NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. IAGGI

Sur les notions de fonction complète et de fonction périodique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 146-163

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__146_1>

[D5d]

SUR LES NOTIONS DE FONCTION COMPLÈTE ET DE FONCTION PÉRIODIQUE;

PAR M. E. IAGGI.

1. Pour étudier une fonction Y d'une variable X, on a coutume de choisir, parmi les valeurs de Y déterminées par une valeur x de X, une certaine valeur y dont on suit les variations lorsque x varie; on obtient ainsi des fonctions uniformes que l'on peut classer immédiatement en deux catégories distinctes :

1° Les fonctions uniformes *sans points critiques,* qui n'ont pas d'autres singularités que des singularités essentielles (il n'y a pas lieu de distinguer ici les pôles d'une manière spéciale); c'est le cas où la fonction Y est *univoque*.

2° Les fonctions uniformes qui ont des points critiques, c'est-à-dire qui ne sont réellement *uniformes* que sur une surface de Riemann convenablement choisie; car si l'on fait varier x dans un même plan, d'un point x_0 quelconque à un point x_1 quelconque (non singuliers essentiels), la variation correspondante de y n'est pas univoque, mais dépend du chemin suivi, de x_0 à x_1, par la variable x; c'est le cas où la fonction Y a plusieurs valeurs.

Riemann n'a d'ailleurs inventé ses surfaces à feuillets que dans le but d'appliquer aux différentes valeurs d'une fonction multiforme les procédés d'étude employés à l'égard des fonctions uniformes sans points critiques.

Or, il est quelquefois utile, nécessaire même, d'envisager, non pas l'une des valeurs d'une fonction multiforme Y de x, répondant à une valeur de x, mais l'*ensemble de toutes ces valeurs.*

2. Soit

$$D_x(Y)$$

l'ensemble des points y correspondant à une valeur donnée x de la variable. Nous dirons que $D_x(Y)$ est la *détermination,* pour la valeur donnée x de la variable, de la fonction *complète* Y de X.

Les différents points y, variables avec x, dont l'ensemble constitue la détermination $D_x(Y)$, sont fonctions de x; mais chacune de ces fonctions n'est *qu'une partie* de la fonction *complète* Y : nous désignerons ces fonctions par le nom de *fonctions partielles.*

Plusieurs de ces fonctions partielles y, parties d'une même fonction complète Y, deviennent égales en certains points x; ces points sont, à l'égard des fonctions partielles qui y deviennent égales, des points *critiques :* si x passe par un de ces points, l'une des fonctions partielles, y_1 par exemple, pourra être continuée par l'une quelconque des fonctions partielles y_2, y_3, ..., qui deviennent égales à y_1 en ce point; si x décrit un contour fermé enfermant un de ces points, les fonctions partielles qui sont égales en ce point *se permutent entre elles,* mais l'ensemble n'a pas changé : la détermination $D_x(Y)$ de la fonction *complète* Y n'a pas varié.

Les points critiques des fonctions partielles y ne sont donc pas des points critiques à l'égard de la fonction complète : ce sont des points *multiples*, en ce sens que le nombre des valeurs distinctes y de Y est moindre en ces points qu'en des points ordinaires, points doubles si deux des valeurs de Y y sont égales, points triples si trois des valeurs de Y y sont égales, etc.

Ces points sont encore remarquables à d'autres égards : supposons que n des fonctions partielles y dont se compose Y prennent la valeur β lorsque x est en un point critique α de ces n fonctions : si x est infiniment voisin de α, les valeurs correspondantes

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

des n fonctions partielles considérées seront *infiniment voisines* de β, et, par suite, infiniment voisines entre elles. (Nous supposons, bien entendu, que la fonction complète Y, c'est-à-dire chacune des fonctions partielles dont elle se compose, est continue.)

Ajoutons enfin qu'on pourra considérer n des fonctions partielles qui composent la fonction complète Y comme formant *une fonction partielle multiforme.* Cette considération est particulièrement utile lorsque ces n fonctions, *à l'exclusion* des autres, deviennent égales en α.

Éclaircissons tout ceci par des exemples.

Considérons d'abord la fonction complète

$$\sqrt[3]{x},$$

qui a trois valeurs et que nous écrirons ainsi

$$Y = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\sqrt[3]{x},$$

où λ_1, λ_2, λ_3 sont les racines cubiques de l'unité, et $\sqrt[3]{x}$ l'une quelconque des trois valeurs de Y.

En dehors du point multiple zéro, Y se décompose en trois fonctions partielles uniformes

$$y_1 = \lambda_1 \sqrt[3]{x}, \qquad y_2 = \lambda_2 \sqrt[3]{x}, \qquad y_3 = \lambda_3 \sqrt[3]{x},$$

pour lesquelles le point zéro est un point critique.

Considérons maintenant la fonction complète

$$\sqrt[3]{x-a} + \sqrt[5]{x-b},$$

que nous écrirons ainsi

$$Y = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\sqrt[3]{x-a} + (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)\sqrt[5]{x-b},$$

où les λ sont les racines cubiques de l'unité et les μ les racines cinquièmes de l'unité. Cette fonction complète, dont la détermination comprend quinze points, se décompose, en dehors de ses points multiples a et b, en quinze fonctions partielles uniformes

$$y_{i,j} = \lambda_i \sqrt[3]{x-a} + \mu_j \sqrt[5]{x-b}$$
$$(i = 1, 2, 3, \; j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Le point multiple a est, pour Y, un point triple; le point multiple b est un point quintuple.

La fonction Y peut également être décomposée en trois fonctions partielles multiformes ayant chacune cinq valeurs

$$u_j = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\sqrt[3]{x-a} + \mu_j \sqrt[5]{x-b} \qquad (j = 1, 2, 3, 4, 5),$$

ou en cinq fonctions partielles multiformes ayant chacune trois valeurs

$$v_i = \lambda_i \sqrt[3]{x-a} + (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)\sqrt[5]{x-b} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Le point a est un point multiple (triple) pour les fonctions partielles u_j et un point critique pour les fonctions partielles v_i; le point b est un point critique pour les fonctions partielles u_j et un point multiple (quintuple) pour les fonctions partielles v_i : les fonctions u_j

se permutent entre elles lorsque x décrit un contour fermé autour du point b et reprennent la même détermination lorsque x décrit un contour fermé autour du point a ; les fonctions v_i se permutent entre elles lorsque x décrit un contour fermé autour de a et reprennent la même détermination lorsque x décrit un contour fermé autour de b.

3. Nous devons encore faire la remarque suivante, qui précisera la nature d'une fonction *complète :*

Soit y_1 une fonction partielle uniforme, partie d'une fonction complète Y.

En faisant suivre à x différents contours fermés, y_1 prend différentes valeurs

$$y_2, \quad y_3, \quad \ldots$$

lorsque x est revenu à son point de départ. Si l'on considère *tous les contours fermés possibles dont le point de départ est un point ordinaire* x_0, et si

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n, \quad \ldots$$

sont toutes les fonctions partielles obtenues, l'ensemble de ces fonctions formera une fonction *complète* Y_1, car cette fonction Y_1 reprendra la *même détermination* lorsque x reviendra en x_0 après avoir parcouru un chemin quelconque.

Si alors cette fonction complète Y_1 n'est pas identique à la fonction complète Y, d'où nous avons tiré y_1, la fonction Y *est décomposable en au moins deux fonctions complètes dont l'une est* Y_1.

Il est d'ailleurs évident qu'on pourra considérer, dans quelques problèmes, l'ensemble de *plusieurs fonctions complètes;* mais, dans ce cas, nous dirons que la fonction considérée est *une fonction composée,* et nous réserverons le nom de fonctions *complètes* aux fonctions indécomposables en d'autres fonctions n'ayant pas de points critiques ou n'ayant que des points multiples.

Ainsi, par exemple, la fonction

$$\sqrt[6]{(x-a)^2}$$

est une fonction *composée;* elle se décompose (dans tout le plan) en deux fonctions

$$+\sqrt[3]{x-a}, \quad -\sqrt[3]{x-a}.$$

Chacune de ces deux fonctions est une fonction *complète* qui ne se décompose qu'en fonctions *partielles* (au nombre de trois) qui ont un point critique $x=a$.

En résumé :

Une fonction partielle a toujours des points critiques; elle a aussi des points multiples si elle est multiforme, c'est-à-dire si elle a plusieurs valeurs.

Une fonction complète n'a pas de points critiques; si elle a plus d'une valeur, elle a des points multiples, c'est-à-dire des points où certaines des fonctions partielles en lesquelles elle se décompose deviennent égales. Lorsque x décrit un contour fermé autour d'un de ces points, les fonctions partielles se permutent entre elles et la fonction complète reprend la même valeur. Une fonction complète est indécomposable en deux ou plusieurs fonctions complètes.

Une fonction composée est un ensemble de fonctions complètes.

En particulier, une fonction uniforme qui a des points critiques est une fonction *partielle* uniforme et une fonction uniforme qui n'a pas de points critiques est une fonction *complète* uniforme : les polynomes, les fractions rationnelles sont des fonctions complètes uniformes. Nous avons ainsi caractérisé la distinction que nous avons établie, au commencement de cette Note, entre deux catégories de fonctions uniformes.

4. Les considérations qui précèdent permettent d'aborder l'étude générale des fonctions qui restent invariables lorsqu'on fait à x certaines substitutions.

Considérons une fonction complète multiforme Y de X se décomposant, en dehors de ses points multiples, en fonctions partielles uniformes, et soient

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots$$

les valeurs de ces fonctions partielles en un point ordinaire x_1. Considérons maintenant la fonction X de Y, inverse de la précédente, et supposons que cette fonction soit multiforme. Si nous donnons à la variable indépendante Y la valeur y_1, prise dans les précédentes, nous obtenons pour X une détermination

$$D_{y_1}(X)$$

formée de points x parmi lesquels se trouve la valeur x_1, précédemment choisie.

De même, les valeurs y_2, y_3, ... précédentes donnent pour X les déterminations respectives

$$D_{y_2}(X), \quad D_{y_3}(X), \quad \ldots,$$

qui comprennent chacune le point x_1. Or il peut arriver que toutes ces déterminations de X aient encore d'autres points communs x_2, x_3, ... (nous en verrons des exemples) : il s'ensuit que, pour tous ces points communs x_1, x_2, x_3, ..., la détermination de Y est la même :

$$D_{x_1}(Y) = D_{x_2}(Y) = D_{x_3}(Y) = y_1, y_2, y_3, \ldots.$$

Or, lorsqu'on se donne x_1, les points x_2, x_3, ... sont déterminés d'après ce qui précède ; x_2, x_3, x_4, ... sont donc des fonctions de x_1 :

$$x_2 = s_2(x_1), \qquad x_3 = s_3(x_1), \qquad \ldots,$$

et ces fonctions sont telles que, substituées à la variable x_1, la fonction Y *reste identiquement la même,* ou, si l'on veut, posant $Y = F(x)$, on aura

$$F(x) = F[s_2(x)] = F[s_3(x)] = \ldots.$$

Pour abréger le langage, nous appellerons *substitutions d'invariabilité de* Y, ou simplement *substitutions de* Y, les fonctions $s_2(x)$, $s_3(x)$, ... elles-mêmes.

Posons

$$s_i(x) = x + p_i(x).$$

Il arrive quelquefois que la quantité $p_i(x)$, déterminée par cette égalité, est constante : dans ce cas particulier, on l'a désignée par le nom de *période*.

Ayant ici à envisager des quantités analogues, mais en général variables, nous désignerons par le nom de *période* toute quantité telle que

$$p_i(x) = s_i(x) - x,$$

c'est-à-dire *toute quantité, constante ou fonction de x, qui, ajoutée à x, ne change pas la valeur de la fonction* $Y = F(x)$. Cette fonction sera alors appelée une fonction *périodique*.

Ainsi, dans la fonction $\sin x$ nous envisagerons les *périodes constantes*

$$2m\pi \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

et les *périodes variables*

$$(2m+1)\pi - 2x \quad (^1),$$

---

(1) On a coutume, dans la théorie des fonctions elliptiques, de n'attacher d'importance qu'aux deux périodes constantes ou aux substitutions de la forme $2m\omega + 2n\omega' + x$. Les périodes variables, ou les substitutions de la forme

$$2m\omega + 2n\omega' - x \qquad \text{ou} \qquad (2m+1)\omega + 2n\omega' - x,$$

ont autant d'importance que les premières pour l'existence des foncqui ont autant d'importance que les premières pour l'existence de $\sin x$.

Nous étudierons d'ailleurs des fonctions *périodiques* qui n'ont aucune période constante.

De l'étude précédente il résulte :

1° Qu'une fonction multiforme n'admet pas généralement de substitutions d'invariabilité, ou, selon notre définition, n'est pas généralement périodique; car, pour qu'elle soit périodique, il est nécessaire et d'ailleurs suffisant que les déterminations $D_{y_1}(X)$, $D_{y_2}(X)$, ... de la fonction inverse, comprennent *plusieurs* points communs

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots,$$

$y_1, y_2, y_3, \ldots$ étant tous les points de la détermination de Y :

$$D_{x_1}(Y).$$

En particulier, toute fonction complète multiforme Y de X, inverse d'une fonction complète *uniforme* X de Y *n'est pas périodique,* car la détermination de X, lorsqu'on se donne une valeur de Y, ne comprend qu'*un point.*

---

tions elliptiques, car on peut démontrer qu'il n'y a que la fonction exponentielle qui ait *seulement* des substitutions de la forme

$$x + \text{const.},$$

c'est-à-dire qui ait *seulement* des périodes constantes.

Quant à l'usage que nous faisons ici des expressions de *périodes* et de *fonctions périodiques,* il n'est destiné qu'à abréger le langage et non à soulever une question de doctrine. Il est d'ailleurs justifié en ce sens que, dans le langage ordinaire et même dans les théories astronomiques, on appelle *phénomènes périodiques* des phénomènes qui, on l'a reconnu depuis longtemps, n'ont pas de *périodes constantes,* de sorte que les fonctions qui représenteraient *exactement* ces phénomènes ne pourraient être que des fonctions *périodiques* à *périodes variables,* fonctions évidemment de la variable indépendante.

2° Toute fonction complète uniforme Y de X, autre qu'une fonction linéaire, est une fonction *périodique* de X, car tous les points

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots$$

de la détermination de X obtenue par un point y_1 sont tels que

$$D_{x_1}(Y) = D_{x_2}(Y) = D_{x_3}(Y) = \ldots = y_1.$$

En particulier, un polynome ou une fraction rationnelle de degré n est une fonction *périodique* qui a $n-1$ substitutions, car la fonction inverse a n valeurs.

Il est facile de construire des fonctions multiformes périodiques de la manière suivante : Soit $P(x)$ une fonction complète uniforme, par exemple une fonction rationnelle de degré n et soit $\Phi(x)$ la fonction inverse d'une autre fonction complète uniforme, par exemple $\arcsin x$; la fonction

$$F(x) = \Phi[P(x)] = \arcsin P(x)$$

admet les $n-1$ substitutions de $P(x)$ et n'admet que celles-là, car la fonction $\Phi(x) = \arcsin x$ n'est pas périodique. La fonction $\Phi[P(x)]$ est donc une fonction complète multiforme périodique.

Les fonctions multiformes périodiques, obtenues par ce procédé, sont telles que les fonctions partielles y_1, $y_2, y_3, \ldots$, en lesquelles elles se décomposent, sont *elles-mêmes périodiques* et ont, toutes, les mêmes substitutions.

Mais il est évident que d'autres cas peuvent se présenter, où certaines substitutions, au moins, de la fonction complète Y ne laissent pas invariables les fonctions partielles y_1, y_2, y_3, ..., mais les permutent.

5. Nous appellerons *groupe de substitutions* d'une

fonction complète périodique $Y = F(x)$, multiforme ou uniforme, l'ensemble des substitutions $s(x)$ qui laissent invariable cette fonction complète, et parmi les fonctions multiformes périodiques nous considérerons particulièrement celles pour lesquelles les déterminations $s(x)$ forment, avec x, *tous* les points de la substitution $D_y(X)$ de la fonction inverse [ce qui arrive toujours dans le cas des fonctions $F(x)$ complètes uniformes]. Pour toutes ces fonctions, on pourra dire que le groupe des substitutions, auxquelles on adjoint x, n'est autre que la *détermination* $D_y(X)$ de la *fonction inverse dont tous les points sont considérés comme fonction de l'un quelconque d'entre eux.*

Les points multiples de la fonction multiforme X de Y, inverse de la fonction Y de X, sont des points y où plusieurs des fonctions partielles X deviennent égales. Soit $y = \beta$ un de ces points, et soit $x = \alpha$ la valeur commune, en ce point, des fonctions partielles qui y deviennent égales; si ces fonctions partielles, considérées comme fonctions de la première, sont

$$s_1(x), \quad s_2(x), \quad s_3(x), \quad \ldots,$$

on aura

$$s_1(\alpha) = s_2(\alpha) = s_3(\alpha) = \ldots = \alpha.$$

Les points α ainsi déterminés sont donc tels que plusieurs substitutions du groupe y deviennent égales; ces valeurs de x seront appelées les *points multiples* du groupe; ce qui précède montre que ces points sont les valeurs α de la fonction multiforme X de Y qui sont déterminées par les points multiples β de la fonction X de Y, inverse de la fonction périodique Y considérée.

Les fonctions multiformes que l'on a étudiées jusqu'ici en Mathématiques sont telles que leur détermination $D_x(Y)$, pour un point x de la variable, ne comprend, sauf pour des points x particuliers, que des points isolés séparés les uns des autres par des intervalles non infiniment petits. Si donc nous considérons une fonction périodique Y de X, dont l'inverse jouit de la propriété précédente, les points

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots$$

de la détermination $D_y(X)$ formeront un ensemble *discontinu*, sauf pour certaines valeurs particulières de Y qui sont, comme nous l'avons vu précédemment, les points multiples de la fonction X de Y. Mais ces points x ne sont autres que

$$x, \quad s_1(x), \quad s_2(x), \quad \ldots.$$

Dans le cas considéré, le groupe de la fonction périodique Y sera donc *discontinu*, sauf en certains points que l'étude précédente fait connaître : lorsque x sera infiniment voisin d'un point multiple α du groupe, les points $s_1(x)$, $s_2(x)$, ... seront également infiniment voisins de α, et par conséquent infiniment voisins de x (nous supposons, bien entendu, que la fonction X de Y est continue dans le domaine de ces points). Il s'ensuit que les périodes

$$s_i(x) - x = p_i(x),$$

relatives aux substitutions s_i qui s'égalent en un point multiple α, sont *infinitésimales* dans le domaine de ce point. Si l'on remarque que toute fonction complète multiforme X de Y a nécessairement des points multiples α (ce qui revient à dire que toute fonction partielle a nécessairement des points critiques), on voit que *tout groupe a des points multiples, et, par conséquent, que tout groupe discontinu pour des points x quelconques cesse d'être discontinu dans le domaine de certains points x* qui ne sont autres que des points multiples. Le raisonnement précédent suppose que le point multiple α est à distance finie, et tombe lorsque ce point est rejeté à l'infini. Les substitutions, en groupe discontinu de la fonction $\sin x$, donnent un exemple simple de l'un et l'autre cas : la substitution

$$(2m+1)\pi - x \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

est infiniment voisine de x, lorsque x diffère infiniment peu de $\frac{(2m+1)\pi}{2}$ ou, si l'on veut, la période

$$(2m+1)\pi - 2x$$

est infinitésimale dans le voisinage du point $\frac{(2m+1)\pi}{2}$, qui est un point multiple où les deux substitutions

$$[2(m+p)+1]\pi - x, \quad 2p\pi + x \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

deviennent égales. Les substitutions

$$2m\pi + x,$$

qui, d'ailleurs, forment le groupe des substitutions de la fonction $e^{x\sqrt{-1}}$, n'ont pas de points multiples à distance finie, et l'on voit qu'aucune des périodes de ce groupe n'est infinitésimale pour aucune valeur de x.

Dans certains des cas particuliers étudiés jusqu'ici, on a appelé (1) *groupe proprement discontinu* un groupe discontinu dans lequel aucune période n'est infinitésimale pour une valeur de x, et *groupe improprement discontinu* un groupe discontinu dans lequel certaines périodes au moins sont infinitésimales dans le domaine de certains points particuliers. Ce qui précède montre que tout groupe proprement discontinu n'a pas

(1) M. Poincaré, *Théorie des groupes fuchsiens et kleinéens.*

de point multiple à distance finie, c'est-à-dire que l'équation

$$s_i(x) = x \qquad \text{ou} \qquad p_i(x) = 0$$

n'a aucune solution finie, quelle que soit la substitution $s_i(x)$ du groupe; toutes les substitutions du groupe sont alors de la forme

$$x + \text{const.};$$

il n'y a donc pas d'autre groupe proprement discontinu que celui de la fonction exponentielle $e^{\alpha x}$; il n'y a donc pas lieu de faire la distinction précédente entre les divers groupes discontinus, puisque l'une des deux catégories qu'elle distingue se réduit à un groupe particulier.

6. Mais, à l'égard des groupes continus, il y a lieu de faire une distinction analogue beaucoup plus importante. On appelle *groupe continu* tout groupe qui contient des périodes qui sont infinitésimales quel que soit x. Nous allons d'abord montrer qu'il existe des fonctions périodiques ayant des *groupes continus* de substitutions.

Considérons la fonction complète multiforme

$$y = x^m,$$

où m est un nombre réel et incommensurable. On reconnaît facilement que cette fonction complète a pour détermination $D_x(y)$ une infinité de points infiniment voisins les uns des autres sur une circonférence ayant l'origine pour centre, et qu'il n'existe aucun arc fini de cette circonférence sur lequel ne se trouvent une infinité de points y. Cependant il y a des points de la circonférence qui n'appartiennent pas à la détermination $D_x(y)$, car s'il n'en existait pas, la détermination de x^m et celle de $x^{\frac{m}{2}}$ seraient identiques pour $|x| = 1$, car elles se composeraient toutes deux de tous les points de la circonférence de rayon *un*, et alors les racines $\frac{1}{m^{\text{ièmes}}}$ et $\frac{2}{m^{\text{ièmes}}}$ de l'unité seraient identiques; cela est impossible, car l'équation $\lambda^{\frac{2}{m}} = 1$ admet, outre les racines de l'équation $\lambda^{\frac{1}{m}} = 1$, toutes celles de l'équation $\lambda^{\frac{1}{m}} = -1$. On ne peut donc pas dire que la détermination $D_x(y)$ se compose d'une suite *continue* de points, au sens propre du mot; toutefois, nous pouvons dire que cet ensemble de points est *improprement continu sur la circonférence de rayon* $|x^m|$, entendant par cette expression que sur cette circonférence existent une infinité de points y infiniment voisins les uns des autres, que sur tout arc fini, si petit soit-il, se trouvent des points y, sans d'ailleurs que les points y constituent la ligne *continue* qu'est la circonférence, ni même aucun arc continu au sens géométrique, de *lieu d'un point en mouvement continu*.

Nous ne connaissons aucune fonction dont la détermination $D_x(y)$ se compose, quel que soit x, de lignes au sens géométrique du mot; s'il en existait, on pourrait les appeler des fonctions *proprement linéales*, leur détermination étant *proprement continue*, c'est-à-dire une ligne géométrique. Dans tous les cas, on pourra appeler *fonctions improprement linéales* des fonctions, telles que la précédente, dont la détermination est, quel que soit x (sauf aux points multiples), *improprement continue sur une ligne continue*.

Les fonctions

$$y_1 = \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^m, \qquad y_2 = [(x-a)^n + b]^m + c,$$

où m est incommensurable et n commensurable, sont, comme la précédente, des fonctions *improprement linéales*. La détermination $D_x(y_1)$ de la première se compose d'une infinité de points infiniment voisins sur une circonférence, pour toute valeur de x autre que a ou b. Si $n = \frac{p}{q}$, la détermination $D_x(y_2)$ de la seconde se compose d'une infinité de points infiniment voisins sur q circonférences de centre c. Si, dans cette dernière, on suppose n incommensurable et m commensurable $= \frac{p}{q}$, la fonction est encore *improprement linéale;* les points y en suite improprement continue, sont situés sur une courbe sinueuse qui oscille entre les deux circonférences de centre c et de rayons

$$\operatorname{mod}[\operatorname{mod}(x-a)^n \pm \operatorname{mod} b]^m,$$

lorsque $\operatorname{mod}(x-a)^n > \operatorname{mod} b$.

Lorsque

$$\operatorname{mod}(x-a)^n < \operatorname{mod} b,$$

la courbe précédente est remplacée par q ovales égaux disposés régulièrement dans la couronne précédente.

Les inverses des trois fonctions considérées sont également des fonctions *improprement linéales*. On voit facilement que chacune des fonctions y, y_1, y_2 admet des substitutions; leurs groupes seront donc *improprement continus;* en particulier, le groupe de la fonction y_1 est un groupe linéaire continu (improprement).

Nous appellerons fonctions *ponctales* les fonctions, telles qu'on les a considérées jusqu'ici, dont la détermination est un ensemble *discontinu* de points (sauf dans le domaine d'un point multiple). On voit que les fonctions ponctales X de Y donnent lieu à des fonctions périodiques Y de X dont les groupes sont discontinus, et que les fonctions improprement linéales X de Y donnent lieu à des fonctions périodiques Y de X dont les groupes sont improprement continus (sur une ligne).

7. Considérons la fonction y_2 de l'exemple précédent, mais en supposant maintenant que m et n soient tous deux incommensurables. On voit facilement que la détermination $D_x(y_2)$ de cette fonction se compose, quel que soit x (sauf les points multiples), d'une double infinité de points y_2 situés dans la couronne du centre c dont il a été question tout à l'heure, tels que tout point y_2 est entouré, dans une infinité de directions, d'une infinité de points analogues infiniment voisins, et que toute aire finie, si petite soit-elle, prise dans la couronne, contient une infinité de ces points y_2, sans que cependant *tous* les points que l'on peut prendre dans la couronne fassent partie de $D_x(y_2)$.

Sans préjuger l'existence de fonctions dont la détermination $D_x(y_2)$ serait, quel que soit x (sauf certains points), une *aire* au sens géométrique du mot, et qu'on pourrait appeler, pour cette raison, des fonctions *proprement aréales,* nous dirons que la fonction précédente, dont la détermination $D_x(y_2)$ est un ensemble de points doublement continu (improprement) dans une aire, *est une fonction improprement aréale.*

La fonction inverse de y_2 est encore une fonction aréale; on voit que des fonctions X de Y, improprement aréales, donnent lieu à des fonctions *périodiques* Y de X dont les groupes sont improprement continus (dans une aire). On peut dire, si l'on veut, que la continuité de ces groupes est double, tandis que la continuité des groupes engendrés par les fonctions improprement linéales est simple.

Si l'on considère une fonction périodique quelconque

$F(x)$, toutes les substitutions $s(x)$ de son groupe satisfont à l'équation

$$F(s) = F(x).$$

De cette équation on peut tirer toutes les propriétés générales des groupes quelconques, discontinus ou improprement continus.

Cette étude sera sans doute l'objet d'une nouvelle Note.