NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GALLIAN

Démonstration du théorème des travaux virtuels

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 20-26

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__20_0>

[R6aα]

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DES TRAVAUX VIRTUELS;

Par M. GALLIAN,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

La démonstration du théorème des travaux virtuels donnée par Lagrange n'est pas entièrement satisfaisante; cependant l'idée première sur laquelle elle repose, idée qui réside dans l'application du principe des moufles, peut, par sa combinaison avec quelques axiomes dont le caractère d'évidence ne me paraît pas sérieusement contestable, conduire à une solution qui me semble rigoureuse et que je vais exposer.

1° Axiome I. — *Des forces étant en équilibre sur un système, l'équilibre n'est pas rompu par l'introduction de liaisons nouvelles.*

Dès lors si des forces sont en équilibre sur un système, que d'autres forces soient aussi en équilibre sur un second système identique au premier quant à la disposition des points et aux liaisons qui existent entre eux, et que, superposant les deux systèmes, on mette les points homologues en coïncidence et qu'on les lie ensuite invariablement chacun à chacun de manière à former un système unique identique aux proposés, l'équilibre ne sera pas altéré.

D'après cela on peut, sans troubler l'équilibre d'un système, introduire de nouvelles forces répondant à la condition qu'elles se feraient équilibre si elles agissaient seules sur le système.

Axiome II. — *Désignant généralement par* M *les points d'un système au repos qui n'est actuellement soumis à l'action d'aucune force, et par* F *des forces qui, si elles étaient appliquées à ces points, communiqueraient au système un mouvement d'après lequel chaque point* M *se déplacerait dans une direction initiale* MM′, *on peut à chaque force* F *en adjoindre une autre f de direction donnée et assez petite pour que l'introduction du groupe* (F, *f*) *produise aussi un mouvement, et que dans ce mouvement la direction initiale* MM″ *de chaque point diffère aussi peu qu'on voudra de la direction* MM′. *Si chaque force f tire précisément dans la direction directement opposée à* MM′ *et est suffisamment petite, les directions* MM′, MM″ *coïncident.*

Axiome III. — *Un système de points au repos et qui n'est actuellement soumis à l'action d'aucune force se mettra en mouvement si tous les points viennent à être tous tirés en même temps suivant les directions initiales d'un système de trajectoires compatibles avec les liaisons.*

2° Ces axiomes posés, soient des points

$$M_1,\quad M_2,\quad \ldots,$$

assujettis à des liaisons, et que je me propose de tirer respectivement dans les directions

$$M_1 A_1,\quad M_2 A_2,\quad \ldots,$$

par des forces

$$F_1,\quad F_2,\quad \ldots,$$

que je suppose avoir une commune mesure Φ contenue m_1 fois dans F_1, m_2 fois dans F_2, etc., les entiers m_1,

m_2, ... étant pairs, ce qu'il est toujours possible d'admettre sans nuire à la généralité.

Au lieu d'appliquer directement à chaque point la force qui lui est destinée, opérons comme il suit : Considérons les points des groupes M_1, M_2, ..., et A_1, A_2, ..., comme des anneaux de rayon nul, ces anneaux étant d'ailleurs fixes pour le second groupe. Concevons alors qu'un fil flexible et inextensible, attaché par un bout à l'anneau A_1, passe alternativement dans les anneaux M_1 et A_1 autant de fois qu'il est nécessaire pour qu'il y ait m_1 brins allant d'un anneau à l'autre, puis qu'il traverse alternativement les anneaux A_2 et M_2, en commençant par A_2, jusqu'à ce qu'il y ait m_2, brins circulant entre A_2 et M_2, et ainsi de suite. Les nombres m_1, m_2, ... étant pairs, et le fil entrant dans chaque couple d'anneaux par l'anneau fixe, c'est aussi par l'anneau fixe qu'il en sortira.

Les diverses portions du fil étant disposées en ligne droite sans tension, appliquons au brin libre, et dans la direction de ce brin, une force égale à Φ. Les points du système sont alors dans les mêmes conditions que s'ils étaient directement tirés par les forces

$$m_1\Phi = F_1, \qquad m_2\Phi = F_2, \qquad \ldots,$$

dans les directions

$$M_1A_1, \quad M_2A_2, \quad \ldots.$$

Le fil étant ainsi tendu, le système qui était au repos reste immobile, ou bien il se met en mouvement, et alors le brin libre s'allonge. Mais ce brin ne s'allongera que s'il peut s'allonger, par conséquent tout système de déplacements des points du système qui correspondrait à un raccourcissement initial du brin libre ne peut se produire.

Ceci posé, soient d'une manière générale :

M un point du système;
$F = m\Phi$ la force qu'on lui destine;
A l'anneau fixe correspondant;
M' une position voisine de M.

Désignant par ω l'angle des segments MA, MM', par δL la variation de longueur du brin libre lorsque chaque point vient en M', et posant $MA = \lambda$, $MM' = \delta s$, on a

$$M'A = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda \cos\omega\, \delta s + \delta s^2},$$

$$\delta L = -\sum m(M'A - MA)$$

$$= -\sum m\left[\lambda\left(1 - \frac{2\lambda\cos\omega\,\delta s - \delta s^2}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \lambda\right],$$

$$\Phi\,\delta L = \sum \frac{1}{2} F \frac{2\lambda\cos\omega\,\delta s - \delta s^2}{\lambda} + \ldots$$

$$+ \frac{1.1.3.5.7\ldots 2n-3}{1.2.3.4.5\ldots n} F \frac{(2\lambda\cos\omega\,\delta s - \delta s^2)^n}{\lambda^{2n-1}} + \ldots.$$

Je pose

$$\delta T = \sum F \cos\omega\, \delta s.$$

Pour des valeurs suffisamment petites de δs, le signe de δL est le même que celui de

$$\sum \frac{1}{2} F \frac{2\lambda\cos\omega\,\delta s - \delta s^2}{\lambda} = \delta T - \sum \frac{1}{2} F \frac{\delta s^2}{\lambda}.$$

Si donc δT est négatif, il en est de même de δL. Par conséquent :

Tout déplacement infiniment petit Δ, pour lequel la somme des travaux des forces serait négative, est interdit au système.

Cette proposition fondamentale établie pour des forces commensurables entre elles s'étend sans difficulté à des forces quelconques. En effet, que les forces engendrent le déplacement Δ. On pourra toujours trouver d'autres forces commensurables entre elles, différant assez peu des proposées pour qu'elles produisent un déplacement et qu'en même temps ce déplacement soit assez voisin de Δ pour que le travail total correspondant soit négatif (axiome II), ce qui est impossible.

3° Lorsque les grandeurs qui entrent dans la composition de δT restent indéterminées, l'expression générale de δT est un infiniment petit d'un certain ordre par rapport aux variations des paramètres indépendants, par exemple d'ordre n. Les grandeurs composantes ayant actuellement des valeurs particulières, soit un déplacement infiniment petit Δ pour lequel l'ordre de δT serait supérieur à n : je dis qu'un tel déplacement est interdit au système.

En effet, que le système effectue le déplacement Δ. Chaque point M se déplace dans une certaine direction MM'; appliquons-lui une force f dans la direction opposée M'M. Si les forces f sont suffisamment petites, le groupe de forces (F, f) engendrera un certain déplacement d'après lequel chaque point M se déplacera dans la même direction MM' (axiome II). Or, pour un tel déplacement le travail total du groupe (F, f) est négatif, car la portion qui provient des forces F est par hypothèse d'ordre au moins égal à $n+1$, tandis que celle qui provient des forces f est au plus d'ordre n et négative, puisque chacun des angles $\widehat{f\text{MM}'}$ est égal à π. Donc il y a réduction à l'absurde.

4° Supposons enfin que, parmi les déplacements infiniment petits compatibles avec les liaisons, il en existe au moins un pour lequel la somme des travaux serait d'ordre n (n conservant la signification indiquée plus haut) et positive : je dis qu'alors il n'y aura pas équilibre.

Soit Δ un tel déplacement défini d'une manière générale par le segment MM', et admettons que le système soit en équilibre. Concevons que les points soient assujettis à des liaisons nouvelles dont l'introduction ne permette que le déplacement Δ : le système S qui en résulte est en équilibre (axiome I). Ceci posé, à chaque force F adjoignons-en deux autres : l'une, — F, égale et opposée à F, l'autre f tirant dans la direction MM'. On pourra toujours donner aux forces f des valeurs telles que le travail du groupe (— F, f) soit négatif, puisque le travail du groupe (— F) est négatif par hypothèse et d'ordre n. Les forces f étant ainsi choisies quant aux intensités, le groupe (— F, f) agissant seul sur le système S y serait en équilibre, puisque le seul déplacement compatible avec les liaisons est interdit par la négativité du travail; donc le groupe (F, — F, f) est aussi en équilibre sur le même système (axiome I). Or, dans ce dernier groupe chaque force F détruit la force directement opposée — F appliquée au même point, de sorte qu'il ne reste que les forces f : or celles-ci ne peuvent pas se faire équilibre (axiome III). Il y a donc réduction à l'absurbe.

5° Conclusion :

Tout système de déplacements infiniment petits correspondant à un travail total négatif ou d'ordre supérieur à n est à rejeter. Donc, si tous les déplacements compatibles avec les liaisons répondent à l'une de ces deux conditions, aucun mouvement n'étant possible, il y a équilibre. Il suffit qu'un seul déplacement compatible ne réponde à aucune des deux conditions pour qu'il n'y ait pas équilibre.

Lorsque les liaisons sont telles qu'à tout système compatible de déplacements infiniment petits ~~en corresponde un autre composé des mêmes éléments, mais dirigés en sens contraire~~, le travail total ne saurait être constamment négatif, et la seule condition à considérer est que ce travail soit d'ordre supérieur à n.