PAUL STÄCKEL

Sur la théorie des lignes géodésiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 193-204

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__193_0>

[O51]

SUR LA THÉORIE DES LIGNES GÉODÉSIQUES (1);

PAR M. PAUL STÄCKEL.

(Traduit par M. L. LAUGEL.)

1. Un théorème connu, de Liouville (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XI, p. 345; 1846), passé dans l'enseignement, dit que les lignes géodésiques des surfaces pour lesquelles le carré de l'élément linéaire ds peut être mis sous la forme

$$ds^2 = [U(u) - V(v)](du^2 + dv^2)$$

peuvent être déterminées par des quadratures. En effet, si un point matériel qui n'est soumis à l'influence d'aucune force extérieure se meut sur une surface pareille, son mouvement sera représenté pour un choix convenable de la vitesse (constante) par les équations

$$\int \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}} = t - \tau,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}} = \beta,$$

où t désigne le temps, et où α, β, τ sont des constantes dont les valeurs sont déterminées par les conditions initiales du mouvement.

En adoptant certaines hypothèses très générales sur la nature des fonctions $U(u)$ et $V(v)$, on peut, comme on va le démontrer dans ce qui suit, tirer des équations de Liouville des conclusions sur le cours des lignes géodésiques.

(1) *Jahresbericht der D. M. V.*, t. IX, p. 121 (1901). Leipzig, Teubner.

2. Soient $\varphi(u)$, $\chi(u)$, $f(u)$; $\psi(v)$, $\omega(v)$, $g(v)$ des fonctions des arguments u et v, satisfaisant aux conditions suivantes :

Dans un domaine $\mathfrak{G}$ des variables u et v qui est défini par les inégalités

$$a \leqq u \leqq A, \qquad b \leqq v \leqq B,$$

premièrement, les fonctions devront être toutes les six uniformes, finies et continues; *deuxièmement*, dans le domaine $\mathfrak{G}$, y compris ses limites, les fonctions $f(u)$ et $g(v)$ devront avoir des valeurs essentiellement positives et différentes de zéro. tandis qu'en *troisième* lieu $\varphi(u)$, $\chi(u)$; $\psi(v)$, $\omega(v)$ devront également conserver le même signe dans $\mathfrak{G}$, mais pourront s'évanouir en certains points. Enfin, en *quatrième* lieu, le déterminant $\varphi\omega - \psi\chi$ devra, dans $\mathfrak{G}$, être toujours positif, ou bien être toujours négatif, sans être jamais nul.

Lorsque ces conditions sont remplies, on a ce théorème démontré par M. Staude (*Math. Annalen*, t. XXIX, p. 469; 1887, et *Journal fur Mathem.*, t. CV, p. 303; 1890), d'après lequel les fonctions u et v sont définies dans le domaine $\mathfrak{G}$ par le problème d'inversion

$$\int_a^u \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}} + \int_b^v \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)g(v)}} = x,$$

$$\int_a^u \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}} + \int_b^v \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)g(v)}} = y,$$

comme fonctions paires uniformes, finies et continues des arguments à variabilité illimitée x et y, fonctions doublement périodiques au système de périodes

$$2\omega_{11} = 2\int_a^A \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}},$$

$$2\omega_{12} = 2\int_b^B \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)g(v)}},$$

et

$$2\omega_{21} = 2\int_a^A \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}},$$

$$2\omega_{22} = 2\int_b^B \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)g(v)}}.$$

On doit partout donner aux radicaux le signe positif. De plus, tous les couples de valeurs x, y, qui donnent le même couple de valeurs u_1, v_1 appartenant au domaine $\mathfrak{G}$, seront représentés par les formules

$$x = \pm x_1 + 2m_1\omega_{11} + 2m_2\omega_{21},$$
$$y = \pm y_1 + 2m_1\omega_{12} + 2m_2\omega_{22},$$

où m_1 et m_2 désignent des entiers quelconques, et où le couple de valeurs x_1, y_1 appartient au domaine

$$x = \rho\omega_{11} + \sigma\omega_{21}, \qquad y = \rho\omega_{21} + \sigma\omega_{22} \qquad [\rho, \sigma = (0\ldots1)],$$

et est le seul de l'espèce requise faisant partie de ce domaine.

3. Il a été déjà remarqué (Stäckel, *Math. Annalen*, t. XXV, p. 95; 1889. Staude, *Journal für Mathematik*, t. CV, p. 322; 1890) que le précédent théorème peut être avantageusement employé dans l'étude des lignes géodésiques sur les surfaces en question; mais cette remarque n'a pas été mise à profit depuis. C'est ce que nous allons faire ici, et nous démontrerons en particulier ce théorème :

Les lignes géodésiques, au cas où le théorème de M. Staude est applicable, ou bien sont fermées, ou bien recouvrent une certaine région de la surface d'une manière partout dense.

Pour arriver à identifier les deux systèmes d'équations dont il s'agit, on doit poser

$$\varphi(u) = \mathrm{U}(u), \qquad \psi(v) = -\mathrm{V}(v),$$
$$\chi(u) = 1, \qquad \omega(v) = -1,$$
$$(u-a)(\mathrm{A}-u)f(u) = \mathrm{U}(u) - \alpha, \quad (v-b)(\mathrm{B}-v)\,g(v) = \alpha - \mathrm{V}(v),$$

et chercher à voir quand seront remplies les quatre conditions requises pour que le théorème de M. Staude ait lieu.

Puisque l'expression

$$[\mathrm{U}(u) - \mathrm{V}(v)](du^2 + dv^2)$$

représente le carré de l'élément linéaire de la surface en question, il est clair que les fonctions $\mathrm{U}(u)$ et $\mathrm{V}(v)$ sont uniformes. Cependant, elles peuvent cesser d'être finies et continues en certains points et lignes singulières que l'on marquera sur la surface. On reconnaît aussi que, en général, $\mathrm{U}(u) - \mathrm{V}(v)$ doit être positif et ne peut s'évanouir qu'en certains points singuliers que l'on marquera de même sur la surface. On regardera enfin comme lignes singulières les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ pour lesquelles $\mathrm{U}(u)$ et $\mathrm{V}(v)$ s'évanouissent en changeant de signe. Alors, sur une portion de surface $\mathfrak{F}$, qui ne renferme aucun des points et lignes singulières précitées, les conditions 1, 3 et 4 (p. 194) seront remplies.

Maintenant, si l'on considère un point u_0, v_0 qui est situé à l'intérieur d'une telle portion de surface $\mathfrak{F}$, on reconnaît que de ce point sont issues une infinité de lignes géodésiques dont chacune est caractérisée par la direction de la tangente au point u_0, v_0 ou, ce qui revient au même, par la valeur du rapport

$$p = \frac{dv}{du}$$

en ce point. Si le point mobile se trouve au point u_0, v_0

au temps $t = 0$, les équations intégrales du mouvement seront les suivantes :

$$\int_a^u \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^v \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}} = t + \int_a^{u_0} \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

$$\int_a^u \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^v \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}} = \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}}.$$

Dans ces formules, la constante α est déterminée d'une manière univoque par la valeur initiale p_0 de p ; en effet, de l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{U(u_0)-\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha - V(v_0)}}\,p_0 = 0,$$

on tire

$$\alpha = \frac{V(v_0) + U(u_0)\,p_0^2}{1 + p_0^2}.$$

Par conséquent, lorsque p_0^2 parcourt l'intervalle $(0 \ldots + \infty)$, α parcourt d'une manière continue les valeurs de $V(v_0)$ à $U(u_0)$.

Si l'on attribue à la constante α une valeur déterminée de l'intervalle $[V(v_0) \ldots U(u_0)]$, on devra faire la discussion des expressions

$$U(u) - \alpha = \frac{U(u) - V(v_0) + [U(u) - U(u_0)]\,p_0^2}{1 + p_0^2}$$

et

$$\alpha - V(v) = \frac{V(v_0) - V(v) + [U(u_0) - V(v)]\,p_0^2}{1 + p_0^2}.$$

Au point u_0, v_0, les deux expressions ont chacune une valeur essentiellement positive, et tout revient donc à voir si les équations $U(u) - \alpha = 0$ et $\alpha - V(v) = 0$ possèdent chacune deux racines simples rangées par ordre de grandeur a et A, b et B entre lesquelles soient respectivement situées u_0 et v_0. C'est lorsque ceci a lieu, et seulement alors, que la condition 2 est remplie (p. 194).

Mais, pour que les conditions 1, 3, 4 demeurent vérifiées, il faut que le domaine

$$a \leqq u \leqq A, \qquad b \leqq v \leqq B,$$

que l'on désignera par $\mathfrak{G}_a$, soit situé tout entier à l'intérieur d'une portion de surface $\mathfrak{F}$ de la propriété précitée. Quand ce fait aura lieu, nous nommerons α une valeur *admissible* et $\mathfrak{G}_a$ un domaine *admissible*.

Soit alors α_0 une valeur admissible de α, on aura, par suite,

$$\begin{aligned} U(u) - \alpha_0 &= (u - a_0)(A_0 - u) f_0(u), \\ \alpha_0 - V(v) &= (v - b_0)(B_0 - v) g_0(v), \end{aligned}$$

expressions où $f_0(u)$ et $g_0(v)$ seront essentiellement positifs dans le domaine $\mathfrak{G}_{\alpha_0}$. Si, maintenant, nous faisons varier α de α_0 à α_1, valeur suffisamment voisine de α_0, de la continuité de $U(u)$ et de $V(v)$ résulte qu'à α_1 correspondront des couples de racines a_1 et A_1, b_1 et B_1 de la propriété exigée et il résulte aussi que, pour une valeur suffisamment petite de la différence $\alpha_1 - \alpha_0$, le domaine $\mathfrak{G}_{\alpha_1}$ sera admissible. Par conséquent, lorsque le théorème de M. Staude est vérifié pour une valeur initiale p_0, il l'est également pour un intervalle tout entier $p = (p_1, \ldots, p_2)$ de valeurs initiales à l'intérieur duquel est situé p_0, ou, si l'on emploie le langage de la Géométrie, il existera un certain espace angulaire de directions initiales issues du point u_0, v_0. Il se peut que cet espace angulaire renferme toutes les directions initiales, comme il se peut, au contraire, qu'il n'en renferme qu'une partie et, dans ce cas, il peut aussi exister plusieurs espaces angulaires séparés de directions initiales qui, ou bien sont adjacents, ou bien sont séparés par des espaces angulaires de directions initiales inadmissibles.

4. Ces préliminaires posés, soit α une valeur initiale à laquelle correspond un domaine admissible $\mathfrak{G}_\alpha$. Si, dans les équations intégrales du mouvement, on suppose les seconds membres remplacés par x et par y, d'après le théorème de M. Staude, u et v seront alors définis comme fonctions uniformes, finies, continues et paires des arguments x et y, fonctions doublement périodiques admettant les systèmes de périodes

$$2\omega_{11} = 2\int_a^A \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}}, \qquad 2\omega_{12} = 2\int_b^B \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

et

$$2\omega_{21} = 2\int_a^A \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}}, \qquad 2\omega_{22} = 2\int_b^B \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}}.$$

Dans ces fonctions u et v de x et y, on doit alors poser

$$x = t + \int_a^{u_0} \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

$$y = \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

pour que u et v soient des fonctions uniformes, finies et continues de t. Comme u et v, regardées comme fonctions de x, y, sont développables en séries de Fourier à deux variables, procédant suivant les multiples des arguments

$$\xi = \pi\,\frac{x\omega_{22} - y\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \qquad \eta = \pi\,\frac{-x\omega_{21} + y\omega_{11}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}},$$

u et v peuvent être représentées comme fonctions de t par des séries trigonométriques doublement infinies, procédant suivant les sinus et cosinus de multiples de deux fonctions linéaires du temps t. (*Comp* Staude, *Math. Annalen*, t. XXIX, p. 484; 1887.)

On peut démontrer que les courbes que l'on obtient quand on fait u et v égales aux fonctions de t ainsi définies *ou bien sont fermées, ou bien recouvrent le domaine* $\mathfrak{G}_\alpha$ *d'une manière partout dense.*

En effet, si u_1, v_1 est un point quelconque du domaine $\mathfrak{G}_\alpha$, pouvant aussi coïncider avec le point u_0, v_0, u et v regardés d'abord encore comme fonctions de x et y prendront les valeurs u_1, v_1 pour

$$x = x_1 + 2m_1\omega_{11} + 2m_2\omega_{21},$$
$$y = y_1 + 2m_1\omega_{12} + 2m_2\omega_{22},$$

m_1 et m_2 désignant encore des nombres entiers quelconques et x et y appartenant au domaine

$$x = \rho\omega_{11} + \sigma\omega_{21}, \qquad y = \rho\omega_{12} + \sigma\omega_{22} \qquad [\rho, \sigma = (0\ldots1)].$$

En poursuivant la discussion on voit qu'il faut distinguer deux cas essentiellement différents.

Premièrement, si le rapport

$$\frac{\omega_{12}}{\omega_{22}} = q$$

n'a pas une valeur rationnelle on peut, en vertu d'un théorème connu (*Comp.*, par exemple, KRONECKER, *Berliner Sitzungsberichte*, p. 107; 1884; *Œuvres*, t. III, p. 31), déterminer une infinité de nombres entiers μ_1, μ_2, tels que

$$y_1 + 2\mu_1\omega_{12} + 2\mu_2\omega_{22}$$

prenne une valeur aussi rapprochée que l'on voudra d'une valeur donnée y_2. Mais de la continuité des fonctions u et v de x et y, il s'ensuit alors qu'aux valeurs

$$x = x_1 + 2\mu_1\omega_{11} + 2\mu_2\omega_{21},$$
$$y = y_2,$$

correspondent des valeurs u_2 et v_2 de u et v qui diffèrent aussi peu que l'on voudra de u_1 et v_1.

Revenant alors aux lignes géodésiques et faisant

$$y_2 = \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{\partial v}{\sqrt{\alpha - V}},$$

il s'ensuit qu'au temps

$$t = x_1 + 2\mu_1\omega_{11} + 2\mu_2\omega_{21} - \int_a^{u_0} \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}}$$

le point mobile arrive en un point u_2, v_2, aussi rapproché que l'on voudra du point donné u_1, v_1 ; et cela arrive aussi souvent que l'on voudra parce qu'il y a une infinité de paires d'entiers μ_1 et μ_2 de la propriété requise. Il en résulte immédiatement que *la ligne géodésique considérée remplit le domaine $\mathfrak{G}_\alpha$ d'une manière partout dense.*

Deuxièmement, supposons que q ait une valeur rationnelle; soient alors g_1 et g_2 les deux nombres entiers premiers entre eux pour lesquels on a

$$2g_1\omega_{12} + 2g_2\omega_{22} = 0,$$

tandis que

$$2g_1\omega_{11} + 2g_2\omega_{21} = 2\Omega$$

a une valeur positive; comme

$$\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21} = \int_a^A \int_b^B \frac{(U-V)\,du\,dv}{\sqrt{U-\alpha}\sqrt{\alpha - V}}$$

a une valeur essentiellement positive, différente de zéro, Ω ne peut être jamais nul. Dans ce cas alors u et v prendront au temps

$$t = 2g_1\omega_{11} + 2g_2\omega_{21}$$

exactement les mêmes valeurs, u_0 et v_0, qu'ils avaient au temps $t = 0$, car le couple de valeurs u_0, v_0 pour g_1

et g_2 entiers correspond à

$$x = 2g_1\omega_{11} + 2g_2\omega_{21} + \int_a^{u_0} \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}}$$

$$y = 2g_1\omega_{12} + 2g_2\omega_{22} + \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}}.$$

Par conséquent, nous sommes en présence *d'un mouvement périodique de période* 2Ω, *et les lignes géodésiques sont des courbes fermées qui ont leur cours à l'intérieur du domaine* $\mathfrak{G}_\alpha$.

Si l'on fait varier α de sorte que cette quantité varie d'une manière continue, depuis une valeur admissible α_0 jusqu'à une valeur admissible voisine α_1, on peut démontrer sans peine que les périodes $2\omega_{12}$ et $2\omega_{22}$ éprouveront alors des variations continues, et, puisque

$$\omega_{22} = \int_b^B \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}}$$

est différent de zéro, il en sera aussi de même du rapport

$$q = \frac{\omega_{12}}{\omega_{22}},$$

à moins que q ne soit indépendant de α et ne conserve toujours la même valeur. Pour nous débarrasser de suite de ce cas d'exception, faisons remarquer que dans ce cas, pour les valeurs admissibles de α qui sont voisines de la valeur α_0, les trajectoires du point mobile seront toutes, selon que q est rationnel ou irrationnel, des courbes fermées ou des courbes partout denses. Mais lorsque q dépend de α, q parcourra d'une manière continue un intervalle $(q_0 \ldots q_1)$. Comme les valeurs rationnelles de q y sont distribuées d'une manière partout dense il en est de même de ces valeurs de la grandeur α dans l'intervalle ($\alpha_0 \ldots \alpha_1$) qui donnent des trajectoires fermées, c'est-à-dire en d'autres termes : exception faite du cas d'exception précité, *dans un espace angulaire de directions initiales admissibles, les directions initiales qui donnent des trajectoires fermées sont distribuées d'une manière partout dense; elles ont donc la puissance de l'ensemble des nombres entiers.*

5. Attirons ici l'attention sur cette circonstance, qu'il y a des surfaces de la nature de celles en question où la condition 2 n'est vérifiée en aucun point.

Il en est ainsi, par exemple, lorsque U ou V se réduit à une constante, c'est-à-dire par conséquent lorsque la surface est applicable sur une *surface de révolution.* Une discussion plus approfondie révèle un fait, relatif à ces surfaces, qui mérite d'être signalé. Si la surface est de révolution, dans certaines hypothèses que j'ai précisées dans ma *Dissertation Inaugurale* (Berlin, 1885), les lignes géodésiques ont la propriété suivante : en général, ou bien elles recouvrent d'une manière partout dense un domaine limité par deux parallèles, ou bien elles ont un cours fermé à l'intérieur de domaine. Mais si l'on considère les hélicoïdes déterminés par Bour (*Journal de l'École Polytechnique,* Cahier XXXIX, p. 82; 1862) qui proviennent par déformation de la surface de révolution, l'on verra que les lignes géodésiques correspondantes ne possèdent en général ni l'une ni l'autre de ces propriétés. Cela tient à ce qu'il faut regarder la surface de révolution comme formée d'une infinité de couches superposées qui sont déroulées pendant la déformation.

Déformons, par exemple, l'alysséide

$$x = \sqrt{u^2 + a^2}\cos v, \qquad y = \sqrt{u^2 + a^2}\sin v, \qquad z = \int \frac{a\,du}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

en l'hélicoïde réglé à plan directeur :

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = dv,$$

les parallèles se transformant en hélices, et les méridiens en lignes droites. Si l'on fait croître ici v depuis v_0 jusqu'à $v_0 + 2\pi$, il est clair que sur la surface de révolution un méridien tournant de 360° parcourt toute la surface, tandis que sur l'hélice une droite tourne de 360° et éprouve en même temps un déplacement en hauteur de a pour un tour de la surface. Une ligne géodésique, qui sur la surface de révolution coupe pour la seconde fois le même méridien, entre dans un nouveau tour de l'hélicoïde, et ne peut donc ni se fermer, ni revenir dans le voisinage du point initial du mouvement.

De là résulte que la considération seule de l'équation différentielle des lignes géodésiques commune à toutes les surfaces de déformation ne suffit pas toujours pour donner une idée de leurs rapports de forme et que la nature des surfaces de déformation particulières que l'on considère peut jouer sur ce point un rôle essentiel.

Une autre question serait celle de savoir ce qui se présente au lieu du théorème de M. Staude quand les conditions relatives aux fonctions $\varphi(u)$, $\chi(u)$, $f(u)$; $\psi(u)$, $\omega(v)$, $g(v)$ ne sont pas vérifiées. Une étude plus approfondie montre que le théorème reste vrai dans ses parties essentielles, lorsque le déterminant $\varphi\omega - \psi\chi$ s'évanouit en des points isolés, de façon qu'il n'est pas nécessaire de faire une exception pour les points de la surface où $ds = 0$. Au contraire, la condition qui exige que $\varphi(u)$, $\chi(u)$; $\psi(v)$, $\omega(v)$ ne changent pas de signe est tout à fait essentielle et ici s'ouvre alors un champ de nouvelles recherches qui fournirait de fructueux problèmes, d'abord sur des exemples simples, puis sur des types plus généraux.