

B. ÉLIE

**Étude d'une élastique gauche. Hélice  
soumise à l'action d'un couple**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1901), p. 292-313

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1901\\_4\\_1\\_\\_292\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__292_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[F8h $\beta$ ] [T2 $\alpha$ ]

ÉTUDE D'UNE ÉLASTIQUE GAUCHE.  
HÉLICE SOUMISE A L'ACTION D'UN COUPLE;

PAR M. B. ÉLIE.

---

Lorsqu'un fil élastique, qui primitivement a une courbure et une torsion nulles, est actionné par une force et un couple appliqués à une de ses extrémités, l'autre étant fixée, les équations différentielles qui expriment l'équilibre final se trouvent être les mêmes que celles relatives au mouvement d'un corps grave de révolution (1).

L'étude de ces deux problèmes, dont l'un est en quelque sorte l'image de l'autre, s'est donc faite d'une façon simultanée et surtout par les nombreux travaux dont le second a été l'objet.

Mais lorsque la torsion ainsi que la courbure initiales du fil ne sont pas nulles, les équations différentielles sont modifiées et l'analogie indiquée n'existe plus.

En partant de cette nouvelle hypothèse on s'est borné à établir qu'une hélice demeure une hélice lorsque la force et l'axe du couple sont parallèles à l'axe de l'hélice.

---

(1) Voir à ce sujet : KIRCHHOFF, *Vorlesungen uber mathematische Physik*, 1876.

W. THOMSON, *Treatise on natural philosophy*, Vol. I, Part II, 1883.

HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, 1886.

Je me suis proposé, dans ce qui suit, d'examiner un second cas particulier, celui où l'une des extrémités étant fixée, l'autre est seulement soumise à un couple de direction quelconque. On verra qu'alors l'hélice vient se placer sur un tore dont la méridienne n'est pas circulaire.

Dans un premier paragraphe, outre les définitions et les formules qu'il y aurait lieu d'utiliser, sont établies les équations différentielles du problème sous diverses formes; dans un deuxième paragraphe, les équations sont résolues en admettant une hypothèse très particulière sur les constantes d'élasticité, mais qui permet de se faire une idée claire de la forme de l'élastique; dans un dernier paragraphe la question est traitée à l'aide des fonctions elliptiques sans imposer à la substance du fil d'autre condition que d'être isotrope. Les formules auxquelles on est conduit se rapprochent alors beaucoup de celles relatives au mouvement d'un solide de révolution dans un liquide (1).

#### § I. — ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE.

Considérons un fil très mince de substance homogène, dont la section reste invariable et a deux axes de symétrie. Le lieu des centres des sections sera, par définition, la courbe du fil. Supposons la substance anisotrope, mais telle cependant qu'elle possède trois axes de symétrie cristalline rectangulaires : l'un dirigé suivant la tangente au fil, les deux autres suivant les axes de la section. Ces axes constituent un trièdre de coordonnées mobiles le long de la courbe que je désigne par  $p, q, r$ .

---

(1) Voir à ce sujet : GREENHILL, *Treatise of elliptic functions*.

Soient

$p_0, q_0$  les projections de l'inverse des rayons de courbure initiale sur les axes  $p$  et  $q$ ;

$r_0$  une longueur égale à la torsion portée sur l'axe des  $r$ ;

$p, q, r$  ces mêmes éléments relatifs à la courbe déformée;

$P, Q, R$  les différences  $p - p_0, q - q_0, r - r_0$ ;

$A, B, C$  trois constantes dépendant de la section et de la substance du fil.

J'admettrai que l'énergie élastique de l'unité de longueur, après une déformation, a pour expression en tout point du fil :

$$(1) \quad E = \frac{1}{2} (AP^2 + BQ^2 + CR^2),$$

que par suite les composantes du couple dû à l'élasticité du fil suivant les axes, sont

$$\frac{\partial E}{\partial P} \text{ ou } AP, \quad \frac{\partial E}{\partial Q} \text{ ou } BQ, \quad \frac{\partial E}{\partial R} \text{ ou } CR.$$

Les conditions d'équilibre s'obtiennent en égalant ces quantités aux composantes suivant les mêmes axes des couples extérieurs. Si, en outre, une force agit à l'extrémité libre du fil, il faudra adjoindre au premier couple un autre agissant en chaque point du fil provenant du transport de la force en ce point. La composante suivant la tangente du couple résultant modifie la torsion du fil, la composante suivant une perpendiculaire à cette tangente modifie la courbure.

Pour donner une forme explicite à ces conditions, nous devons rapporter la courbe à un système d'axes arbitraires, mais fixes,  $Ox, Oy, Oz$ . La position de ces

axes par rapport aux coordonnées mobiles est définie par le Tableau suivant, dans lequel j'ai exprimé les neuf cosinus  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , en fonction des angles d'Euler qu'il y aura lieu d'utiliser plus tard :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x \dots \alpha_1 = \cos \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi, \\ y \dots \alpha_2 = \cos \theta \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi, \\ z \dots \alpha_3 = -\sin \theta \cos \varphi, \\ \qquad \qquad \qquad p; \\ x \dots \beta_1 = -\cos \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi, \\ y \dots \beta_2 = -\cos \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi, \\ z \dots \beta_3 = \sin \theta \sin \varphi, \\ \qquad \qquad \qquad q; \\ x \dots \gamma_1 = \sin \theta \cos \psi, \\ y \dots \gamma_2 = \sin \theta \sin \psi, \\ z \dots \gamma_3 = \cos \theta, \\ \qquad \qquad \qquad r. \end{array} \right.$$

Si nous désignons par  $F_x, F_y, F_z$ ;  $M_x, M_y, M_z$  les projections sur les axes fixes de la force et du couple extérieurs agissant à une extrémité du fil, les équations d'équilibre sont

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \frac{\partial E}{\partial P} + \beta_1 \frac{\partial E}{\partial Q} + \gamma_1 \frac{\partial E}{\partial R} = M_x + y F_z - z F_y, \\ \alpha_2 \frac{\partial E}{\partial P} + \beta_2 \frac{\partial E}{\partial Q} + \gamma_2 \frac{\partial E}{\partial R} = M_y + z F_x - x F_z, \\ \alpha_3 \frac{\partial E}{\partial P} + \beta_3 \frac{\partial E}{\partial Q} + \gamma_3 \frac{\partial E}{\partial R} = M_z + x F_y - y F_x, \end{array} \right.$$

les indices  $x, y, z$  indiquant la coordonnée suivant laquelle on projette la force ou le couple.

Transformons ce système en un autre qui ne contienne plus ni les  $M_{xyz}$  ni les  $\alpha, \beta, \gamma$ . Pour cela, remarquons que, d'après les définitions des composantes de la courbure  $p, q$  et de la torsion  $r$ , on a, l'accent indiquant la

dérivée par rapport à l'élément d'arc  $ds$  :

$$(4) \quad \begin{cases} p = \gamma_1 \beta'_1 + \gamma_2 \beta'_2 + \gamma_3 \beta'_3, & p = -(\beta_1 \gamma'_1 + \beta_2 \gamma'_2 + \beta_3 \gamma'_3), \\ q = \alpha_1 \gamma'_1 + \alpha_2 \gamma'_2 + \alpha_3 \gamma'_3, & q = -(\gamma_1 \alpha'_1 + \gamma_2 \alpha'_2 + \gamma_3 \alpha'_3), \\ r = \beta_1 \alpha'_1 + \beta_2 \alpha'_2 + \beta_3 \alpha'_3, & r = -(\alpha_1 \beta'_1 + \alpha_2 \beta'_2 + \alpha_3 \beta'_3), \end{cases}$$

que, de plus,

$$(5) \quad \gamma_1 = \frac{dx}{ds}, \quad \gamma_2 = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma_3 = \frac{dz}{ds}.$$

Prenons les dérivées des équations (3) par rapport à  $s$ , multiplions-les respectivement par  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et ajoutons, en tenant compte des relations précédentes; nous obtenons la première des équations suivantes dont les deux autres s'obtiennent d'une façon analogue :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds} \frac{\partial E}{\partial P} - r \frac{\partial E}{\partial Q} + q \frac{\partial E}{\partial R} = \beta_1 F_x + \beta_2 F_y + \beta_3 F_z = F_q, \\ \frac{d}{ds} \frac{\partial E}{\partial Q} - p \frac{\partial E}{\partial R} + r \frac{\partial E}{\partial P} = -(\alpha_1 F_x + \alpha_2 F_y + \alpha_3 F_z) = -F_p, \\ \frac{d}{ds} \frac{\partial E}{\partial R} - q \frac{\partial E}{\partial Q} + p \frac{\partial E}{\partial P} = 0. \end{cases}$$

On peut mettre encore les égalités (3) sous une autre forme telle que l'a donnée Binet <sup>(1)</sup>. Caractérisons, par des accents, les dérivées successives de  $x, y, z$  et rappelons que  $\sqrt{p^2 + q^2}$  est l'inverse du rayon de courbure. On déduit immédiatement des égalités (4) multipliées par  $\alpha, \beta$  et ajoutées, ainsi que de (5) :

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha_1(P + p_0) + \beta_1(Q + q_0) = y' z'' - z' y'' = \alpha_1 \sqrt{p^2 + q^2}, \\ \alpha_2(P + p_0) + \beta_2(Q + q_0) = z' x'' - x' z'' = \alpha_2 \sqrt{p^2 + q^2}, \\ \alpha_3(P + p_0) + \beta_3(Q + q_0) = x' y'' - y' x'' = \alpha_3 \sqrt{p^2 + q^2}. \end{cases}$$

Si l'on élimine  $P, Q, R$  entre ces équations et celles (3),

---

(1) Voir BINET et WANZEL, *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, 1844.

en désignant par  $\delta$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  les deuxièmes membres de ces dernières, on obtient :

$$(8) \quad \begin{cases} A(y'z'' - z'y'') + CRx' = A(\alpha_1 p_0 + \beta_1 q_0) + \delta, \\ B(z'x'' - x'z'') + CRy' = B(\alpha_2 p_0 + \beta_2 q_0) + \mu, \\ C(x'y'' - y'x'') + CRz' = C(\alpha_3 p_0 + \gamma_3 q_0) + \nu. \end{cases}$$

Suivant les données et les conditions imposées il y aura lieu d'employer telle ou telle de ces formules. Dans le cas présent, la courbe initiale est une hélice,  $p_0$ ,  $q_0$ ,  $r_0$  sont constants; la force extérieure est nulle,  $F'_{xyz} = 0$ . Le groupe (G) doit être adopté. Je l'écrirai :

$$(9) \quad \begin{cases} A \frac{d(p-p_0)}{ds} = Br(q-q_0) - Cq(r-r_0), \\ B \frac{d(q-q_0)}{ds} = Cp(r-r_0) - Ar(p-p_0), \\ C \frac{d(r-r_0)}{ds} = Aq(p-p_0) - Bp(q-q_0). \end{cases}$$

Il permet de trouver les valeurs de  $p$ ,  $q$ ,  $r$ . On en déduit en effet les deux intégrales :

$$(10) \quad A^2 P^2 + B^2 Q^2 + C^2 R^2 = \text{const.} = M^2.$$

$$(11) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.}$$

Le premier membre de (10) est le carré du moment du couple d'élasticité et égal par suite au carré du moment du couple extérieur que je désigne par  $M$ . En éliminant  $P$  et  $Q$  entre ces intégrales et la troisième (9) on trouve une relation entre la dérivée  $\frac{dv}{ds}$  et la racine d'un polynôme en  $r$  qui ne s'abaissera au quatrième que si deux des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  deviennent égales. C'est une nouvelle restriction que l'on devra s'imposer.

Pourtant je vais montrer que si les quantités  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  sont supposées connues on peut, même si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont inégales, ramener la recherche des  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et des coor-

données à des quadratures. Les valeurs des  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  se déduisent en effet des équations (4) ou de leurs transformées

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} = r \beta_i - q \gamma_i, \\ \frac{\partial \beta_i}{\partial s} = p \gamma_i - r \alpha_i, \\ \frac{\partial \gamma_i}{\partial s} = q \alpha_i - p \beta_i. \end{cases}$$

Or ces égalités sont satisfaites par la solution particulière

$$(13) \quad \alpha_3 = \frac{AP}{M}, \quad \beta_3 = \frac{BQ}{M}, \quad \gamma_3 = \frac{CR}{M},$$

en faisant  $i = 3$  et supposant  $M$  constant. Car on retombe ainsi sur les équations (9) qui sont supposées vérifiées. D'autre part, on déduit des valeurs des  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  du Tableau (2) et des égalités (4)

$$(14) \quad \begin{cases} p = P + p_0 = \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} - \sin \theta \cos \varphi \frac{d\psi}{ds}, \\ q = Q + q_0 = \cos \varphi \frac{d\theta}{ds} + \sin \theta \sin \varphi \frac{d\psi}{ds}, \\ r = R + r_0 = \frac{d\varphi}{ds} + \cos \theta \frac{d\psi}{ds}, \end{cases}$$

d'où, par les deux premières,

$$-(P + p_0) \cos \varphi + (Q + q_0) \sin \varphi = \sin \theta \frac{d\psi}{ds}.$$

Éliminons  $\theta$  et  $\varphi$  entre cette égalité et les suivantes

$$\alpha_3 = -\sin \theta \cos \varphi, \quad \beta_3 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta,$$

et utilisons les valeurs (13) des  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$ ,  $\gamma_3$ , nous arrivons à

$$(15) \quad \frac{d\psi}{ds} = M \frac{APp + BQq}{A^2P^2 + B^2Q^2}.$$

$\psi$  étant connu, on a les  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  par le Tableau (2) et

$x, y, z$  pour les relations (5)

$$(16) \quad x = \int \sin \theta \cos \psi \, ds, \quad y = \int \sin \theta \sin \psi \, ds, \quad z = \int \cos \theta \, ds.$$

jointes à

$$\cos \theta = \frac{CR}{M}.$$

C'est la marche que j'adopterai dans les applications. Avant d'y arriver, examinons encore de quelle façon il faut limiter les hypothèses très générales faites au début, lorsque nous supposerons l'égalité de deux des constantes A et B. En premier lieu, on devra admettre que la section du fil est circulaire. En second lieu, les constantes d'élasticité devront être égales dans deux directions rectangulaires de cette section. Ceci revient à considérer la substance du fil comme isotrope.

A, B et C ont alors la signification suivante : soient  $\chi$  le moment d'inertie de la section circulaire S de rayon  $h$  relative à son centre

$$\chi = \frac{\pi h^2}{2} S;$$

$\lambda$  et  $\mu$  les constantes d'élasticité de Lamé.

On a

$$(17) \quad A = B = \chi \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}, \quad C = \chi \mu.$$

Pour les métaux élastiques, on a à peu près  $\lambda = \mu$ , par suite

$$\frac{A}{C} = \frac{5}{4}, \quad \text{et en général} \quad A > C.$$

A n'est égal à C que si le rapport  $\frac{\lambda}{\mu}$  est nul. Lorsque la substance est isotrope ( $A = B$ ) la position des axes  $p, q$  est arbitraire, on peut adopter pour axe  $q$  la direction du rayon de courbure initial, c'est-à-dire poser

$q_0 = 0$ ; l'axe  $p$  est alors dirigé suivant la binormale. C'est ce que je supposerai désormais.

Une dernière simplification résulte de ce que la position des axes fixes est aussi indéterminée. Choisissons pour axe  $y$  la direction de l'axe du couple extérieur; alors les équations (3) (les  $F$  étant supposés nuls) s'écrivent

$$(18) \quad \begin{cases} A \alpha_1 P + B \beta_1 Q + C \gamma_1 R = 0, \\ A \alpha_2 P + B \beta_2 Q + C \gamma_2 R = 0, \\ A \alpha_3 P + B \beta_3 Q + C \gamma_3 R = 0. \end{cases}$$

Remarquons que les expressions (13) de  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  rendent la dernière équation identique. Quant aux deux autres, elles sont vérifiées par les valeurs  $\alpha, \beta, \gamma$  du Tableau (2) si les lignes trigonométriques en  $\theta$  et  $\varphi$  sont exprimées en fonction de  $P, Q$  et  $R$  d'après les mêmes égalités (13).

## § II. — EXAMEN DU CAS DE $A = B = C$ .

D'après ce qui précède, cette double égalité n'est jamais réalisée. Je traiterai cependant ce cas, et même en premier lieu, parce que les calculs, relativement très simples, conduisent à des résultats qui, au point de vue analytique, diffèrent de ceux auxquels on arrive dans le cas général, mais qui en diffèrent très peu aux points de vue géométrique et mécanique. La discussion se trouvera abrégée d'autant dans l'examen du cas général.

*Calcul de  $p, q, r$ .* — Les équations (9) se réduisent à

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{dp}{ds} = r_0 q - q_0 r, \\ \frac{dq}{ds} = p_0 r - r_0 p, \\ \frac{dr}{ds} = q_0 p - p_0 q. \end{cases}$$

Supposons  $q_0 = 0$ , c'est-à-dire l'axe  $p$  dans la direction des rayons de courbure initiale.

Soient

$i$  l'inclinaison de l'hélice initiale;

$l$  la longueur d'une spire;

$c$  et  $\tau$  sa courbure et sa torsion;

$\nu$  le rayon du cylindre sur lequel elle est tracée.

Nous avons

$$(20) \quad p_0 = c = \frac{\cos i \sin i}{\nu}, \quad r_0 = \tau = \frac{\cos^2 i}{\nu}.$$

Posons

$$\pi^2 = c^2 + \tau^2 = \frac{\cos^2 i}{\nu^2} = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2.$$

Les équations (21) s'écrivent

$$(21) \quad \frac{dp}{ds} = \tau q, \quad \frac{dq}{ds} = cr - \tau q, \quad \frac{dr}{ds} = -cq.$$

L'étude de la courbe après déformation est facilitée par la considération de quatre de ses points, que je désignerai par les indices 1, 2, 3 et 4.

Les points 2 et 4 correspondent aux valeurs

$$p_2 \text{ ou } p_4 = c, \quad q_2 \text{ ou } q_4 = \pm m, \quad r_2 \text{ ou } r_4 = \tau,$$

$m$  étant défini par

$$M = A m.$$

Ces valeurs rendent identique l'intégrale (10) où

$$(22) \quad P^2 + Q^2 + R^2 = m^2$$

définissent la constante de l'intégrale (11)

$$(23) \quad p^2 + q^2 + r^2 = a^2 + m^2 + r^2$$

et annulent  $\frac{dq}{ds}$ ;  $q$  est donc maximum en ces points et égal à  $m$ . On verra plus loin que la tangente en ces

points est perpendiculaire à l'axe du couple et qu'ils sont équidistants des points 1 et 3.

L'inclinaison  $j$  du plan osculateur de la courbe sur le plan osculateur initial est donnée en ces points par

$$\text{tang } j = \frac{c}{m}.$$

En un point quelconque, la tangente de cet angle est donnée par  $\frac{p}{q}$ . A l'aide des relations (25), on trouve qu'il est maximum pour un point situé entre 1 et 2.

Les points 1 et 3 correspondent au maximum et au minimum de  $r$ . Éliminons  $p, q$  entre les intégrales (21), (23) et la troisième équation (21); nous trouvons

$$(24) \quad - \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = (r - \tau)^2 - \frac{m^2 c^2}{\varpi^2}.$$

Par suite, le maximum et le minimum de  $r$  sont

$$r_1 \text{ ou } r_3 = \tau \pm \frac{mc}{\varpi}.$$

Ces valeurs de  $r$  rendent  $p$  minimum ou maximum ; on a

$$p_1 \text{ ou } p_3 = c \mp \frac{\tau m}{\varpi}.$$

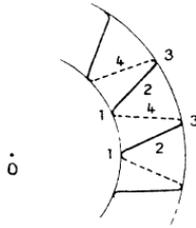
D'après (21) on a de plus  $q = 0$ ; par suite, le plan osculateur de la courbe finale est confondu avec celui de l'hélice initiale.

En intégrant l'équation (24) et utilisant les intégrales (22) et (23) on obtient, si l'origine des arcs est au point 1,

$$(25) \quad \begin{cases} P = p - c = m \frac{\tau}{\varpi} \cos \varpi s, \\ Q = q (-q_0 = 0) = \pm m \sin \varpi s, \\ R = r - \tau = m \frac{c}{\varpi} \cos \varpi s. \end{cases}$$

Afin de discuter ces expressions plus facilement, anticipons sur la connaissance que l'on aura plus tard des coordonnées de la courbe. Cette courbe est située sur un tore dont le plan de symétrie est celui du couple extérieur.

Prenons ce plan pour plan des  $xy$ , que nous considérons comme horizontal, et le centre du tore pour origine; l'axe  $Oz$  sera vertical. La figure ci-dessous



représente la projection horizontale d'une portion de la courbe; le trait plein correspond aux points au-dessus du plan, le trait pointillé à ceux situés au-dessous. Au point 1,  $r$  est maximum, au point 3 minimum; en 2 et 4 points équidistants de 1 et 3 la tangente est horizontale.

Si l'on suit le plan osculateur, il est confondu en 1 avec celui de l'hélice, puis s'incline sur ce dernier jusqu'en un point situé entre 1 et 2, puis s'en rapproche jusqu'à se confondre avec lui au point 3. De l'autre côté du plan, il exécute le mouvement en sens contraire.

*Calcul de  $\psi$  et des cosinus  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .* — D'après (15),  
ou a

$$\frac{d\psi}{ds} = m \left( 1 + \frac{cP}{P^2 + Q^2} \right)$$

ou par les égalités (25)

$$\frac{d\psi}{ds} = m + \frac{\frac{c}{\tau} \varpi \cos \varpi s}{1 + \left(\frac{c}{\tau}\right)^2 \sin^2 \varpi s},$$

d'où

$$(26) \quad \psi = ms + \text{arc tang} \left( \frac{c}{\tau} \sin \varpi s \right).$$

Le premier terme croît constamment, le second toujours inférieur à  $\frac{\pi}{2}$  est alternativement positif et négatif.

Les lignes trigonométriques de  $\psi$  dépendent donc de deux périodes  $l$  et  $L$  définies par

$$(27) \quad \varpi = \frac{2\pi}{l}, \quad m = \frac{2\pi}{L}.$$

La seconde  $L$  est égale à la somme des longueurs de spire qu'il faut parcourir pour que le trièdre mobile  $pqr$  reprenne son orientation initiale par rapport au trièdre fixe  $xyz$ . Quand ceci a lieu on a

$$(28) \quad \varpi s = 2\pi N, \quad ms = 2\pi n,$$

ou

$$\frac{\varpi}{m} = \frac{N}{n} = \frac{L}{l};$$

$N$  représente le nombre des spires parcourues,  $n$  celui des circonférences décrites autour du centre  $O$  pour que les extrémités du fil se raccordent.

D'après la définition des angles  $\theta$ ,  $\varphi$  et  $\psi$ , on voit que  $\theta$  est l'angle avec  $Oz$  de la tangente à la courbe,  $\psi$  est l'angle du plan passant par cette tangente et la verticale  $Oz$  avec  $Ox$ . C'est donc l'angle avec  $Ox$  de la tangente à la projection de la courbe.

L'une des relations (28) permet d'exprimer d'une façon simple l'énergie élastique développée dans le fil.

( 305 )

Formons l'intégrale  $\int E ds$  étendue à tout le fil en utilisant les égalités (1) et (25) et nous trouvons

$$\int E ds = \frac{1}{2} M ms = \frac{1}{2} M 2\pi n,$$

ce qu'on aurait pu poser *a priori*.

Des valeurs P, Q, R et  $\psi$  que nous venons de trouver on déduit immédiatement celles de  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , par le Tableau (2). En effet, on a, d'une part,

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_3 = \sin \theta \cos \varphi = \frac{P}{m}, \\ \beta_3 = \sin \theta \sin \varphi = \frac{Q}{m}, \\ \gamma_3 = \frac{R}{m}; \end{array} \right.$$

d'autre part,

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \frac{dx}{ds} = \sin \theta \cos \psi \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{m} \cos \psi, \\ \gamma_2 = \frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{m} \sin \psi, \\ \gamma_3 = \frac{dz}{ds} = \frac{R}{m}, \end{array} \right.$$

et les six autres qu'il est inutile d'écrire.

Comme dernière conclusion à tirer des valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , remarquons qu'au point 1 ( $s = 0$ ), on a

$$\gamma_3 = \frac{c}{\varpi} = \sin i,$$

c'est-à-dire que la tangente à la courbe fait, avec le plan du couple, un angle égal à l'inclinaison de l'hélice initiale.

En second lieu, aux points 2, on a

$$\alpha_3 = 0, \quad \gamma_3 = 0.$$

La binormale et la tangente à la courbe sont donc horizontales.

*Coordonnées  $x, y, z$  de la courbe.* — On les obtient par l'intégration des équations (30). Posons

$$\text{arc tang } \frac{c}{\tau} \sin \varpi s = \omega \quad \text{ou} \quad \frac{c}{\tau} \sin \varpi s = \text{tang } \omega.$$

Développons

$$\cos \psi = \cos(ms + \omega), \quad \sin \psi = \sin(ms + \omega);$$

substituons dans (30), en tenant compte de

$$P^2 + Q^2 = m \frac{\tau}{\varpi} \left[ 1 + \left( \frac{c}{\tau} \right)^2 \sin^2 \varpi s \right].$$

Ces équations deviennent

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{dx}{ds} = \tau \sin ms - c \sin \varpi s \cos ms, \\ \frac{dy}{ds} = \tau \cos ms - c \sin \varpi s \sin ms, \\ \frac{dz}{ds} = c \cos \varpi s. \end{cases}$$

Si l'on considère les trois dérivées des premiers membres comme les coordonnées d'un point, le lieu de ces points est une sorte d'herpolhodie non fermée, en général tracée sur une sphère de rayon unité; ses rayons vecteurs sont parallèles à la tangente à l'hélice déformée.

Intégrons ces équations et posons  $\frac{\varpi}{m} = K$ , on obtient

$$(32) \quad \begin{cases} \varpi^2 x = -K\tau \cos ms - \frac{cK}{1-K^2} (K \cos ms \cos \varpi s + \sin ms \sin \varpi s), \\ \varpi^2 y = K\tau \sin ms + \frac{cK}{1-K^2} (K \sin ms \cos \varpi s - \cos ms \sin \varpi s), \\ \varpi^2 z = c \sin \varpi s. \end{cases}$$

On peut éliminer l'arc  $ms$  des deux premières et, entre l'équation résultante

$$(33) \quad \varpi^4(x^2 + y^2) = \left( K\tau + \frac{cK^2}{1-K^2} \cos \varpi s \right)^2 + \left( \frac{cK}{1-K^2} \right) \sin^2 \varpi s$$

et la troisième (32), l'arc  $\varpi s$ . Le résultat est une équation algébrique du quatrième degré, celle du tore sur lequel est la courbe.

### § III. — CAS DE $A = B > C$ .

La méthode de calcul est la même que dans le cas précédent. Les résultats différeront très peu. En place des lignes trigonométriques d'arc  $\varpi s$  vont s'introduire des fonctions elliptiques jouant un rôle analogue. Je crois donc inutile de reproduire les remarques et les discussions faites précédemment et me bornerai à un simple formulaire en conservant autant que possible les mêmes notations.

*Calcul des P, Q, R et  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ .* — Les équations (9) (avec  $q_0 = 0$ ) deviennent

$$(34) \quad \begin{cases} A \frac{dP}{ds} = [(A - C)R + A\tau]Q, \\ A \frac{dQ}{ds} = -[(A - C)R + A\tau]P + CcR, \\ C \frac{dR}{ds} = -AcQ. \end{cases}$$

Les intégrales (10) et (11)

$$(35) \quad \begin{cases} A^2(P^2 + Q^2) + C^2R^2 = A^2m^2, \\ A(p^2 + q^2) + Cr^2 = A(m^2 + c^2) + C\tau^2, \end{cases}$$

et en les combinant

$$(36) \quad A^2cP + CR \left( \frac{A - C}{2} R + A\tau \right) = 0.$$



Il n'y a plus qu'à exprimer  $\gamma$  en fonction de  $pu$  que l'on définit comme d'ordinaire par

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} (p'u)^2 = \begin{vmatrix} a_0 = 1 & a_1 & a^2 - 2pu \\ a_1 & a_2 + pu & a_3 = 0 \\ a_2 - 2pu & a_3 = 0 & a_4 \end{vmatrix} \\ = 4p^3u - g_2pu - g_3, \end{array} \right.$$

en convenant que le deuxième membre de (40) est écrit :

$$a_0\gamma^4 + 4a_1\gamma^3 + 6a_2\gamma^2 + a_4.$$

$u$  doit être une imaginaire pure (discriminant négatif) pour que  $pu$  et  $\gamma$  soient réelles.

Les points 1 et 3 de courbure et torsion réelles maxima ou minima correspondent aux racines du deuxième membre qui prend la forme

$$a_0[p(u-c) - p(u+c)] \quad (1)$$

avec

$$p(2c) = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2}, \quad p'(2c) = \frac{2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2}{a_0^3}.$$

En 1 on a

$$u = 0,$$

en 3

$$u = \omega,$$

$\omega$  étant une période imaginaire pure définie par

$$i\omega = m \frac{\varepsilon - 1}{2} L.$$

Aux points 2 et 4 on a

$$\frac{d^2\gamma}{du^2} = 0 \quad \text{ou} \quad p'(u-c) - p'(u+c) = 0,$$

égalité satisfaite par  $u = \frac{\omega}{4}$   $u = \frac{3\omega}{4}$ .

(1) Il n'y aura pas de confusion entre  $c$  représentant la courbure et l'argument  $c$  toujours précédé du signe  $p$  ou  $\tau$ .

( 310 )

Ces points sont donc équidistants des points 1 et 3 comme dans le cas précédent ; on a aussi

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0;$$

la binormale et la tangente sont par suite horizontales. La valeur de  $\gamma$  est

$$\gamma = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2} \frac{p'(u-c) - p'2c}{p(u-c) - p2c},$$

ou encore

$$(42) \quad \gamma = -\frac{a_1}{a_0} + \zeta(u+c) - \zeta(u-c) - 2\zeta(2c).$$

Avec cette dernière forme on peut intégrer

$$z = \int \gamma ds,$$

ce qui donne

$$(43) \quad m \frac{\varepsilon - 1}{2} z = - \left[ \frac{a_1}{a_0} + 2\zeta(2c) \right] iu + i \log \frac{\sigma(u+c)}{\sigma(u-c)}.$$

Comme  $z$  doit reprendre les mêmes valeurs aux points homologues des diverses spires et que si un argument quelconque  $\nu$  croît de  $k$  périodes  $\omega$ , on a

$$\sigma(\nu + 2k\omega) = (-1)^k e^{2k-\zeta(\omega)(\nu+k\omega)} \sigma(\nu);$$

la constante  $c$  devra vérifier

$$\left[ \frac{a_1}{a_0} + 2\zeta(2c) \right] \omega = 2\lambda m \cdot \zeta(\omega).$$

La valeur de  $\alpha$  se tirera de (39) et  $\beta$  de la dernière (34) :

$$\frac{d\gamma}{du} = \frac{2ic\beta}{m(\varepsilon - 1)}.$$

P, Q, R sont donc des fonctions elliptiques de première espèce de  $s$ .

*Calcul de  $\psi$ .* — L'équation (15), à l'aide de la seconde (39), se transforme ainsi

$$\frac{\varepsilon - 1}{2} \frac{d(i\psi)}{du} = 1 + \frac{\lambda x}{\alpha^2 + \beta^2} = 1 - \frac{\gamma \left( \frac{\varepsilon - 1}{2} \gamma + \varepsilon \mu \right)}{1 - \gamma^2},$$

ou en décomposant le deuxième membre en fractions simples :

$$(44) \quad \frac{di\psi}{du} = \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} - \frac{1}{2} \left( \frac{1 + \frac{2\varepsilon\mu}{\varepsilon - 1}}{1 - p\gamma} + \frac{1 - \frac{2\varepsilon\mu}{\varepsilon - 1}}{1 + p\gamma} \right).$$

Il reste à mettre cette expression sous forme de fractions simples rationnelles de  $pu$ . On sait qu'on peut poser

$$(45) \quad \begin{cases} 1 - \gamma = -\frac{p'c(pu - pa)}{(pa - pc)(pu - pc)}, \\ 1 + \gamma = \frac{p'c(pu - pb)}{(pb - pc)(pu - pc)}, \end{cases}$$

les arguments étant convenablement choisis.

Remarquons que, pour  $\gamma = \pm 1$ , les valeurs de  $\frac{d\gamma}{du}$  sont, d'après l'équation (40),

$$\frac{d\gamma}{du} = \pm 1 + \frac{2\varepsilon\mu}{\varepsilon - 1},$$

et d'après (45)

$$\frac{d\gamma}{du} = \frac{p'ap'c}{(pa - pc)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{p'bp'c}{(pb - pc)^2}.$$

Ces quantités sont les numérateurs de l'égalité (44) qui devient ainsi :

$$\frac{di\psi}{du} = \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} + \frac{1}{2} \left( \frac{p'a}{pa - pc} \frac{pu - pc}{pu - pa} + \frac{p'b}{pb - pc} \frac{pu - pc}{pu - pb} \right).$$

Mais le premier terme de la parenthèse est

$$\frac{p'a}{pa - pc} + \frac{p'a}{pu - pc}$$

dont l'intégrale est

$$[\zeta(a-c) + \zeta(a+c)]u - \log \frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u-a)};$$

si donc on pose

$$2k = \zeta(a-c) + \zeta(a+c) + \zeta(b-c) + \zeta(b+c) + 2 \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1},$$

on obtient

$$i\psi = ku - \frac{1}{2} \log \frac{\sigma(u+a)\sigma(u+b)}{\sigma(u-a)\sigma(u-b)},$$

d'où

$$e^{i\psi} = \left[ \frac{\sigma(u-a)\sigma(u-b)}{\sigma(u+a)\sigma(u+b)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{ku},$$

$$e^{-i\psi} = \left[ \frac{\sigma(u+a)\sigma(u+b)}{\sigma(u-a)\sigma(u-b)} \right]^{\frac{1}{2}} e^{-ku}.$$

A l'aide de cette expression de  $\psi$ , on peut obtenir  $\gamma_1, \gamma_2$  par les fonctions  $\sigma$ . Ces cosinus sont en effet les dérivées en  $s$  de  $x, y$ ; on a donc par le Tableau (2)

$$x' + iy' = \sin \theta (\cos \psi + i \sin \psi) = \sqrt{1-\gamma^2} e^{i\psi},$$

$$x' - iy' = \sin \theta (\cos \psi - i \sin \psi) = \sqrt{1-\gamma^2} e^{-i\psi}.$$

Mais en tenant compte de la relation connue

$$pu - pa = \frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a)}{\sigma^2 a},$$

on a, en multipliant entre elles les égalités (45) et en posant pour abrégé

$$\mu^2 = - \frac{\sigma^2(2c)}{\sigma(u-c)\sigma(a+c)\sigma(b-c)\sigma(b+c)},$$

$$1 - \gamma^2 = \mu^2 \frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a)\sigma(u-b)\sigma(u+b)}{\sigma^2(u-c)\sigma^2(u+c)},$$

et par suite

$$\frac{d(x+iy)}{du} = - \frac{2\mu}{m(\varepsilon-1)} \frac{\sigma(u-a)\sigma(u-b)}{\sigma(u-c)\sigma(u+c)} e^{ku},$$

$$\frac{d(x-iy)}{du} = - \frac{2\mu}{m(\varepsilon-1)} \frac{\sigma(u+a)\sigma(u+b)}{\sigma(u-c)\sigma(u+c)} e^{-ku}.$$

Ce sont des fonctions elliptiques de deuxième espèce.

L'intégration ne pourra se faire qu'en les développant en série. La décomposition en éléments simples ne servirait à rien puisque l'on n'a pas étudié les fonctions dont ces éléments sont les dérivées. Nous arrivons donc à cette conclusion que, dans le cas d'un fil isotrope  $\left(\frac{A}{C} > 1\right)$ , on ne peut actuellement obtenir les coordonnées  $x$  et  $y$  de la courbe sous forme finie en fonction de  $s$ .