NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. IAGGI

Démonstration directe du théorème d'addition de la fonction elliptique $Z(x)$

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 14-16

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__14_1>

[F4a]

DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME D'ADDITION DE LA FONCTION ELLIPTIQUE $Z(x)$;

PAR M. E. IAGGI.

Pour étudier la fonction de seconde espèce déterminée par l'intégrale

$$(1) \qquad Z = k^2 \int_0^u \frac{u^2\, du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

on pose $u = \operatorname{sn} x$ et l'on considère la fonction

$$(2) \qquad Z(x) = k^2 \int_0^x \operatorname{sn}^2 x\, dx$$

qui s'exprime, comme on sait, au moyen de la fonction $\Theta(x)$, et, des propriétés de la fonction Θ, on déduit le théorème d'addition

$$Z(x+y) = Z(x) + Z(y) + k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{sn}(x+y). \tag{3}$$

Ce théorème n'est, au fond, que le théorème d'addition de la fonction de première espèce $\operatorname{sn} x$, et nous allons le démontrer directement sans nous servir de la fonction Θ.

Posons

$$t = x + y, \qquad \begin{aligned} u_1 &= \operatorname{sn} x, \\ u_2 &= \operatorname{sn} y, \\ u_3 &= \operatorname{sn}(x+y) = \operatorname{sn} t, \\ \Delta u &= \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}. \end{aligned}$$

On sait que

$$u_3 = \frac{u_1 \Delta u_2 + u_2 \Delta u_1}{1 - k^2 u_1^2 u_2^2}. \tag{4}$$

Mais on a [1]

$$u_1^2 \Delta_{u_2}^2 - u_2^2 \Delta_{u_1}^2 = (u_1^2 - u_2^2)(1 - k^2 u_1^2 u_2^2).$$

La formule d'addition de $\operatorname{sn} x$ peut donc se mettre sous la forme

$$u_3 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1}. \tag{5}$$

Si l'on remarque que

$$u_1 = \operatorname{sn}(t-y), \qquad u_2 = \operatorname{sn}(t-x),$$

on pourra écrire, au moyen de la formule précédente,

$$u_1 = \frac{u_3^2 - u_2^2}{u_3 \Delta u_2 + u_2 \Delta u_3}, \qquad u_2 = \frac{u_3^2 - u_1^2}{u_3 \Delta u_1 + u_1 \Delta u_3}$$

---

[1] On a l'occasion de démontrer cette identité lorsqu'on intègre l'équation d'Euler, soit par la méthode de M. Darboux, soit par la méthode que nous avons exposée dans notre Note *Sur l'intégrale d'Euler et l'addition des fonctions elliptiques* (*Nouvelles Annales*, p. 443; 1900).

ou

$$(6)\qquad u_3^2 - u_1 u_2 \Delta u_3 = u_2^2 + u_1 u_3 \Delta u_2,$$

$$(7)\qquad u_3^2 - u_1 u_2 \Delta u_3 = u_1^2 + u_2 u_3 \Delta u_1.$$

Or, on a aussi

$$(8)\qquad \frac{du_3}{\Delta u_3} = \frac{du_1}{\Delta u_1} + \frac{du_2}{\Delta u_2}.$$

Multipliant les deux membres de (6) par $\frac{du_2}{\Delta u_2}$, les deux membres de (7) par $\frac{du_1}{\Delta u_1}$ et ajoutant, en tenant compte de (8), on obtient l'équation différentielle

$$\frac{u_3^2\, du_3}{\Delta u_3} - u_1 u_2\, du_3 = \frac{u_1^2\, du_1}{\Delta u_1} + \frac{u_2^2\, du_2}{\Delta u_2} + u_1 u_3\, du_2 - u_2 u_3\, du_1$$

qui s'écrit

$$(9)\qquad \frac{u_3^2\, du_3}{\Delta u_3} = \frac{u_1^2\, du_1}{\Delta u_1} + \frac{u_2^2\, du_2}{\Delta u_2} + d(u_1 u_2 u_3).$$

Multipliant les deux membres de (9) par k^2 et intégrant en remarquant que les deux membres doivent être identiques si l'on fait $u_1 = 0 = x$, et, par suite, que la constante d'intégration est nulle, on obtient la formule d'addition (3) de la fonction $Z(x)$.