NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. RETALI

École normale supérieure (concours de 1900). Mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 224-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__224_0>

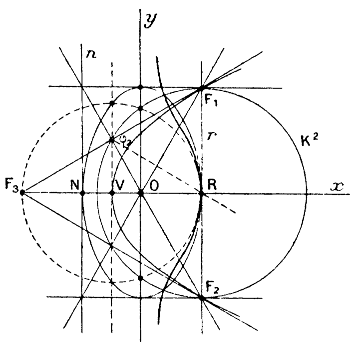
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (CONCOURS DE 1900).
MATHÉMATIQUES.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE PAR M. V. RETALI (¹).

L'équation de la courbe écrite sous la forme

$$(1) \qquad x(x+iy)(x-iy) = a^3 z^3$$

montre que la cubique a trois de ses points d'inflexion sur la droite à l'infini $x = 0$, dont deux tombent en les points circulaires et l'autre est le point à l'infini y^∞ de l'axe $x = 0$. Les droites isotropes issues de l'origine O et



l'axe des y sont les tangentes stationnaires correspondantes, autrement dit : le point O est le foyer triple réel de la cubique, et $x = 0$ en est l'asymptote réel.

Les centres des cercles d'inversion de la cubique sont ses points de contact avec les tangentes parallèles à l'asymptote, mais y^∞ étant un point d'inflexion, l'un de ces quatre centres et y^∞ et les trois autres sont les points

(¹) *Voir* l'énoncé, **1900**, p. 430.

où la cubique est coupée par la polaire harmonique du point d'inflexion y^∞, c'est-à-dire par l'axe de symétrie $y=0$. Si ε est une racine complexe de $+1$ les abscisses des centres d'inversion propres, que nous appelons R, P, Q, sont respectivement a, $a\varepsilon$, $a\varepsilon^2$.

Les coniques polaires des quatre centres d'inversion y^∞, R, Q, P sont les polaires réciproques des quatre coniques focales par rapport aux cercles d'inversion correspondants : la première se décompose en l'asymptote d'inflexion $x=0$ et en la polaire harmonique de y^∞, qui est $y=0$; la conique polaire de R est l'ellipse

$$3x^2+y^2=3a^2, \tag{2}$$

que nous appellerons C^2; les deux autres, savoir les coniques polaires de Q et P, sont des ellipses imaginaires de la deuxième espèce C'^2, C''^2 dont on obtient les équations en posant celle de $C^2 a\varepsilon$ et $a\varepsilon^2$ à la place de a.

Le cercle réel d'inversion ayant son centre en R, que nous appellerons K^2, coupe la conique polaire correspandante C^2 en les points de contact des tangentes menées à la cubique de son point R : en prenant R pour pôle, les équations polaires de la cubique et de C^2

$$\rho^3\cos\theta+a\rho^2(1+2\cos^2\theta)+3a^2\rho\cos\theta=0,$$
$$a\rho^2(1+2\cos^2\theta)+6a^2\rho\cos\theta=0$$

donnent $\rho=a\sqrt{3}$, qui est le rayon de K^2. Des quatre cercles d'inversion de la cubique, l'un (celui dont y^∞ est le centre) se décompose donc en l'axe Ox et la droite à l'infini; un est réel, a son centre en R et le rayon $a\sqrt{3}$; les deux autres K_1^2, K_2^2 sont imaginaires de la deuxième espèce, ont respectivement les centres Q et P et les rayons $a\varepsilon\sqrt{3}$, $a\varepsilon^2\sqrt{3}$.

Considérons maintenant le cercle K^2 et la conique polaire correspondante C^2; sur chaque rayon issu de R les deux autres points α_1, α_2 de la cubique sont réciproques par rapport au cercle et conjugués harmoniques par rapport aux points R et A de C^2. La cubique est dans la courbe qui correspond à l'ellipse C^2 par la transformation plane double quadratique spéciale dont R est le pôle, et K^2 est à la fois conique double et conique limite.

Si (x, y) sont les coordonnées rectangulaires de A, en prenant R pour origine et posant $a\sqrt{3} = 2$, les formules de la transformation double sont

$$(3) \qquad x : y : 1 = 2r^2\xi : 2r^2\eta : \xi^2 + \eta^2 + r^2,$$

$$(3\ bis) \qquad \xi : \eta : 1 = rx : ry : r \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

A une droite $ux + vy + 1 = 0$ décrite en le *plan double* par le point $A(x, y)$ correspond dans le *plan simple* le cercle

$$2r^2(u\xi + v\eta) + \xi^2 - \eta^2 + r^2 = 0$$

qui coupe orthogonalement le cercle d'inversion K^2 sur la droite. Les coniques dégénérées du plan simple correspondent aux droites issues de R (les mêmes droites avec la droite à l'infini) et aux droites tangentes à K^2 (les points de contact considérés comme cercles-points). Les droites du plan simple se transforment en des coniques bitangentes à K^2 menées par R; les courbes du plan double de l'ordre n ayant un point k^{uple} en R donnent des courbes anallagmatiques de l'ordre $2n - k$ avec un point $(n - k)^{\text{uple}}$ en chacun des points circulaires à l'infini. En particulier une conique C^2 du plan double est transformée en une quartique bicirculaire ou bien en une cubique circulaire, selon que C^2 passe ou ne passe pas par R. Les quatre centres d'inversion de la quartique ou de la cubique sont, outre K^2, les trois autres coupant orthogonalement K^2 sur les côtés du triangle conjugué commun à K^2 et C^2 ([1]).

La cubique (1) est l'enveloppe des cercles coupant orthogonalement le cercle K^2 sur les tangentes de l'ellipse (2) ou bien, ce qui est la même chose, l'enveloppe des cercles orthogonaux à K^2 et dont les centres tombent sur la polaire réciproque de C^2 par rapport à K^2. Analoguement pour les deux autres couples de coniques (imaginaires de la deuxième espèce) K_1^2, C'^2 et K_2^2, C''^2. Ces trois polaires réciproques (coniques focales, différentes) sont des paraboles avec le foyer en O; l'équation de celle réelle est

$$y^2 = 2ax + 3a^2,$$

les deux autres sont imaginaires de deuxième espèce, etc.

Si A est un point arbitraire de C^2 et a la tangente correspondante, le cercle orthogonal à K^2 correspondant à a est bitangent à la cubique en les deux points α_1, α_2 : les lieux des centres des cercles bitangents à la cubique sont donc l'axe Ox et les trois paraboles focales.

Par les formules (3) ou par la Géométrie élémentaire ([2]) on voit aisément que le milieu μ du segment $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ est réciproque de A par rapport au cercle d'inversion K^2, donc le lieu des milieux des cordes de contact concourantes en R est la courbe inverse de

---

([1]) Pour l'étude élémentaire de cette transformation double spéciale, dont M. Darboux, Beltrami, M. Killing et autres ont fait des applications importantes, on peut consulter les §§ 1-8 de mon Mémoire *Sur le double contact, etc.* (*Soc. royale des Sciences de Liége*, 2e série, t. XVIII).

([2]) Les deux points $\alpha_1\alpha_2$ étant réciproques par rapport au cercle K^2 et conjugués harmoniques par rapport aux points OA, nous avons

$$O\alpha_1 - O\alpha_2 = 2O\mu, \qquad O\alpha_1\, O\alpha_2 = r^2, \qquad \frac{2}{OA} = \frac{1}{O\alpha_1} + \frac{1}{O\alpha_2} = \frac{2O\mu}{r^2}$$

et par suite

$$O\mu\, OA = r^2.$$

l'ellipse C^2 par rapport à K^2, ou, si l'on veut, la podaire par rapport à R de la parabole focale réelle. Elle est donc une cubique circulaire rationnelle (conchoïde slusienne) avec le point double (isolé) en R, asymptote à l'axe du segment $\overline{OR}$, ... Le lieu des milieux des cordes de contact relatives au pôle y^∞ est évidemment l'axe Ox.

Considérons maintenant deux cordes de contact $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$, $\overline{\beta_1 \beta_2}$ qui concourent en le même centre d'inversion, par exemple en R, et soient A et B les points (autres que R) où les droites $|\alpha_1 \alpha_2|$, $|\beta_1 \beta_2|$ coupent l'ellipse C^2 : les quatre points de contact α_1, α_2, β_1, β_2 tombent évidemment sur le cercle correspondant à la droite $|AB|$ qui coupe orthogonalement le cercle d'inversion K_2 sur la droite $|AB|$.

Si I, J, X sont trois points collinéaires d'une cubique et 1, 2, 3, 4 les intersections de la courbe avec une conique menée par IJ, les trois couples de côtés opposés du quadrangle complet (1, 2, 3, 4) coupent à nouveau la cubique en trois couples de points alignés avec X (corollaire du théorème de Carnot); en faisant coïncider le point 1 avec 2 et 3 avec 4 et prenant pour IJ les points circulaires à l'infini, nous avons le théorème :

Si un cercle est bitangent à une cubique circulaire, la droite qui unit les tangentiels des points de contact est parallèle à l'asymptote réel.

Cela posé, les deux points de contact avec la cubique d'un cercle bitangent étant alignés avec un centre d'inversion, par un point arbitraire M_0 de la courbe passent quatre cercles bitangents, et si les droites $|M_0 R|$, $|M_0 y^\infty|$ recoupent la cubique respectivement aux points M_2 et M_1, les cordes de contact des deux cercles bitangents réels qui passent par M_0 sont $\overline{M_0M_2}$ et $\overline{M_0M_1}$. Les tangentiels de M_0 et M_2 étant placés sur une parallèle à l'asymptote sont symétriques par rapport à l'axe Ox, mais le point symétrique du tangentiel de M_0 est le tangentiel de M_1, donc M_1 et M_2 ont même tangentiel. Les droites $|M_0P|$, $|M_0Q|$ imaginaires conjuguées vont recouper la cubique aux points M_3, M_4 et les cordes de contact des deux cercles imaginaires de la deuxième espèce qui passent par M_0 sont $|M_0M_3|$ et M_0M_4.

Par la substitution linéaire

$$x = \tfrac{1}{2}(x'+y'), \qquad y = \tfrac{1}{2}(x'-y')\sqrt{3},$$

l'équation de la cubique est ramenée, supprimant les accents, à la forme canonique

$$x^3 + y^3 - 2a^3z^3 = 0,$$

l'invariant S est nul et, par suite, la cubique est équianharmonique, sa hessienne se réduit à $xyz = 0$ et les coordonnées du tangentiel (x', y') de (x, y) sont

$$x' : y' : 1 = x(y^3 + 2a^3) : -y(x^3 + 2a^3) : (x^3 - y^3);$$

si (x_0, y_0) sont les coordonnées de M_0, celles du tangentiel de $M_1(x_0, -y_0)$ seront

$$(4) \quad x' : y' : 1 = x_0(2a^3 - y_0^3) : y_0(2a^3 + x_0^3) : (x_0^3 - y_0^3)$$

et ne changent pas si l'on pose $a\varepsilon$ ou $a\varepsilon^2$ au lieu de a; les tangentiels des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 coïncident donc en le point (4). La cubique est aussi le lieu des points de contact des tangentes menées de M_0 au faisceau de coniques (M_1, M_2, M_3, M_4), ...

La propriété que la cubique soit équianharmonique résulte aussi de ce que le faisceau des quatre tangentes issues du point d'inflexion y^∞ coupe l'axe Ox aux quatre points O, R, P, Q formant un groupe équianharmonique. Des trois côtés du trilatère sizygétique formant la hessienne, l'un est, comme nous l'avons déjà vu, la droite à l'infini et les deux autres sont les diagonales du rectangle circonscrit à l'ellipse C^2; les coordonnées rectangulaires des six autres points d'inflexion sont donc

$$x = \frac{a}{2}\theta\sqrt[3]{2}, \qquad y = \pm\frac{r}{2}\theta\sqrt[3]{2},$$

où θ est une racine cubique de $+1$.

Déterminons maintenant les foyers de la cubique. Nous avons déjà vu que l'origine O est un foyer triple réel (foyer nonuple), ce que l'on pouvait aussi déduire de ce que O est le foyer des paraboles focales; les quatre foyers placés sur le même cercle d'inversion sont les intersections de ce cercle avec la parabole focale correspondante ou, ce qui est la même chose, les points de contact du cercle d'inversion avec les tangentes qu'il a en commun avec la conique polaire de son centre. En dénotant par $V\left(\overline{OV} = -\frac{a}{2}\right)$ le sommet de la parabole focale réelle P^2, par N l'autre sommet de C^2 sur le petit axe $(\overline{ON} = -a)$, par r et n les tangentes à C^2 en R et N, les cordes réelles communes à K^2 et P^2 sont r et n. Deux des quatre foyers placés sur K^2 sont les extrémités du diamètre r de K^2, que nous appellerons F_1, F_2, et les deux autres, imaginaires conjugués, sont les intersections de la tangente n à C^2 avec le cercle-point O. Si F_3 est le point symétrique de O par rapport à $N(\overline{OF_3} = -2a)$, comme F_3 et O sont les antipoints des deux foyers imaginaires placés sur K^2, les quatre foyers sur l'axe Ox sont O, F et les deux imaginaires conjugués où l'axe est coupé par le cercle-point F_1. Nous pouvons en conclure que les trois foyers simples réels sont les sommets du triangle équilatère

$F_1F_2F_3$ (décrit sur le diamètre F_1F_2 du cercle d'inversion réel) dont le barycentre O est le foyer nonuple; les six foyers simples imaginaires sont marqués par les cercles-points F_1, F_2, F_3, sur les médianes; les six foyers triples imaginaires sont marqués par le cercle-point O sur les côtés du triangle symétrique de $F_1F_2F_3$ par rapport à O.

Le cercle décrit sur $\overline{F_3R}$ comme diamètre, inverse de l'asymptote par rapport au cercle K^2, a au point R un contact quartiponctuel avec la cubique et rencontre K^2 aux deux foyers réels de C^2. Les deux points imaginaires conjugués Q, P de la cubique sont marqués sur l'axe Ox par le milieu φ_2 du segment $\overline{F_1F_3}$ considéré comme cercle-point et, comme l'angle $R\varphi_2F_2$ est $\frac{\pi}{6}$, on retrouve autrement que le groupe (ROPQ) et par suite aussi la cubique sont équianharmoniques [*cf.* LAISANT, *Recueil de problèmes* (*Géom. analyt.*, n° 5)].