NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUDIBERT

Certificats d'études supérieures (Session de juillet 1899)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 28-31

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__28_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (SESSION DE JUILLET 1899);

SOLUTIONS PAR M. AUDIBERT.

Clermont.

Calculer les deux intégrales

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx, \qquad \int_0^1 e^x x^n(1-x)^n\,dx.$$

En déduire une valeur approchée du nombre, base des logarithmes népériens; limite supérieure de l'erreur commise.

En intégrant par parties la première, que nous désignons par P_n, on trouve

$$P_n = \frac{n}{2(2n+1)}P_{n-1}$$

et, par suite,

$$P_n = \frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)}.$$

Quant à la seconde, désignée I_n, la même méthode conduit à la formule

$$I_n = -2n(2n-1)I_{n-1} + n(n-1)I_{n-2}.$$

qui se prête peu au calcul final de I_n en fonction de e et de n.

Rappelons la relation connue

$$\int_0^1 e^x f(x)\,dx = \Big|_0^1 e^x[f(x) + (-1)^1 f^1(x) + \ldots$$
$$- (-1)^n f^n(x) x + \ldots + f^{2n}(x)].$$

La fonction $x^n(1-x)^n$ et ses $(n-1)$ premières dérivées sont nulles aux deux limites, et dans le développement de $\frac{d^\mu}{dx^\mu}[x^n(1-x)^n]$ les deux seuls termes qui ne s'annulent pas à la fois sont équidistants des extrêmes. Ainsi pour $\mu = n$, ce sont le premier et le dernier, soit au signe près,

$$n![(1-x)^n \text{ et } x^n].$$

En général, pour les valeurs de μ de n à $2n$, ces termes sont au signe près

$$\frac{\mu!}{(\mu-n)!} n(n-1)\ldots(2n-\mu+1)[(1-x)^{2n-\mu} \text{ et } x^{2n-\mu}].$$

A l'aide de ces données, on obtient la formule

$$I_n = e\left[n! + (-1)^1(n+1)!\frac{n}{1} + (-1)^2(n+2)!\frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots + (-1)^n(2n)!\right]$$
$$+ (-1)^{n+1}\left[n! + (n+1)!\frac{n}{1} + (n+2)!\frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots + (2n)!\right].$$

En vertu de la règle de la moyenne, I_n est plus petit que $\frac{e-1}{2^{2n}}$ et que $\frac{1}{2^{2n-1}}$. Ainsi l'équation $I_n = 0$ fournira une valeur approchée de e, avec une erreur moindre que

$$\frac{1}{2^{2n-1}\left[n! + (-1)^1(n+1)!\frac{n}{1} + \ldots + (-1)^n(2n)!\right]}.$$

Pour $n = 5$, on peut compter sur 9 décimales exactes. Le calcul donne en effet

$$e = \frac{49\,171}{18\,089} = 2,718281828.$$

Grenoble.

Développement de

$$y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^m + \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-m},$$

suivant les puissances ascendantes de x, m étant entier ou fractionnaire. Cercle de convergence.

Les dérivées successives de y s'obtiennent par les formules

$$y'\sqrt{x^2 - 1} = \frac{m}{2}\left((x + \sqrt{x^2 - 1})^m - (x - \sqrt{x^2 - 1})^m\right),$$

$$y''(x^2 - 1) + xy' - m^2 y = 0.$$

$$y^{(n)}(x^2 - 1) + (2n - 3)xy^{(n-1)} + \left((n - 2)^2 - m^2\right)y^{(n-2)} = 0.$$

Pour $x = 0$, on aura

$$y_0 = \frac{i^m + (-i)^m}{2}, \qquad y'_0 = \frac{m(i^m - (-i)^m)}{2i},$$

$$y_0^{(n)} = \left((n - 2)^2 - m^2\right)y_0^{(n-2)},$$

d'où résulte, pour n pair,

$$y_0^{(n)} = (-m^2)(2^2 - m^2)(4^2 - m^2)\ldots\left((n - 2)^2 - m^2\right)y_0$$

et pour n impair,

$$y_0^{(n)} = (1 - m^2)(3^2 - m^2)(5^2 - m^2)\ldots\left((n - 2)^2 - m^2\right)y'_0,$$

et finalement le développement

$$y = y_0\left[1 + \frac{x^2}{2!}(-m^2) + \frac{x^4}{4!}(-m^2)(2^2 - m^2) + \ldots\right]$$
$$+ y'_0\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!}(1 - m^2) + \frac{x^5}{5!}(1 - m^2)(3^2 - m^2) + \ldots\right].$$

Si m est entier et pair, la série se réduit à la première ligne, avec le coefficient $(-1)^{\frac{m}{2}}$ et s'arrête au terme de rang $n = m - 2$. Pour m impair, la série se réduit à la seconde ligne, limitée de même et multipliée par le coefficient $m(-1)^{\frac{m-1}{2}}$.

Si m est fractionnaire, posons

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

$$i^m = \cos\frac{m\pi}{2} + i\sin\frac{m\pi}{2},$$

$$(-i)^m = \cos\frac{m\pi}{2} - i\sin\frac{m\pi}{2},$$

d'où résulte

$$y_0 = \cos m\frac{\pi}{2}, \qquad y'_0 = \sin\frac{m\pi}{2}.$$

Le développement consistera en deux séries illimitées qui seront convergentes, si à partir d'un terme de rang P le rapport du terme de rang μ ($\mu > \mathrm{P}$), à celui qui le précède,

$$\frac{x^2[(\mu-2)^2-m^2]}{\mu(\mu-1)},$$

est plus petit que l'unité et ne tend pas vers l'unité, ce qui n'aura lieu que pour $x < 1$.

Dans ce cas, en posant $x = \cos\varphi$ l'on aurait $y = \cos m\varphi$ dont on a le développement suivant les puissances de $\cos\varphi$.