Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de novembre 1900. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 171-189

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__171_1>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1900. — COMPOSITIONS.

Besançon.

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Établir analytiquement l'existence de l'axe instantané de rotation dans le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.*

II. *Un disque circulaire tourne autour d'un axe*

(1) Soient, en effet, T et T′ deux triangles, le premier circonscrit, le second conjugué à une même conique Γ. Considérons la conique conjuguée à T et touchant deux côtés de T′ : elle est harmoniquement inscrite à Γ ; par suite, elle touche le troisième côté de T′.

horizontal sous l'action d'un poids fixé à une corde qui s'enroule sur un cylindre de même axe. Le disque est plongé dans un milieu où chaque élément de sa surface éprouve une résistance de la forme $Av + Bv^2$, *v étant la vitesse de l'élément.*

Déterminer le mouvement du disque.

La dérivée, par rapport au temps, du moment des quantités de mouvement, par rapport à l'axe, est égale à la somme des moments, par rapport à cet axe, des forces qui sollicitent le disque. Soient M la masse du disque, MK^2 son moment d'inertie, m la masse du poids moteur, ω la vitesse angulaire du disque, a son rayon. On a :

$$MK^2 \frac{d\omega}{dt} = mga - \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2\, dr\, d\theta\,(A r\omega + B r^2\omega^2).$$

On a entre t et ω une relation de la forme

$$dt = \frac{d\omega}{\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2}.$$

Les circonstances du mouvement dépendent du signe de $\beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Épreuve pratique. — *Engrenage à développante. Crémaillère et pignon.*

Caen.

Éléments généraux de Mathématiques.

Épreuve écrite. — I. *Enveloppe et trajectoires orthogonales des paraboles qui ont* OX *pour axe,* OY *pour directrice.*

$$x^2 - y^2 = 0, \qquad \left(x \pm \sqrt{x^2 - y^2}\right)\left(2x \mp \sqrt{x^2 - y^2}\right)^2 = C^3.$$

II. *Mouvement d'un disque très mince, pesant, homogène, pouvant tourner autour d'un axe hori-*

zontal OX qui le traverse suivant une corde AB et glisse sans frottement le long de OX. Durée des petites oscillations; position de AB pour laquelle cette durée est minima.

ξ abscisse du centre; θ angle du disque avec la verticale : $\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$, $\left(a^2 + \frac{R^2}{4}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -ga\sin\theta$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la longitude L du Soleil au moment où, en négligeant la réfraction, il se couche pour un lieu de latitude λ; l'heure moyenne du lieu est H et l'on est en un jour d'été pour lequel l'équation du temps est E. On connaît l'obliquité de l'écliptique ω.*

$$\tan\textrm{g}\,\mathbb{D} = \cot\lambda\cos(\mathrm{H}-\mathrm{E}), \qquad \sin\mathrm{L} = \frac{\sin\mathbb{D}}{\sin\omega}.$$

Dijon.

Calcul différentiel et intégral.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Recherche des surfaces trajectoires orthogonales des lignes dont les équations en coordonnées rectangulaires sont*

$$x = \varphi(t, a, b), \qquad y = \chi(t, a, b), \qquad z = \psi(t, a, b),$$

où t, a, b, représentent la variable auxiliaire et deux paramètres indéterminés, où φ, χ, ψ désignent des fractions données de ces trois quantités.

II. *Appliquer la théorie précédente aux lignes*

$$x = ae^{-pt}, \qquad y = be^{-qt}, \qquad z = t,$$

où p, q représentent deux constantes données.

Mécanique.

I. *Forme d'équilibre d'un fil homogène pesant dont les extrémités sont attachées à deux points fixes.*

II. *Dans le cas où les points sont donnés, ainsi que la longueur du fil, déterminer complètement la courbe qu'affecte le fil.*

ASTRONOMIE.

I. *Formules différentielles de la Trigonométrie sphérique.*

II. *Détermination du temps sidéral, connaissant la latitude, au moyen de plusieurs mesures de hauteur d'une étoile connue.*

Grenoble.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE — *Recherche générale des surfaces dont les normales rencontrent une courbe plane donnée S. Lignes de courbure d'une surface intégrale générale et directions principales en un point de cette surface.*

Cas particulier où la surface intégrale considérée touche le long d'une ligne, un plan parallèle à celui de la courbe S. Calculer, dans ce cas, la longueur des rayons principaux en un point de la surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégration générale des équations*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = ax + by + c, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = a'x + b'y + c',$$

dans lesquelles a, b, c, a', b', c' *désignent des constantes.*

Cas particulier où l'on a

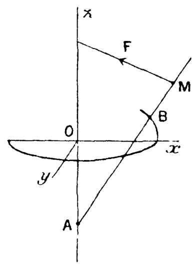
$$a = \alpha(\beta - \alpha), \qquad b = \alpha\beta, \qquad c = 0,$$
$$a' = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2, \qquad b' = -\beta(\alpha + \beta), \qquad c' = 0.$$

Dans ce cas particulier, quelle relation faut-il établir entre α et β, supposés différents de zéro, pour que, les constantes d'intégration étant convenablement déterminées, les valeurs de x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ soient nulles pour $t = 0$? Quel est alors le lieu du point dont les coordonnées sont x et y?

Mécanique.

Épreuve écrite. — *On considère la surface hélicoïde réglée à cône directeur dont les coordonnées d'un point*

Fig. 1.



quelconque sont données par les formules

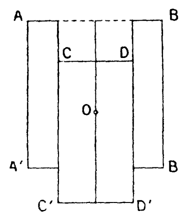
$$x = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos\theta, \qquad y = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sin\theta, \qquad z = a\theta - a + \frac{\rho}{\sqrt{2}},$$

où θ et ρ sont deux variables dont la première détermine la génératrice AB *du point et la seconde la distance de ce point* M *au point* A *de cette génératrice qui est sur l'axe. L'angle* M A z *et l'angle de l'hélice avec l'axe sont du reste tous deux égaux à 45°.*

Un point matériel non pesant, assujetti à glisser sans frottement sur la surface, est sollicité par une force perpendiculaire à l'axe, attractive et proportionnelle à la distance de cet axe. Mouvement du point en général. Étudier plus particulièrement le cas où, à *l'origine, le point* M *serait sur l'hélice et où sa vitesse* v_0 *serait tangente à cette hélice.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cylindre plein* CDC′D′ *glisse dans un cylindre creux de même axe et de rayon*

Fig. 2.



double AB A′B′ *dont il peut remplir exactement le vide. On demande dans quelle position il faut le placer pour que l'ellipsoïde d'inertie, relatif au point* O *de l'axe commun qui est à égale distance des deux bases* AB *et* C′D′ *(supérieure de l'un et inférieure de l'autre), soit une sphère. Les cylindres sont homogènes et de même densité.*

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Développement de la longitude du Soleil suivant les puissances de l'excentricité. — Equation du centre.*

Temps moyen. — Équation du temps. Discussion.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans un triangle, on donne*

$$a = 135^\circ.\ 5'.28'',8,$$
$$b = 50.30.\ 8,4,$$
$$C = 69.34.55,9;$$

1° *Calculer* C *et* A *isolément;*

2° *Résoudre complètement le triangle;*

3° *Déterminer l'influence qu'aurait sur la détermination de* C *et de* A *une erreur de* $\pm 1'$ *affectant la valeur de* C.

Lyon.

Analyse.

I. 1° *Intégrer le système* (p, q = const.)

$$(0) \qquad z\frac{dy}{dx} = f(y) = (y-p)(y-q), \qquad \frac{dz}{dx} = f'(y).$$

2° *Montrer que le système* (0) *possède l'invariance vis-à-vis des trois transformations* (a, b, c = const.)

$$\begin{vmatrix} x & x+a \\ y & y \\ z & z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & bx \\ y & y \\ z & bz \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & x(1-cx)^{-1} \\ y & y+cz(1-cx)^{-1} \\ z & z(1-cx)^{-2} \end{vmatrix} = \Gamma.$$

3° *Montrer que le système* (0) *possède au moins une solution* y = const. *Combiner cette remarque avec l'invariance ci-dessus indiquée pour construire* a priori *l'intégrale générale.*

L'intégrale générale est (A, B, C = param. arbitr.)

$$z = \mathrm{B}f(y), \qquad x + \mathrm{A} = \mathrm{B}y.$$

Les courbes intégrales sont les génératrices rectilignes d'un certain faisceau de quadriques. La transformation Γ est birationnelle. Pour avoir Γ^{-1} il suffit de changer C en $-$ C.

II. *Deux variables complexes x et y sont liées par l'équation*

$$(\mathrm{H}) \qquad x^m + y^n = 1 \qquad (m,\ n = \text{entiers positifs}).$$

Montrer que, pour $|x| < 1$, H *définit n fonctions holomorphes distinctes y de x.*

Construire les n développements

$$y = \sum_{l} a_l x^l \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

et établir directement, pour $|x| < 1$, *la convergence absolue et uniforme des n séries.*

Pour quels points x (H) *possède-t-elle des racines égales?*

Cas particulier : $m = n = 2$. *En déduire le développement, en série de Mac-Laurin, de* $\arcsin x$, *pour* x *réel et compris entre* $+1$ *et* -1.

III. *Quand la variable complexe z est dans l'intérieur de la couronne comprise entre les deux circonférences qui ont l'origine pour centre avec* π *et* 2π *pour rayons respectifs, on a (théorème de Laurent)*

$$\frac{1}{\sin z} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n z^n.$$

Calculer A_0, A_1, A_2, A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}.

MÉCANIQUE.

On a une sphère creuse de rayon R *et une droite matérielle, de longueur fixe* $< 2R$, *infiniment mince, homogène, sans pesanteur. La droite se meut dans l'intérieur de la sphère, en s'y appuyant par les deux bouts, sans frottement.*

Poser les équations différentielles du mouvement de la droite, la sphère restant fixe.

Calculer, en fonction des paramètres qui définissent la position de la droite : la vitesse de chaque point; les réactions exercées sur la sphère.

MATHÉMATIQUES PRÉPARATOIRES.

I. *La droite* C (*coordonnées rectangulaires*)

$$y = 1, \qquad z = mx, \qquad m = \text{const.}$$

tourne autour de l'axe des z et engendre une surface S *de révolution.*

Montrer que S *est une quadrique et en trouver la conique méridienne.*

Discuter la conique section de S *par un plan passant par l'origine. Distinguer, par la considération du cône asymptote, les cas ellipse, parabole, hyperbole.*

Les sections $yz^{-1} = \text{const.}$ *se projettent sur le plan des xy suivant un faisceau de coniques* Λ

$$x^2 + \lambda y^2 = 1 \qquad (\lambda = \text{paramètre}).$$

Montrer que les trajectoires orthogonales des coniques Λ *ont pour équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{xy}.$$

Intégrer.

II. *Théorèmes généraux de la Dynamique.*

Marseille.

ANALYSE INFINITÉSIMALE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Quels sont les points singuliers des fonctions représentées par les intégrales définies* $\int \frac{dz}{(z-1)^2}$, $\int \frac{dz}{(z-1)^{\frac{1}{2}}}$, $\int \frac{dz}{z-1}$, *et quels sont leurs caractères distinctifs?*

(*Aucune démonstration n'est demandée.*)

II. *Étant donnée la surface représentée en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$cx = az\cos\varphi + ac\sin\varphi, \qquad cy = bz\sin\varphi - bc\cos\varphi,$$

où φ est un paramètre variable, on demande de déterminer l'équation générale du plan tangent en un point (x, y, z) quelconque de la surface, et celle du plan tangent au point à l'infini sur la génératrice correspondant à une valeur quelconque de φ. Déduire de là l'équation du plan central et les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point central de la génératrice considérée. Trouver les points de la ligne de striction les plus élevés au-dessus du plan des xy.

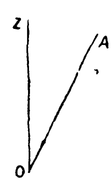
On trouve sans difficulté

$$z_1 = \frac{c^3(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{a^2(b^2 + c^2)\sin^2\varphi + b^2(a^2 + c^2)\cos^2\varphi}.$$

Le maximum de cette expression se calcule facilement. La question proposée consiste à déterminer sur une hyperboloïde la ligne de striction correspondant à un système choisi de génératrices rectilignes.

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un bloc homogène pesant est creusé un canal rectiligne* OA *qui rencontre un*



axe vertical fixe OZ *autour duquel le bloc peut tourner.*

Dans le canal se meut un point matériel pesant.

Étudier le mouvement du système.

En particulier, quelles doivent être les données initiales pour que le point reste fixe dans le canal?

Épreuve pratique. — *Le tablier d'un pont suspendu pèse* 4000^{kg} *par mètre courant. Il a* 100^{m} *de longueur, et il est supporté par deux câbles qui passent sur deux piles d'égale hauteur placées aux deux extrémités du tablier.*

La flèche de la courbe décrite par chaque cable est égale à 8^{m}. *Calculer la section qu'il faut donner à chaque câble pour qu'il ne travaille pas à une tension supérieure à* 12^{kg} *par millimètre carré.*

Trouver la longueur de la courbe décrite par chaque câble. On négligera le poids des câbles.

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Description et théorie du sextant.*

Déterminer la longitude et la latitude d'un lieu à l'aide d'un sextant et d'un chronomètre réglé sur le temps moyen du premier méridien.

Épreuve pratique. — *Connaissant un côté a d'un triangle géodésique ainsi que les angles adjacents* B, C, *trouver les autres éléments et la surface du triangle*

$$a = 55347^{m},82,$$
$$B = 55^{\circ}47'53''6,$$
$$C = 62^{\circ}58'47''6.$$

Calculer les accroissements des côtés b et c correspondant à un accroissement de 0^{m},65 *du côté a.*

On supposera le rayon de la Terre égal à 6360000^{m}.

Excès sphérique en secondes

$$\varepsilon = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 R^2 \sin(B + C) \sin 1''} = \frac{N}{D},$$

$$B' = B - \frac{\varepsilon}{3}, \qquad C' = C - \frac{\varepsilon}{3},$$

$$b = a \frac{\sin B'}{\sin(B' + C')}, \qquad c = a \frac{\sin C'}{\sin(B' + C')},$$

$$A = 180 - (B + C) + \varepsilon,$$

$$s = s' = \frac{a^2 \sin B' \sin C'}{2 \sin(B + C)}, \qquad \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a}.$$

$B = 55°.47'.53'',6$ $\quad \varepsilon = 6,58$ $\quad B' = 55°.47'.21'',4$

$C = 62.58.47,8$ $\quad \frac{\varepsilon}{3} = 2,2$ $\quad C' = 62.58.45,5$

$B + C = 118.46.41,4$ $\quad A' = 180 - (B' + C') = 61.13.23,0$

	Log.		Log.
a^2	9,486	ε	0,301
$\sin B$	$\bar{1}$,918	R^2	13,606
$\sin C$	$\bar{1}$,950	$\sin(B + C)$	$\bar{1}$,943
N	9,354	$\sin 1''$	$\bar{6}$,686
const. = D	$\bar{9}$,464	D	8,536
ε	0,818		

	Log.
$\sin B'$	$\bar{1}$,9175355
a	4,7431005
const. = $\sin(B' + C')$	0,0572418
$\sin C'$	$\bar{1}$,9498010
b	4,7178838
c	4,7501493

	Log.		Log.
a^2	9,4862910	b	4,719
$\sin B'$	$\bar{1}$,9175355	const. = a	$\bar{5}$,257
$\sin C'$	$\bar{1}$,9498010	Δa	$\bar{1}$,817
const. = 2	$\bar{1}$,6989700	c	4,750
const. = $\sin(B' + C')$	0,0572478	Δb	$\bar{1}$,789
s	9,1097553	Δc	$\bar{1}$,820

81

132

RÉSULTATS :

b...	$52225^{\mathrm{m}},64$	$A = 61°.13'.25'',2$	Δb.....	$0^{\mathrm{m}},615$
c...	$56253,47$		Δc.....	$0,66$
s...	1287524000^{mq}			

Montpellier.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Les axes étant rectangulaires, déterminer l'équation générale des courbes planes telles que la projection orthogonale du rayon de courbure sur l'axe des y ait une longueur constante donnée. Parmi les courbes obtenues, déterminer celle qui est tangente à l'axe* Ox *au point* O. *Étudier la forme de cette courbe et calculer la longueur de l'arc compté à partir de l'origine.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 2y = x(e^x + e^{-x}).$$

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un paraboloïde de révolution est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe, qui est fixe et dirigé suivant la verticale ascendante. Un point pesant se déplace sans frottement sur la surface de ce paraboloïde. On propose d'étudier le mouvement relatif du point pesant sur le paraboloïde, en supposant que la vitesse initiale relative du point est dirigée suivant la tangente au parallèle. On se dispensera de calculer la réaction du paraboloïde sur le point.*

Épreuve pratique. — *Une figure plane, mobile dans son plan, est liée au mouvement d'un angle droit dont un côté enveloppe une parabole fixe tandis que l'autre passe constamment par le foyer de cette parabole.*

Trouver la base et la roulante; construire, pour une position quelconque de la figure, le cercle des inflexions.

Astronomie.

Épreuve écrite. — I. *Établir les formules fondamentales du mouvement parabolique des comètes; en déduire le théorème d'Euler ou de Lambert. Conclure, de la position à l'instant t d'une comète dans son orbite parabolique :*

1° *Ses coordonnées héliocentriques écliptiques;*

2° *Ses coordonnées héliocentriques équatoriales.*

II. *Définir les éléments des orbites des grosses planètes et exprimer par le développement en série usuel la longitude héliocentrique* V_1 *en fonction de la longitude dans l'orbite* V.

Épreuve pratique. — *On donne pour l'époque* 1900 *décembre* 10,0 : *l'anomalie moyenne*

$$M = 117^\circ 34' 23'', 4,$$

l'excentricité

$$\varphi = 1^\circ 37' 40'', 9,$$

le moyen mouvement

$$\mu = 881'', 0985$$

de la planète (292) *Ludovica.*

On demande pour 1900 *décembre* 30,0 : 1° *la valeur de l'anomalie excentrique* E; 2° *la valeur de l'anomalie vraie.*

Nancy.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Définition et propriétés du déterminant fonctionnel de n fonctions de n variables. Condition pour qu'il existe entre ces fonctions une relation identique.*

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et, sur Oz, deux points C et C' des cotes $+c$ et $-c$; on considère la sphère (Σ) lieu des points dont le rapport des distances à C et C' est égal à $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, puis la famille des sphères (Σ) obtenues en faisant varier la valeur de λ :*

1° *Déterminer les trajectoires orthogonales des sphères (Σ);*

2° *Trouver l'équation générale des surfaces (S) orthogonales en chacun de leurs points à la sphère (Σ) qui passe par ce point;*

3° *Déterminer en particulier l'équation de la surface (S) qui passe par la droite $z = 0$, $x = a$, et celle de la surface (S) qui passe par le cercle*

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2px - c^2 = 0,$$

a et p étant des constantes données et c la cote du point C.

Épreuve pratique. — *On considère la surface représentée par les équations*

$$x = \cos\varphi(z+1), \qquad y = \sin\varphi(1-z),$$

où φ est un paramètre variable.

Déterminer le volume intérieur à cette surface et compris entre les plans $z = +1$ et $z = -1$.

Déterminer le lieu des points de contact des plans tangents à la surface parallèles à O*z et construire les projections de ce lieu sur les plans de coordonnées; trouver la longueur de la courbe ainsi définie sur la surface.*

Le volume est $\frac{4}{3}\pi$; les équations de la courbe sont

$$x = 2\cos^3\varphi, \qquad y = 2\sin^3\varphi, \qquad z = \cos 2\varphi,$$

et sa longueur est $\sqrt{13}$.

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère deux axes rectangulaires* Ox, Oy; *sur le premier, un point fixe* A *d'abscisse* a, *sur le second un point fixe* B *d'ordonnée* b *et, dans le plan* xOy, *un point variable* M *de coordonnées* X *et* Y; *soient* A′ *et* B′ *ses projections sur* Ox *et* Oy. *Les circonférences déterminées, l'une par les points* O, A, B′, *l'autre par les points* O, A′, B, *se coupent en un point* m *de coordonnées* x *et* y.

1° *Montrer que* x *et* y *s'expriment rationnellement en fonction de* X *et* Y, *et réciproquement;*

2° *Si* M *décrit une droite* D, m *décrit une cubique* c *et, lorsque* D *varie,* c *admet* O *comme point double et passe par* A, *par* B, *ainsi que par les points cycliques* I *et* J *du plan;*

3° *Si* m *décrit une droite* d, M *décrit une cubique* C; *qu'arrive-t-il lorsque* d *varie en passant par l'un des points* O, A, B, I, J?

4° *Lorsque* d *varie d'une manière quelconque,* C *varie en faisant partie d'un réseau de cubiques; quel est le lieu des points doubles de ces cubiques?*

II. *On considère la surface représentée par les équa-*

tions

$$x + (1 + u)\cos v, \qquad y = (1 - u)\sin v, \qquad z = u;$$

déterminer ses lignes asymptotiques et former l'équation ayant pour racines les rayons de courbure principaux en un point quelconque.

I. La transformation birationnelle qui existe entre les coordonnées des points m et M est définie par les équations

$$x = \frac{(XY - ab)(Y - b)}{(X - a)^2 + (Y - b)^2}, \qquad X = \frac{x^2 + y^2 - by}{x},$$

$$y = \frac{(XY - ab)(X - a)}{(X - a)^2 + (Y - b)^2}, \qquad Y = \frac{x^2 + y^2 - ax}{y}.$$

Si M décrit une droite (U, V, W), m décrit la cubique

$$U(x^2 + y^2 - by)y + V(v^2 + y^2 - ax)x + Wxy = 0,$$

qui admet l'origine comme point double et passe par A, B, I et J; les points fondamentaux de la transformation sont ainsi mis en évidence.

Si m décrit une droite (u, v, w), M décrit la cubique

$$[u(Y - b) + v(X - a)](XY - ab) \\ + w[(X - a)^2 + (Y - b)^2] = 0,$$

qui a toujours le point (a, b) comme point double.

Si d passe par O, G se décompose dans l'hyperbole fixe $XY - ab = 0$ et dans une droite variable; si d passe par un des points A, B, I, J, C se décompose chaque fois dans une certaine droite fixe passant par le point (a, b) et dans une conique variable. La cubique C ne peut avoir d'autre point double que le point (a, b) que si elle se décompose; le lieu des points doubles se compose alors de l'hyperbole et des quatre droites fixes que l'on vient de trouver.

II. Les lignes asymptotiques sont données par

$$2 \sin 2v \, du \, dv + (1 - u^2) \, dv^2 = 0;$$

elles se composent des génératrices de la surface correspondant à $v = \text{const.}$ et de courbes définies par l'équation

$$\frac{u-1}{u+1} = \sqrt{\tan g v}.$$

L'équation qui donne les rayons de courbure principaux est

$$\begin{aligned} R^2 \sin^2 2v + 2R(1 - u^2 + \sin^2 2v)\sqrt{2(u + \cos 2v)^2 + \sin^2 2v} \\ - [2(u - \cos 2v)^2 + \sin^2 2v]^2 = 0. \end{aligned}$$

Mécanique.

Épreuve écrite. — *On imprime à un cône de révolution homogène, pesant, une rotation autour de son axe* Oz; *puis, fixant le sommet* O *du cône et plaçant son axe* Oz *horizontal, on abandonne le cône à son propre poids, sans imprimer aucune vitesse initiale à son axe.*

La hauteur h et le rayon r de la base du cône sont égaux à $\frac{3}{4}g$, g désignant l'accélération due à la pesanteur; la vitesse angulaire de rotation initiale du cône autour de son axe est $n = 5$; la densité du cône est quelconque.

On demande de décrire le mouvement du cône autour de son sommet O.

On a à étudier dans un cas particulier le mouvement d'un corps homogène, pesant, de révolution autour de son axe; la troisième équation d'Euler donne d'abord $r = r_0 = 5$, d'où

$$(1) \qquad \varphi' + \psi' \cos\theta = r_0 = 5;$$

le théorème des forces vives et celui des moments des quantités de mouvement par rapport à la verticale du sommet fournissent ensuite, avec les conditions initiales données, les relations

$$(2)\qquad \theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta = -\frac{2Mgl}{A}\cos\theta = -\frac{8}{3}\cos\theta.$$

$$(3)\qquad \psi' \sin^2\theta = -\frac{cr_0}{A}\cos\theta = -2\cos\theta.$$

En posant $\cos\theta = u$, on a

$$u'^2 = \frac{4}{3}u(u-2)(2u+1);$$

par conséquent θ oscille entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$ d'une manière périodique, et le problème s'achève de la manière connue.

Épreuve pratique. — *Déterminer le centre de masse d'un arc d'hélice homogène tracé sur un cylindre de révolution à axe vertical de rayon égal à* 2^{m}; *les rayons des extrémités de l'axe font un angle de* 45° *et leur distance verticale est égale à* 1^{m}.

Astronomie.

Épreuve écrite. — I. *Démontrer le théorème de Legendre relatif aux triangles sphériques dont les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère.*

II. *Définition et période de l'équation annuelle dans le mouvement troublé de la Lune.*

III. *Sachant qu'une étoile dans son mouvement diurne reste un temps sidéral* T *au-dessus de l'horizon d'un lieu, trouver sa déclinaison; on connaît la latitude* φ *du lieu.*