Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 231-240
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__231_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

434.

(1858, p. 186.)

L'équation

$$c_0 x^n = \frac{n}{1} c_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} c_2 x^{n-2} + \ldots - \frac{n}{1} c_{n-1} x + c_n = 0$$

a au moins autant de racines imaginaires que l'on trouve de variations de signes dans la suite

$$c_0^2, \quad c_1^2 - c_0 c_2, \quad c_2^2 - c_1 c_3, \quad \ldots, \quad c_{n-1}^2 - c_{n-2} c_n, \quad c_2^n.$$

(NEWTON.)

La démonstration d'Euler (*Introduction à l'Analyse infinitésimale*) *n'est pas satisfaisante.* (GENOCCHI.)

NOTE

Par M. A. BOULANGER.

Ce théorème, énoncé sans démonstration par Newton (*Arithmetica universalis*), a été démontré avec rigueur par Sylvester en 1871 (*Transactions of the Royal Irish Academy* et *Philosophical Magazine*). Sa démonstration est aujourd'hui devenue classique, au moins à l'étranger [PETERSEN, *Théorie des équations algébriques,* trad. Laurent, p. 192; WEBER, *Traité d'Algèbre supérieure,* trad. Griess, p. 364 (Gauthier-Villars, éditeur)].

445.

(1858 p. 262.)

Si dans un déterminant d'ordre n on efface tous les termes qui renferment au moins deux éléments de l'une quelconque des deux diagonales ou d'une parallèle à ces diagonales, quel est le nombre des termes restants?

NOTE

Par M. C.-A. LAISANT.

En représentant par $a_i b_j c_k \ldots$ l'un quelconque des termes du déterminant, et en considérant la permutation figurée $ijk\ldots$ sur un échiquier de n^2 cases, il devient évident que le problème proposé n'est autre que celui des n reines :

Sur un échiquier de n^2 cases, placer n reines qui ne soient pas en prise réciproque, et déterminer le nombre de ces différentes dispositions.

Le problème des n reines a fait l'objet de nombreuses recherches. Nous ne le croyons pas résolu, et il nous semble même douteux que l'on arrive à le résoudre d'ici longtemps dans sa généralité.

Il a été posé pour $n = 8$, dans la question 251 et d'une façon générale dans la question 963, avec laquelle l'énoncé 445 peut être considéré comme faisant double emploi, malgré la différence de la rédaction.

495.

(1859, p. 444.)

Une courbe C_n de degré n et une conique C_2 sont données dans le même plan; on prend la polaire d'un point quelconque situé sur C_n par rapport à la conique C_2; soient P et Q les points d'intersection de cette polaire sur la conique, le degré du lieu du point d'intersection des deux normales menées en P et Q à la conique ne dépasse pas $3n$.

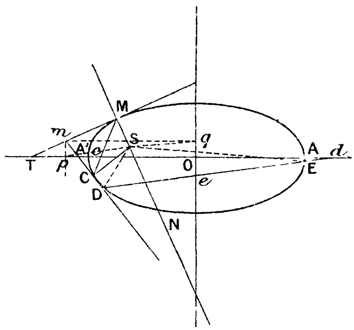
(DESBOVES.)

SOLUTION

Par M. B. CLUZEAU, élève au Collège Stanislas.

Je me propose de déduire ce théorème du suivant, énoncé aussi par Desboves : Si un point décrit une normale à une conique, les pieds des trois autres normales menées de ce point sont les sommets d'un triangle dont les côtés enveloppent une parabole.

Considérons, en effet, une normale fixe MN à une conique à centre et soient C, D, E trois points de la conique, tels que les normales en ces points se coupent sur MN; le pôle m de la



corde MC est sur la tangente MT, la corde MC étant donnée ou son pôle, on peut construire la corde DE. Remarquons pour cela que les coniques circonscrites au quadrangle MCDE déterminent sur AA′ une involution dont AA′ et cd sont deux couples; la considération de l'hyperbole d'Apollonius du faisceau montre que le point O est le point central. On a, par suite,

$$Oc.Od = OA.OA'.$$

Si p désigne la projection de m sur AA', on a

$$Op.Oc = \overline{OA}^2,$$

par suite

$$Od = -Op.$$

On aurait de même

$$Oe = -Oq;$$

la droite ED est donc la symétrique par rapport à O de la droite qui joint les projections sur les axes du point m. Lorsque le point de concours des normales en D et E décrit MN, MC tourne autour de M, m décrit MT et pq enveloppe une parabole tangente aux axes; la droite DE enveloppe donc la parabole symétrique par rapport à O.

Cette démonstration est due à M. E. Duporcq (*Prem. princ. de Géom. moderne*).

Ceci posé, pour obtenir le degré du lieu de S, il suffit évidemment de compter combien de points de ce lieu se trouvent sur une droite quelconque, par exemple sur une normale MN à C_2. A cette normale correspond une parabole π, enveloppe des cordes telles que les normales à C_2 en leurs extrémités se coupent sur MN; donc, pour qu'une corde de la conique C_2 fournisse un point du lieu situé sur MN, il faut d'abord que cette corde soit tangente à la polaire réciproque de la courbe donnée par rapport à la conique; ensuite, ou qu'elle passe par le point M, ou qu'elle soit tangente à la parabole π, qui correspond à MN. Il y a n cordes de la conique satisfaisant à la première et à la deuxième condition; il y en a $2n$ satisfaisant à la première et à la troisième, donc, en général, $3n$ points sur MN. Le degré de la courbe lieu de S est donc, en général, triple de celui du lieu C_n donné.

549.

(1860, p. 405.)

NOTE

Par M. A. Droz-Farny.

Cette question a été résolue dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. III p. 23; 1864) par M. Cremona.

Cette question 549 fait, en effet, double emploi avec les questions 563 et 564 de M. Faure démontrées par M. Cremona.

563. La courbe du troisième ordre qui passe par les six sommets d'un quadrilatère complet et par les pieds des hauteurs du triangle formé par ses diagonales passe par les points circulaires à l'infini.

564. Cette courbe est le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère et rappelle le cercle dans la théorie des courbes du troisième ordre.

1685.

(1894, p. 59*.)

Il existe une infinité de triangles T *qui sont à la fois circonscrits à une ellipse* E *et inscrits à un cercle concentrique* C, *le rayon de* C *étant égal à la demi-somme* (*ou à la demi-différence*) *des axes de* E.

La somme des carrés des côtés de tous les triangles T *est constante.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

Les invariants des deux coniques

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad S' = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

sont (*voir* Salmon, *Sections coniques*)

$$\Delta = \frac{-1}{a^2 b^2}, \qquad \Theta = \frac{-R^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 b^2},$$

$$\Delta' = -R^2, \qquad \Theta' = \frac{-R^2(a^2 + b^2) - a^2 b^2}{a^2 b^2}.$$

La condition bien connue $\Theta^2 - 4\Delta\Theta' = 0$ donne

$$R^2 = (a \pm b)^2,$$

de sorte que l'énoncé doit être complété par les mots placés dans une parenthèse; les deux cercles obtenus sont les cercles de Chasles de l'ellipse E.

La seconde partie de l'énoncé peut être précisée comme il suit : En supposant, par exemple,

$$R = a + b,$$

on a, H étant l'orthocentre du triangle ABC,

$$OH = a - b,$$

de sorte que, *le triangle* ABC *restant circonscrit à l'ellipse* E *et inscrit à l'un de ses cercles de Chasles, l'orthocentre* H *décrit le second cercle de Chasles de cette ellipse;* si l'on écrit

$$a = \frac{R}{2} + \frac{OH}{2}, \qquad b = \frac{R}{2} - \frac{OH}{2},$$

on peut dire que le cercle des neuf points du triangle ABC reste tangent aux deux cercles principaux de l'ellipse E; enfin un dernier énoncé est celui-ci : Le centre des moyennes distances G du triangle ABC décrit un cercle de centre O et de rayon $\frac{a-b}{3}$. Sous cette forme, le théorème est un cas très particulier du théorème suivant qui est connu : Si un polygone de n côtés reste circonscrit à une conique S et inscrit à une conique S′, le centre des moyennes distances des sommets décrit une conique homothétique à la conique circonscrite S′. (*Bulletin de la Société Mathématique,* t. XXVI, p. 98, Note de M. R. Bricard. Dans le Tome XVII du même recueil, page 71, M. G. Humbert a indiqué dans quelles conditions le centre des moyennes distances reste fixe; les triangles circonscrits à une conique Σ et inscrits à l'un de ses cercles directeurs donnent un exemple de ce cas; l'orthocentre est, en effet, au second foyer. On peut observer que les triangles de la question actuelle sont égaux à ceux qui viennent d'être mentionnés, les quantités $a + b$ et $a - b$ de la question actuelle étant les quantités $2a$ et $2c$ relatives à la conique Σ.)

J'indique en terminant la propriété suivante, que j'ai rencontrée dans des recherches non encore publiées :

En désignant par M, N, P *les milieux des côtés du triangle* ABC, *par* α, β, γ *les pieds des hauteurs, et par* R, S, T *les points de contact de l'ellipse avec les côtés du triangle, on a*

$$MR = M\alpha, \qquad NS = N\beta, \qquad PT = P\gamma;$$

il en résulte que les normales à l'ellipse aux points R, S, T sont concourantes, ou encore que trois des normales menées du point H à l'ellipse sont les hauteurs du triangle ABC.

1783.

(1897, p. 484.)

Étant donnés deux tétraèdres dont les sommets sont les huit points communs à trois quadriques, on leur circonscrit deux quadriques tangentes entre elles en tous les points d'une courbe plane : enveloppe du plan de cette courbe. (E. DUPORCQ.)

SOLUTION

Par M. B. CLUZEAU, élève au Collège Stanislas.

Hesse a donné le théorème suivant : Lorsque deux tétraèdres sont conjugués à une même quadrique, leurs huit sommets sont les points communs aux quadriques d'un réseau ponctuel, et réciproquement.

Il résulte de la réciproque que deux quadriques respectivement circonscrites aux tétraèdres donnés sont harmoniquement circonscrites à une quadrique fixe, ainsi que les quadriques du faisceau qu'elles déterminent; si, en particulier, les deux quadriques considérées sont tangentes entre elles en tous les points d'une conique, le plan de celle-ci est tangent à la quadrique fixe. Donc :

L'enveloppe demandée est la quadrique conjuguée aux deux tétraèdres donnés.

1812.

(1899, p. 100.)

Les plans osculateurs à une cubique en trois de ses points a, b et c, coupent le plan abc suivant des droites concourantes. (E. DUPORCQ.)

SOLUTION

Par M. A. DROZ-FARNY.

La proposition donnée par M. Duporcq est bien connue; *voir*, par exemple :

CHASLES, *Comptes rendus*, tome XLV, page 189; 1857.

SCHROETER, *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung*, page 229.

1813.

(1899, p. 100.)

Soient a_1, a_2, a_3 *et* a_4 *les pieds de quatre normales concordantes menées à une conique* C :

1° *Dans chacun des triangles* T, *tels que* a_2, a_3, a_4, *on peut inscrire une conique* Λ *ayant les mêmes axes de symétrie que* C;

2° *Les quatre coniques* Λ_1, Λ_2, Λ_3 et Λ_4 *sont circonscrites à un même quadrilatère;*

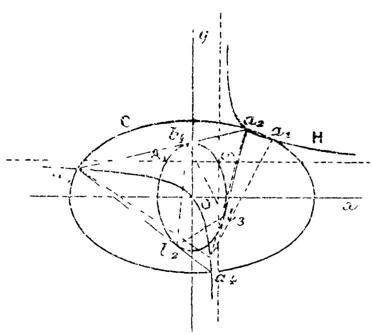
3° *Les cercles circonscrits aux triangles admettant pour sommets des points de contact des coniques* Λ *avec les côtés du triangle* T *passent par un même point.*

(E. DUPORCQ.)

SOLUTION.

Par M. A. VACQUANT.

1° Soient Ox, Oy les axes de C; je considère l'hyperbole d'Apollonius a_1, a_2, a_3, a_4 ou H. Les deux triangles a_2, a_3, a_4 et Ox_∞, y_∞ sont inscrits dans H; donc ils sont conjugués par



rapport à une conique Γ qui a dès lors pour axe Ox, Oy. Soit Λ_1 la polaire réciproque de C par rapport à Γ; la conique Λ_1 a pour axes Ox, Oy et est inscrite dans le triangle $a_2 a_3 a_4$.

2° Les quatre coniques Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4 sont circonscrites à un même quadrilatère. En effet, le centre ω de l'hyperbole d'Apollonius H appartient à ces quatre coniques coaxiales (propriété connue rappelée dans la Note précédente, II). Les symétriques ω_1, ω_2 et ω' de ω par rapport aux axes Ox, Oy et au point O appartiennent aussi à ces quatre coniques qui sont, par suite, circonscrites à un même quadrilatère $\omega\omega_1\omega'\omega_2$.

3° Soient b_2, b_3, b_4 les points de contact des côtés du triangle $a_2a_3a_4$ avec la conique A_1; l'hyperbole d'Apollonius H est harmoniquement circonscrite à la conique A_1; car le triangle $Ox_\infty y_\infty$ est inscrit dans H et conjugué à A_1; alors la polaire b_2b_3 de a_4 par rapport à A_1, coupe H et A_1, en des points conjugués harmoniques; on voit ainsi que le triangle $b_2b_3b_4$ est conjugué à H; donc (théorème de Faure), le cercle circonscrit à ce triangle passe par le centre ω de H.

1815.

(1899, p. 148.)

Démontrer que l'expression

$$1 - a^2 + a^4 - \ldots + a^{4p} = \frac{a^{4p+2}+1}{a^2+1}$$

peut toujours être mise sous la forme de la somme de deux carrés, et que, si a est un nombre entier, les deux carrés en question sont aussi entiers. (C.-A. Laisant.)

SOLUTION

Par M. Giacomo Candido, à Pise.

Indiquons par x^2 et y^2 les deux carrés dans lesquels on doit démontrer qu'on peut décomposer l'expression donnée. Alors on aura

$$(1+a^2)(x^2+y^2) = a^{4p+2}+1.$$

On peut écrire cette équation des deux manières suivantes :

$$\text{(I)} \qquad (ax-y)^2+(x+ay)^2 = a^{4p+2}+1,$$

$$\text{(II)} \qquad (x+ay)^2+(ax+y)^2 = a^{4p+2}+1.$$

De la relation (I), par identification, on déduit les deux systèmes :

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} x + ay &= a^{2p+1}, \\ ax - y &= 1, \end{aligned}\right.$$

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} x + ay &= 1, \\ ax - y &= a^{2p+1}, \end{aligned}\right.$$

qui donnent respectivement

$$(1')\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a^{2p-1}+a}{a^2+1}, \\ y = \dfrac{a^{2p+2}-1}{a^2+1}, \end{cases}$$

$$(2')\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a^{2p+2}+1}{a^2+1}, \\ y = \dfrac{a^{2p+1}-a}{a^2+1}. \end{cases}$$

Chacun de ces systèmes de valeurs satisfait à la première partie de la question proposée. En outre, on voit facilement qu'en distinguant les deux cas de p pair et de p impair, on trouve que toujours une des valeurs (1′) ou (2′) est une expression entière, et précisément les valeurs (1′) pour p pair et les valeurs (2′) pour p impair sont entières; c'est ce qui démontre la seconde partie de la question proposée.

On pouvait commencer la solution de la question par l'équation (II), mais on serait retombé sur les résultats déjà trouvés.

Note. — Si l'on pose

$$x = \frac{a^{2p+2}+(-1)^p}{a^2+1}, \qquad y = a\,\frac{a^{2p}-(-1)^p}{a^2+1},$$

on vérifie aisément que

$$x^2+y^2 = \frac{a^{4p+2}+1}{a^2+1}.$$

Si a est un nombre entier, il en est de même de x et de y.

Corollaire. — Tous les nombres

$$9901, \quad 99009901, \quad 990099009901, \quad \ldots,$$

sont décomposables en une somme de deux carrés.

(C.-A. L.)