{n-1} \\ s_1 x - s_2 & \ldots & s_{n-1} x - s_n \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0,$$

et, en général, si $F(x) = 0$ désigne ce que devient $f = 0$ quand toutes ses racines multiples sont remplacées par les mêmes racines réduites à être simples, F s'obtiendra en supprimant les p dernières lignes et les p dernières colonnes de Δ, p désignant le nombre des facteurs premiers de f que l'on doit supprimer pour qu'ils deviennent simples.

Nous avons ainsi un moyen de supprimer les facteurs multiples d'une équation.

4. Si nous faisons $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{f'(x)}$, $\psi(x)$ désignant un polynome entier, nous trouvons

$$\begin{aligned} V &= \sum \frac{\psi(a_k)}{f'(a_k)} (z_0 + z_1 a_k + \ldots + z_{n-1} a_k^{n-1})^2 \\ &= \sum z_i z_j \frac{\psi(a_k)}{f'(a_k)} a_k^{i+j}. \end{aligned}$$

Le discriminant de V est $\psi(a_1)\psi(a_2)\ldots$, c'est le premier membre de la résultante de $f(x) = 0$ et $\psi(x) = 0$, on a donc

$$R = \begin{vmatrix} \sum \frac{\psi(a_k)}{f'(a_k)} & \sum \frac{\psi(a_k)a_k}{f'(a_k)} & \ldots \\ \sum \frac{\psi(a_k)a_k}{f'(a_k)} & \sum \frac{\psi(a_k)a_k^2}{f'(a_k)} & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

et les fonctions symétriques qui sont les éléments du déterminant R sont très faciles à calculer.

$\sum \frac{\psi(a_k)}{f'(a_k)} a_k^p$ est le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le quotient

$$\frac{\psi(x)x^p}{f(x)}.$$

Il y a, dans ce qui précède, non pas des théorèmes isolés, mais une véritable méthode que l'on peut appliquer dans une foule de circonstances. Ainsi, dans l'exemple du n° 2, j'ai fait connaître un théorème analogue à celui de Sturm, mais il existe une infinité de théorèmes analogues permettant de séparer les racines d'une équation algébrique; on peut en effet remplacer la fonction V par une quelconque des suivantes :

$$\sum (x-a)a^{2p}(z_0+z_1a+\ldots+z_{n-1}a^{n-1})^2,$$

$$\sum \frac{a^{2p}}{x-a}(z_0+z_1a+\ldots+z_{n-1}a^{n-1})^2,$$

$$\sum (x-a)\frac{1}{a^{2p}}(z_0+z_1a+\ldots+z_{n-1}a^{n-1})^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Enfin les considérations précédentes, en faisant usage du calcul intégral, peuvent s'appliquer également aux équations transcendantes, et même aux systèmes d'équations à plusieurs inconnues. La méthode une fois indiquée, le lecteur pourra considérablement augmenter le nombre des applications.