NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de novembre 1900. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 214-223

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__214_1>

CERTIFICATS D'ETUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1900. — COMPOSITIONS.

Rennes.

Analyse.

Épreuve écrite. — 1° *Vérifier que les tangentes à la courbe représentée par les équations*

$$(1) \qquad \begin{cases} x = t^2 f''(t) - 2t f'(t) + 2 f(t), \\ y = f''(t), \\ z = t f''(t) - f'(t), \end{cases}$$

où t désigne un paramètre variable, sont parallèles aux génératrices d'un cône du second degré, et montrer que toute courbe dont les tangentes sont parallèles aux génératrices de ce cône peut être représentée par les équations (1).

2° *Former l'équation aux dérivées partielles du premier ordre des surfaces enveloppes des plans osculateurs des courbes* (1) *quand on y regarde* $f(t)$ *comme une fonction arbitraire.*

3° *Intégrer l'équation trouvée*

$$4pq - 1 = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale double*

$$\iint \frac{dx\,dy}{(x+y)^3}$$

étendue à l'aire du triangle formé par les trois droites

$$x - 1 = 0, \qquad y - 1 = 0, \qquad x + y - 3 = 0:$$

1° *Par la méthode directe;*

2° *En effectuant d'abord le changement de variables défini par les formules*

$$X - \frac{x-1}{x+y}, \qquad Y = \frac{y-1}{x+y}.$$

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On donne un centre d'action* O, *une droite* AB *et, dans le plan* ABO, *la famille de circonférences dont chacune a, avec* O, *la droite* AB *pour axe radical.*

Montrer qu'il existe une force répulsive émanant de O *et dépendant de la distance et de l'angle polaire qui peut, pour des conditions initiales convenables, faire mouvoir sur ces diverses circonférences des mobiles de même masse.*

Considérant celle de ces circonférences qui est vue de O *sous l'angle droit, on peut donner à la force correspondante la forme* $\frac{\mu}{r^2}$, *où* μ *est une fonction de l'angle polaire* θ; *trouver les autres mouvements que cette force peut faire décrire et, en particulier, ceux qui sont circulaires.*

Étudier dans les deux cas les mouvements qui se *produisent et en spécifier les conditions initiales, les mobiles étant supposés placés sur la droite qui projette* O *sur* AB.

La force considérée étant de la forme $r^{-2}\varphi(\theta)$ étudiée par Jacobi, le problème peut se ramener à des quadratures.

Épreuve pratique. — *Le centre d'une boule homogène pesant* 400^{gr} *est soutenu à* 1^{m} *de distance au-dessous d'un point fixe* O *par un cordon en repos attaché en ce point. On imprime à cette boule, suivant une des horizontales de son centre, une percussion assez forte pour qu'elle s'élève au-dessus de* O, *et pas suffisante pour que le mouvement produit soit révolutif. Dans ces conditions, le cordon se repliera à partir d'une certaine époque* t_1 *et se retendra à une certaine époque postérieure* t_2. *Que doit être l'impulsion initiale pour que toute la force vive possédée par la boule à l'époque* t_2 *soit dépensée uniquement pour tendre le cordon. Calculer les directions du cordon aux époques* t_1, t_2, *et dire en quoi consistera le mouvement succédant à l'époque* t_2.

On reconnait immédiatement que, d'après les conditions de l'énoncé, la tangente à la trajectoire parabolique, à l'époque t_2, doit passer par le point O. La solution du problème se déduit facilement de cette remarque.

Astronomie.

Épreuve écrite. — *La parallaxe annuelle des étoiles.*

Épreuve pratique. — *La latitude géographique de Rennes (Tour Saint-Mélaine) est* $48^{\circ}6'35''$. *Trouver la* *latitude géocentrique et la longueur du rayon terrestre en ce point.*

On prendra pour valeur de l'aplatissement

$$c = \frac{1}{292}$$

et, pour le rayon équatorial,

$$R = 6\,378\,393^{m}.$$

Toulouse.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Série de Laurent.*

II. *Les trois coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z d'un point d'une courbe C, exprimée en fonction d'un paramètre t, vérifient le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = y + z,$$

$$\frac{dy}{dt} = z + x,$$

$$\frac{dz}{dt} = x + y :$$

1° *Déterminer les expressions de ces trois coordonnées en fonction de t;*

2° *Montrer que toutes les courbes C satisfaisant à la question sont des courbes planes unicursales qui sont normales à une famille de surfaces dont on demande l'équation.*

III. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$2z - px + qy + q^2 = 0,$$

où p et q désignent les dérivées partielles de la fonc-

tion inconnue z par rapport aux variables indépendantes x et y.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'ellipsoïde qui, rapporté à trois axes rectangulaires, a pour équation*

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1,$$

et qui passe par le point P, *ayant pour coordonnées*

$$x=\frac{6}{7},\qquad y=\frac{6}{7},\qquad z=\frac{6}{7}.$$

On demande :

1° *De calculer, en ce point* P, *les rayons de courbure principaux ;*

2° *De déterminer la courbe de l'ellipsoïde pour tous les points de laquelle le produit des rayons de courbure principaux a la même valeur qu'au point* P.

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On construit une congruence de droites en menant des droites respectivement perpendiculaires aux plans tangents d'une surface* (Σ) *et l'on suppose que ces droites soient entraînées dans la déformation de la surface* (Σ) :

1° *Démontrer que, pour chacune d'elles, le produit des distances de ses points focaux au plan tangent correspondant de* (Σ) *reste invariable ;*

2° *Indiquer comment on doit particulariser la surface* (Σ) *et la construction des droites pour que la congruence de ces dernières soit toujours formée de normales à une même surface.*

II. *On considère une sphère variable* S *dépendant* *de deux paramètres et dont le centre décrit une surface* (Σ) ; *démontrer les propositions suivantes :*

1° *Les droites qui joignent chaque point de l'enveloppe des sphères au point correspondant de* (Σ) *demeurent invariablement liées à cette dernière surface quand on la déforme de toutes les manières possibles, chaque point de* (Σ) *entraînant la sphère dont il est le centre ;*

2° *La droite joignant les deux points de contact de la sphère* S *avec son enveloppe engendre une congruence dont les développables correspondent à deux familles de courbes conjuguées tracées sur la surface* (Σ), *et les tangentes à ces courbes en un point de* (Σ) *sont perpendiculaires aux points focaux de la corde correspondante ;*

3° *Les deux plans tangents à la sphère* S *aux points où elle touche son enveloppe se coupent suivant une droite située dans le plan tangent correspondant de* (Σ). *Les développables de la congruence engendrée par cette droite correspondent à deux familles de courbes conjuguées tracées sur* (Σ) ; *et les tangentes à ses courbes en un point de* (Σ) *vont couper la droite correspondante de la congruence en ses deux points focaux.*

Indiquer la forme que prennent ces propositions lorsque la surface (Σ) *est une sphère.*

Nota. — *On rappelle les formules*

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - r \eta_1, \\[2mm] \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = r \xi_1 - r \xi_1, \\[2mm] \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1, & p \eta_1 - \eta p_1 + \xi q_1 - q \xi_1 = 0. \end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} \delta x = dx + (\xi\, du + \xi_1\, dv) + (q\, du + q_1\, dv) z - (r\, du + r_1\, dv) y, \\ \delta y = dy + (\eta\, du + \eta_1\, dv) + (r\, du + r_1\, dv) x - (p\, du + p_1\, dv) z, \\ \delta z = dz \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + (p\, du + p_1\, dv) y - (q\, du + q_1\, dv) x, \end{cases}$$

ainsi que celles qui s'en déduisent, dans les cas d'un réseau (u, v) *orthogonal, en y faisant*

$$\xi = \mathrm{A}, \qquad \xi_1 = 0,$$
$$\eta = 0, \qquad \eta_1 = \mathrm{C}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'hélicoïde gauche à plan directeur* H, *lieu des points dont les coordonnées rectangulaires* X, Y, Z *sont définies par les équations*

$$\mathrm{X} = u \cos v,$$
$$\mathrm{Y} = u \sin v,$$
$$\mathrm{Z} = a v,$$

dans lesquelles u *et* v *désignent des variables indépendantes et* a *une constante.*

Un trièdre rectangle $\mathrm{M}xyz$ *se meut de manière que, dans chacune de ses positions, l'arête* $\mathrm{M}z$ *soit normale en* M *à la surface* H *et l'arête* $\mathrm{M}x$ *tangente à la courbe* (v) *de* H *qui passe au sommet* M.

Exprimer en fonction de u *et* v *les différentes quantités* $\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, p, q, r, p_1, q_1, r_1$ *qui figurent dans les formules relatives au trièdre mobile considéré.*

Former pour la surface H *et pour chacune des nappes de sa développée l'équation des lignes de courbure et celle qui détermine les rayons de courbure principaux.*

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une tige homogène pesante, de longueur* l, *porte à ses extrémités deux petits anneaux polis qui glissent, l'un sur un axe vertical* AB, *l'autre sur une parabole verticale ayant pour axe* AB.

Trouver la position d'équilibre de la barre.

L'équilibre est-il stable ou instable?

Examiner les deux cas où la parabole tourne sa concavité vers le bas ou vers le haut.

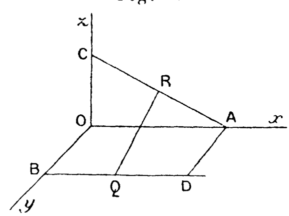
Étudier le mouvement de cette barre.

Calculer les réactions de la parabole et de l'axe.

Cas particulier où $l = p$, p désignant le paramètre de la parabole.

Épreuve pratique. — *Soient trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz. *On trace dans le plan* za (*fig.* 1)

Fig. 1.



une droite AC *et dans le plan* xy *une parallèle* BD *à l'axe* Ox.

Une droite QR *glisse sur* AC *et sur* BD *en restant toujours parallèle au plan* zy.

On demande de déterminer le centre de gravité du solide homogène compris entre les trois plans xy, yz, zx, *et la surface engendrée par la droite mobile* QR.

On donne

$$OA = b, \qquad OB = b, \qquad OC = c.$$

Mécanique appliquée.

Épreuve écrite. — I. *Déformation du rhomboïde articulé plan. Pivots à révolution complète. Représentation analytique de la déformation. Cas particuliers.*

Nota. — *On n'admettra aucun résultat relatif à la déformation du quadrilatère quelconque.*

II. S_1, S_2, S_3, S_4 *sont quatre corps solides articulés comme il suit :*

S_1 *a un axe fixe* Δ_1 *et est relié à* S_2 *par un axe* Δ_2 *perpendiculaire à* S_1 *et le rencontrant en* O_1.

S_4 *a un axe fixe* Δ_4 *et est relié à* S_3 *par un axe* Δ_3 *perpendiculaire à* S_4 *et le rencontrant en* O_4.

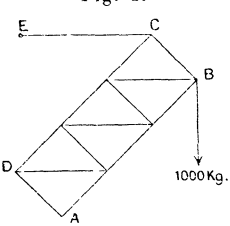
S_2 *et* S_3 *sont reliés par une articulation sphérique de centre* O *tel que* OO_1 *soit perpendiculaire à* Δ_2 *et* OO_4 *perpendiculaire à* Δ_3.

Chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un mouvement de rotation de sens constant de S_1 *autour de* Δ_1 *produise un mouvement de rotation de sens constant de* S_4 *autour de* Δ_4.

Généraliser dans le cas où l'orthogonalité de OO_1 *sur* Δ_2 *et de* OO_4 *sur* Δ_3 *n'existerait plus.*

Épreuve pratique. — *Une poutre articulée droite* ABCD, *formée de triangles rectangles isoscèles, a un point fixe en* A (*fig.* 2). *Elle est articulée en* C *à*

Fig. 2.



une tige CE, *laquelle est articulée en un point fixe* E *choisi de façon que la poutre soit inclinée à* 45° *et que la tige* CE *soit horizontale. Déterminer les réactions et tensions du système sous l'action d'un poids de* 1000^{kg} *attaché en* B *en négligeant le poids propre des barres.*

On construira l'épure à l'échelle de 1^{cm} *par* 100^{kg}.

ASTRONOMIE OU MÉCANIQUE CÉLESTE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Précession des équinoxes; nutation. Définitions; valeurs numériques des arcs et des angles qui interviennent dans la représentation de ces phénomènes.*

Précession annuelle en ascension droite et en déclinaison; formules qui la représentent.

Coordonnées moyennes d'un astre.

Ayant les coordonnées moyennes d'un astre au commencement d'une certaine année, comment trouve-t-on les coordonnées vraies de cet astre à une date quelconque?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une hauteur du bord inférieur du Soleil a été mesurée à Toulouse, dans la matinée, et trouvée égale à*

$$48^\circ 53' 55'',$$

la température étant de 23° *et la pression atmosphérique de* 742^{mm}. *On demande l'heure vraie.*

Données :

Latitude du lieu, $\lambda = 43^\circ 36' 45''$.

Déclinaison du centre du Soleil tirée des éphémérides, $\delta = 18^\circ 16' 36''$.

Demi-diamètre du Soleil $= 15' 51'',5$.

Formule de réfraction

$$R = 60'',6 \frac{H}{760} \frac{1}{1 + \alpha t} \operatorname{tang} z,$$

$\alpha = 0,00366$.