NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST CESÀRO

Sur la détermination des foyers des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__1_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[L¹7a]

SUR LA DÉTERMINATION DES FOYERS DES CONIQUES;

PAR M. ERNEST CESÀRO.

Il y a quelque chose d'hybride, à mon avis, dans les calculs que l'on fait habituellement pour déterminer les foyers d'une conique. C'est que la conception du *foyer*, telle qu'on la doit à Plücker, est essentiellement fondée sur l'imaginaire $\sqrt{-1}$, et que tout effort pour l'expliquer dans le domaine restreint des nombres *réels* doit nécessairement se résoudre en calculs dénués de symétrie et d'élégance. Aussi les simplifications apportées à la recherche des foyers (¹) reposent-elles sur l'introduction du symbole $\sqrt{-1}$ dans un champ dont il n'aurait jamais dû être banni. Pour aller plus loin il suffit de se placer dès le commencement dans le domaine des nombres complexes, en représentant un point *réel* quelconque par son affixe x, auquel on adjoint le nombre conjugué $\bar{x}$. Une conique est alors représentée par une équation quadratique, telle que

$$(1) \qquad a x^2 + b\bar{x}^2 + c + 2f\bar{x} + 2gx + 2hx\bar{x} = 0,$$

(¹) *Voir*, par exemple, une Note de M. E. Goursat dans ce Journal (1887, p. 465).

où l'on doit supposer

$$(2) \qquad b = \bar{a}, \qquad c = \bar{c}, \qquad g = \bar{f}, \qquad h = \bar{h},$$

lorsque la courbe est *réelle*. Le cercle est caractérisé par la condition $a = 0$ (et, par suite, $b = 0$); l'hyperbole équilatère par $h = 0$; une ellipse quelconque, la parabole, une hyperbole quelconque par

$$|a| < |h|, \qquad |a| = |h|, \qquad |a| > |h|,$$

respectivement. Par définition *les foyers sont les sommets d'un quadrilatère circonscrit dont les côtés concourent aux points cycliques*. Deux côtés opposés sont représentés par deux équations de la forme $x =$ const., les deux autres par deux équations telles que $\bar{x} =$ const. Ayant fixé la valeur de x dans l'équation (1), celle-ci fournit deux valeurs coïncidentes pour $\bar{x}$, sous la condition

$$b(ax^2 + 2gx + c) - (hx + f)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad Cx^2 - 2Gx + A = 0,$$

en représentant par A, B, ..., les mineurs complémentaires de a, b, ..., dans le discriminant de la conique

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}.$$

L'équation (3) exprime le contact de la conique avec la droite $x =$ const.; ses racines sont donc les valeurs que x doit avoir sur l'un ou sur l'autre des deux côtés opposés considérés, et, par suite, aux quatre foyers. En agissant de même pour les deux autres côtés, on trouve que les valeurs de la seconde coordonnée en ces mêmes points sont données par l'équation

$$(4) \qquad C\bar{x}^2 - 2F\bar{x} + B = 0.$$

Il faut maintenant remarquer que, en vertu de (2), les équations (3) et (4) ont les coefficients correspondants conjugués entre eux. Il en résulte que les racines d'une équation sont conjuguées de celles de l'autre, de sorte que, en associant chaque racine (3) avec celle des deux racines de (4), qui lui est conjuguée, on obtient *deux* foyers *reels*. Il est d'ailleurs évident que *l'équation* (3) *suffit pour leur détermination;* car, en se donnant les coefficients de l'équation (1), on se donne aussi, en vertu de (2), leurs conjugués. La connaissance des racines de (3) entraîne donc celle de leurs nombres conjugués, et, par suite, celle des foyers réels. Je remarque enfin que, d'après (3) et (4), les coordonnées du centre de la conique sont

$$(5) \qquad x_0 = \frac{G}{C}, \qquad \bar{x}_0 = \frac{F}{C}.$$

Afin de montrer ce qu'il y a de souple et de pénétrant dans l'emploi des nombres complexes, je vais chercher les foyers des coniques inscrites à un triangle, dont je me donne les sommets par leurs affixes x_1, x_2, x_3. Une droite quelconque étant représentée par une équation telle que $ux + v\bar{x} + w = 0$, les nombres u, v, w sont les coordonnées de la droite, et l'équation tangentielle de la conique est

$$(6) \qquad Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée par les coordonnées des côtés du triangle, égales aux mineurs complémentaires des éléments de chaque ligne du déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} x_1 & \bar{x}_1 & 1 \\ x_2 & \bar{x}_2 & 1 \\ x_3 & \bar{x}_3 & 1 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$u_1 = \bar{x}_2 - \bar{x}_3, \quad v_1 = -(x_2 - x_3), \quad w_1 = x_2\bar{x}_3 - x_3\bar{x}_2; \quad \ldots .$$

Il est évident que $\bar{w} = -w$. Les nombres w_1, w_2, w_3 sont donc de pures imaginaires, ainsi que leur somme δ. Comme on a aussi $\bar{v} = -u$, on voit que les nombres μ_1, μ_2, μ_3, définis par les égalités

$$\mu_1\delta = u_1x_0 + v_1\bar{x}_0 + w_1, \quad \ldots,$$

sont *réels*. Ces nombres sont, comme on sait, les coordonnées barycentriques de x_0 par rapport au triangle $x_1x_2x_3$; car ils satisfont aux relations

$$\mu_1x_1 + \mu_2x_2 + \mu_3x_3 = x_0, \quad \mu_1\bar{x}_1 + \mu_2\bar{x}_2 + \mu_3\bar{x}_3 = \bar{x}_0,$$

et

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1.$$

Cela posé, si l'on remplace F et G par leurs valeurs (5) dans l'équation (6), celle-ci devient

$$(A - Cx_0^2)u^2 + (B - C\bar{x}_0^2)v^2 \\ + 2(H - Cx_0\bar{x}_0)uv + C(ux_0 + v\bar{x}_0 + w)^2 = 0.$$

En y regardant comme inconnues $A - Cx_0^2$, $B - C\bar{x}_0^2$, $2(H - Cx_0\bar{x}_0)$, l'équation qui précède, écrite pour les trois côtés, fournit un système de trois équations linéaires dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & v_1^2 & u_1v_1 \\ u_2^2 & v_2^2 & u_2v_2 \\ u_3^2 & v_3^2 & u_3v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)(u_3v_1 - u_1v_3)(u_1v_2 - u_2v_1).$$

Chaque facteur du second membre étant égal à δ, la valeur du déterminant est δ^3. Il en résulte

$$(A + Cx_0^2)\delta = C\begin{vmatrix} \mu_1^2 & u_1v_1 & v_1^2 \\ \mu_2^2 & u_2v_2 & v_2^2 \\ \mu_3^2 & u_3v_3 & v_3^2 \end{vmatrix}.$$

Le dernier déterminant est égal au produit de δ par

$$\alpha = \mu_1^2 v_2 v_3 + \mu_2^2 v_3 v_1 + \mu_3^2 v_1 v_2.$$

Donc

$$A = C(\alpha + x_0^2).$$

Cela suffit pour la détermination des foyers. L'équation (3) devient

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}(x - x_0)^2 = {} & \mu_1^2(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\\ & + \mu_2^2(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)\\ & + \mu_3^2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2);\end{aligned}\right.$$

mais on peut lui donner une autre forme. Je remarque d'abord que, d'après l'identité

$$x_2(x_3 + x_1) - x_3 x_1 + x_3(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 2 x_2 x_3,$$

l'expression

$$\alpha + x_0^2 = \mu_1^2[x_1(x_2 + x_3) - x_2 x_3] + \ldots + 2\mu_2\mu_3 x_2 x_3 + \ldots$$

est le produit de $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ par

$$\begin{aligned}&\mu_1[x_1(x_2 + x_3) - x_2 x_3]\\ &\quad + \mu_2[x_2(x_3 + x_1) - x_3 x_1] + \mu_3[x_3(x_1 + x_2) - x_1 x_2].\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on peut écrire, au lieu de (7),

$$(8)\qquad \mu_1[x^2 - 2 x x_1 + x_1(x_2 + x_3) - x_2 x_3] + \ldots = 0.$$

Pour achever la détermination de la conique il faut encore calculer B et H. Il est évident que $B = C(\beta + \bar{x}_0^2)$, où β, conjugué de α, est donné par la formule

$$\beta = \mu_1^2 u_2 u_3 + \mu_2^2 u_3 u_1 + \mu_3^2 u_1 u_2;$$

puis

$$2(H - C x_0 \bar{x}_0)\delta = - C \begin{vmatrix} \mu_1^2 & u_1^2 & v_1^2 \\ \mu_2^2 & u_2^2 & v_2^2 \\ \mu_3^2 & u_3^2 & v_3^2 \end{vmatrix},$$

d'où

$$H = C(\gamma + x_0 \bar{x}_0),$$

en posant

$$\gamma = -\frac{1}{2}\left[\mu_1^2(u_2v_3+u_3v_2)+\mu_2^2(u_3v_1+u_1v_3)+\mu_3^2(u_1v_2+u_2v_1)\right].$$

On peut maintenant calculer a, b, ..., au moyen des formules connues

$$a\Delta = BC - F^2, \qquad f\Delta = GH - AF, \qquad \ldots,$$

et l'on trouve ainsi comme équation de la conique

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\beta(x-x_0)^2+\alpha(\bar{x}-\bar{x}_0)^2 \\ &\qquad -2\gamma(x-x_0)(\bar{x}-\bar{x}_0)+\alpha\beta-\gamma^2=0. \end{aligned}\right.$$

L'aire totale de la conique (1) est

$$\frac{\pi}{2}\Delta:(h^2-ab)^{\frac{3}{2}}.$$

Dans le cas actuel Δ se réduit à $(\gamma^2-\alpha\beta)^2$, et l'expression qui précède devient

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\gamma^2-\alpha\beta}.$$

Il convient d'introduire ici les nombres $m_1 = 1-2\mu_1$, ..., inversement proportionnels aux coordonnées barycentriques du pôle d'homologie de la conique, par rapport au triangle considéré. Un calcul facile donne $m_1 m_2 m_3 \delta^2$ comme valeur de $4(\alpha\beta-\gamma^2)$. Il en résulte que l'aire de la conique (9) est proportionnelle au produit des nombres m_1, m_2, m_3, dont la somme est 1. Elle atteint donc sa plus grande valeur pour $\mu_1=\mu_2=\mu_3$, c'est-à-dire lorsque le centre de la conique est le barycentre du triangle. Dans ce cas l'équation (8) devient

$$3x^2-2x(x_1+x_2+x_3)+(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)=0.$$

On voit que le premier membre est la dérivée de $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. On retrouve ainsi ce cas particulier d'un beau théorème de M. Van den Berg (1) : *les zéros de la dérivée d'un polynome du troisième degré sont les foyers de la plus grande ellipse inscrite dans le triangle formé par les zéros du polynome.* Plus généralement, si l'on introduit les nombres m dans l'équation (8), celle-ci devient

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} & m_1(x-x_2)(x-x_3)+m_2(x-x_3)(x-x_1)\\ &\qquad\qquad +m_3(x-x_1)(x-x_2)=0. \end{aligned}\right.$$

Donc *les zéros et les infinis de la dérivée de la fonction* $(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}(x-x_3)^{m_3}$, *qui ne coïncident pas avec les zéros ou les infinis de la fonction, sont les foyers d'une conique inscrite au triangle formé par ces derniers points, admettant comme pôle d'homologie le point dont les coordonnées barycentriques sont inversement proportionnelles aux exposants.*

Par l'emploi des formules (5) on a exclu le cas des paraboles; mais il est facile de le faire rentrer dans le cas général en supposant que le centre s'éloigne à l'infini. Il suffit d'écrire $m_1+m_2+m_3=0$. C'est l'équation barycentrique de la droite à l'infini, exprimant, dans le cas actuel, que le pôle d'homologie appartient à l'ellipse de Steiner. Si l'on a égard à l'identité

$$(x-x_2)(x-x_3)=(x-x_1-x_2-x_3)x+xx_1+x_2x_3,$$

on voit que l'équation (10) devient

$$m_1(xx_1+x_2x_3)+m_2(xx_2+x_3x_1)+m_3(xx_3+x_1x_2)=0$$

Celle ci exprime (2) que le rapport anharmonique des points x, x_1, x_2, x_3 est *réel*, et, partant, que les

---

(1) *Nieuw Archief voor Wiskunde*, t. XV, p. 140.

(2) *Voir*, par exemple, *Analisi algebrica*, p. 297.

foyers des paraboles inscrites sont situés sur la circonférence circonscrite. En particulier, lorsque x est le conjugué harmonique d'un sommet par rapport aux deux autres, on sait ([1]) qu'il est un zéro de l'évectant du polynome $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Dans ce cas, deux des nombres m devant être égaux entre eux, il s'ensuit que la parabole considérée *touche un des côtés en son milieu*, et que la médiane correspondante à ce côté est un diamètre. Donc *les zéros de l'évectant d'un polynome du troisième degré sont les foyers des trois paraboles inscrites au triangle des zéros du polynome, ayant les axes parallèles aux médianes de ce triangle.*

Je remarque enfin, dans le cas général, que, ε et η étant les affixes des foyers, le premier membre de l'équation (10) est identiquement égal à $(x - \varepsilon)(x - \eta)$, d'où il suit, en prenant successivement $x = x_1, x_2, x_3$,

$$m_1 = \frac{(x_1 - \varepsilon)(x_1 - \eta)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, \qquad \cdots\cdot$$

Il en résulte (les nombres m étant *réels*) que les angles $\varepsilon x_1 x_2$, $\varepsilon x_2 x_3$, $\varepsilon x_3 x_1$ sont respectivement égaux aux angles $x_3 x_1 \eta$, $x_1 x_2 \eta$, $x_2 x_3 \eta$. C'est ce qu'on exprime en disant, comme on sait, que les points ε et η sont *conjugués isogonaux*. Cela posé, si ε_1, ε_2, ε_3 sont les valeurs des rapports

$$\frac{x - x_1}{\overline{x} - \overline{x}_1}, \quad \frac{x - x_2}{\overline{x} - \overline{x}_2}, \quad \frac{x - x_3}{\overline{x} - \overline{x}_3}$$

au point ε, on a, en passant de l'équation (10) à sa conjuguée,

$$m_1 \varepsilon_1 (x - x_2)(x - x_3) \\ + m_2 \varepsilon_2 (x - x_3)(x - x_1) + m_3 \varepsilon_3 (x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

([1]) BELTRAMI, *Ricerche sulla Geometria delle forme binarie cubiche*. § 13.

pour $x = \varepsilon$. Il s'ensuit

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{m_1}(\varepsilon - x_1) = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{m_2}(\varepsilon - x_2) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{m_3}(\varepsilon - x_3)$$
$$= \varepsilon_1(x_2 - x_3) + \varepsilon_2(x_3 - x_1) + \varepsilon_3(x_1 - x_2);$$

puis, en remplaçant m_1, m_2, m_3 par leurs valeurs dans la relation

$$\varepsilon\eta = m_1 x_2 x_3 + m_2 x_3 x_1 + m_3 x_1 x_2,$$

on trouve l'autre foyer

$$\eta = \frac{\varepsilon_1 x_1(x_2 - x_3) + \varepsilon_2 x_2(x_3 - x_1) + \varepsilon_3 x_3(x_1 - x_2)}{\varepsilon_1(x_2 - x_3) + \varepsilon_2(x_3 - x_1) + \varepsilon_3(x_1 - x_2)}.$$

On déduit de cette formule la valeur du rapport anharmonique

$$(\eta x_1 x_2 x_3) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}.$$

En particulier, si ε_1, ε_2, ε_3 sont proportionnels aux racines cubiques de l'unité, ce rapport devient égal à une racine cubique *imaginaire* de -1, c'est-à-dire que η constitue un groupe équianharmonique avec x_1, x_2, x_3. On sait que cette propriété caractérise les zéros du Hessien du polynome $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Il est d'ailleurs évident que ε est un *centre isogone* du triangle $x_1 x_2 x_3$. Donc η, son conjugué isogonal, est un *centre isodynamique*. On retrouve ainsi le théorème suivant, dû à Beltrami : *les zéros du Hessien d'un polynome du troisième degré sont les centres isodynamiques du triangle des zéros du polynome*. Ils sont donc les foyers de deux coniques inscrites, dont les grands axes sont parallèles à la droite d'Euler, et les centres, situés sur la droite qui touche l'hyperbole de Kiepert au barycentre, sont séparés harmoniquement par ce point et par le point de Lemoine.