E. Iaggi

Relations entre les zéros et les coefficients d'une fonction entière

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 16-19
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__16_1>

[D4a]

RELATIONS ENTRE LES ZÉROS ET LES COEFFICIENTS D'UNE FONCTION ENTIÈRE;

PAR M. E. JAGGI.

Soit une fonction entière $F(x)$ donnée par son développement en série sous la forme

$$\frac{F(x)}{F(0)} = 1 + \frac{A_1}{1} x + \frac{A_2}{1.2} x^2 + \frac{A_3}{1.2.3} x^3 + \ldots. \tag{1}$$

Nous nous proposons de trouver des relations entre les coefficients A et les zéros

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_i, \quad \ldots$$

de la fonction $F(x)$. On sait que la fonction $F(x)$ se met sous la forme

$$(2) \qquad F(x) = e^{G(x)} \prod_i \left[\left(1 - \frac{x}{a_i} \right) e^{g_i(x)} \right],$$

où $G(x)$ est une fonction entière indépendante des zéros a_i, et les $g_i(x)$ sont des polynomes dépendant respectivement des zéros a_i et rendant convergent le produit précédent, ou, si l'on veut, la série

$$\sum_i \left[g_i'(x) - \frac{1}{a_i - x} \right].$$

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons d'abord que $G(x)$ est une constante et nous poserons

$$f_i(x) = g_i(x) + L\left(1 - \frac{x}{a_i} \right),$$

en sorte que

$$(3) \qquad F(x) = \prod e^{f_i(x)} = e^{\sum_i f_i(x)}.$$

Pour identifier (1) et (3) nous n'avons donc qu'à développer cette exponentielle; on a immédiatement

$$\frac{F(x)}{F(0)} = 1 + \frac{\sum_i f_i'(0)}{1} x + \frac{\sum_i f_i''(0) + \left[\sum_i f_i'(0) \right]^2}{1.2} x^2 + \ldots.$$

D'ailleurs

$$f_i^{(n)}(x) = g_i^{(n)}(x) - \frac{1.2\ldots(n-1)}{(a_i - x)^n},$$

$$f_i^{(n)}(0) = g_i^{(n)}(0) - \frac{1.2\ldots(n-1)}{a_i^n}.$$

et, par conséquent,

$$A_1 = \sum_i \left[g_i'(0) - \frac{1}{a_i} \right],$$

$$A_2 = \sum_i \left[g_i''(0) - \frac{1}{a_i^2} \right] + \left\{ \sum_i \left[g_i'(0) - \frac{1}{a_i} \right] \right\}^2,$$

$$A_3 = \sum_i \left[g_i'''(0) - \frac{2}{a_i^3} \right]$$

$$+ 3 \sum_i \left[g_i'(0) - \frac{1}{a_i} \right] \sum_i \left[g_i''(0) - \frac{1}{a_i^2} \right]$$

$$- \left\{ \sum_i \left[g_i'(0) - \frac{1}{a_i} \right] \right\}^2,$$

. . . .

En résumé, les coefficients A_1, A_2, A_3, ... s'obtiennent par la même loi que les coefficients du développement

$$\frac{e^{gx}}{e^{g0}} = 1 + \frac{g'(0)}{1} x + \frac{g''(0) + g'^2(0)}{1.2} x^2$$

$$+ \frac{g'''(0) + 3 g'(0) g''(0) + g'^3(0)}{1.2.3} x^3 + \ldots;$$

il suffit de remplacer dans celui-ci

$$g^{(n)}(0) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

par

$$\sum_i f_i^{(n)}(0) = \sum_i \left[g_i^{(n)}(0) - \frac{1.2\ldots(n-1)}{a_i^n} \right].$$

S'il existe un facteur $e^{G(x)}$ dans $F(x)$, cette fonction se met sous la forme

$$F(x) = e^{G(x) + \sum_i f_i(x)},$$

et l'on voit qu'à chacun des termes $\sum_i f_i^{(n)}(0)$ il suffit d'ajouter le terme correspondant $G^{(n)}(0)$.

Lorsque la série

$$\sum_i \frac{1}{a_i}$$

est convergente, les exponentielles $e^{g_i(x)}$ disparaissent dans les facteurs primaires de $F(x)$, et l'on a

$$A_1 = -\sum_i \frac{1}{a_i},$$

$$A_2 = \left(\sum_i \frac{1}{a_i}\right)^3 - \sum \frac{1}{a_i^2} = 1.2\sum_{i\,j} \frac{1}{a_i a_j} \qquad (i \neq j),$$

$$A_3 = 2\sum_i \frac{1}{a_i^3} + 3\sum_i \frac{1}{a_i}\sum_i \frac{1}{a_i^2} - \left(\sum_i \frac{1}{a_i}\right)^3$$

$$= -1.2.3\sum_i \frac{1}{a_i a_j a_k} \qquad (i \neq j \neq k).$$

. . . .

Ces formules conviennent, en particulier, au cas où $F(x)$ est un polynome, et ne sont autres que celles qu'on obtient en changeant x en $\frac{1}{x}$ dans le polynome et en exprimant les coefficients du polynome par les sommes de puissances semblables des racines.

Les formules générales que nous avons démontrées sont susceptibles de nombreuses applications. Nous nous contenterons, actuellement, d'en signaler une fort simple : l'application à la fonction

$$F(x) = \frac{\sin \pi\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}},$$

qui donne les sommes

$$\sum_n \frac{1}{n^{2p}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

des puissances semblables paires des inverses des nombres entiers.