NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HAYASHI TSURNICHI

Nouveau procédé de résolution de l'équation du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 26-28

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__26_1>

[A3k]

NOUVEAU PROCÉDÉ DE RÉSOLUTION DE L'EQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. LE PROF. D[r] TSURNICHI HAYASHI.

Le procédé suivant, par lequel on peut résoudre une équation du quatrième degré, est semblable à celui dont M. A. Pleskot s'est servi pour une équation du troisième degré [*Nouveau procédé pour résoudre les équations du troisième degré* (*Nouvelles Annales de Math.*, février 1899)].

Soient

$$P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}},$$

$$a = x_1 + x_2,$$

$$\frac{1}{b} = x_1 x_2.$$

Nous avons alors l'équation

$$(1) \qquad P^4 - [2(a-b) + 4b]P^2 - 8P + (a-b)^2 - \frac{4}{b} = 0,$$

qui est du quatrième degré en P. De là, si l'équation (1) est donnée, ses racines sont

$$(2) \qquad P = \sqrt{b} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{b}} + a\right)}.$$

Soit l'équation donnée du quatrième degré

(A) $$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Construisons l'équation du quatrième degré dont les racines sont égales à λ fois celles de l'équation (A)

(3) $$x^4 + p\lambda^2 x^2 + q\lambda^3 x + r\lambda^4 = 0.$$

Comparons (1) et (3); nous obtenons alors

(4) $$\left\{\begin{aligned} p\lambda^2 &= -2(a-b) - 4b, \\ q\lambda^3 &= -8, \\ r\lambda^4 &= (a-b)^2 - \frac{4}{b}. \end{aligned}\right.$$

La seconde de ces équations détermine la valeur de λ

$$\lambda = -\frac{2}{q^{\frac{1}{3}}}.$$

Les deux autres deviennent alors

(5) $$\left\{\begin{aligned} \frac{2p}{q^{\frac{1}{3}}} &= -(a-b) - 2b, \\ \frac{4br}{q^{\frac{4}{3}}} &= (a-b)^2 - \frac{4}{b}, \end{aligned}\right.$$

d'où, éliminant $(a-b)$,

(B) $$b\left(p + bq^{\frac{2}{3}}\right)^2 = 4br - q^{\frac{4}{3}}.$$

Choisissons l'une quelconque des trois valeurs de b que nous pouvons déterminer d'après cette équation du troisième degré, et déterminons a par la première des relations (5). Alors les racines de l'équation (3) sont données par (2). Mais les racines de l'équation donnée (A) sont $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\text{ième}}$ de celles de l'équation (2).

De là : Les racines de l'équation du quatrième degré

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

sont données par

$$-\frac{q^{\frac{1}{3}}}{2}\left\{\sqrt{b}+\sqrt{\left[\frac{2}{\sqrt{b}}-\left(\frac{2p}{q^{\frac{2}{3}}}+b\right)\right]}\right\},$$

relation où b est déterminé par l'équation du troisième degré

$$b\left(p+bq^{\frac{2}{3}}\right)^2=4br+q^{\frac{4}{3}}. \tag{B}$$