Nouvelles annales de mathématiques

Ernest Duporcq

Solution de la question de mathématiques spéciales proposée en 1900 au concours d'agrégation des sciences mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 135-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__135_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE EN 1900 AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES;

PAR M. ERNEST DUPORCQ.

1° On sait que, pour qu'il existe au moins une quadrique indécomposable passant par une droite et une conique, il faut et suffit que la droite coupe la conique sans être dans son plan; corrélativement, pour qu'il existe au moins une quadrique indécomposable passant par une droite D et inscrite à un cône C, il faut et il suffit que D touche C sans passer par son sommet. Par suite, dans le cas actuel, D devra être contenue dans l'un des plans xOy ou xOz, sans passer par O.

2° D étant ainsi choisie, par exemple, dans le plan xOy, toutes les quadriques S qui répondent à la question forment un réseau tangentiel, et le lieu de leurs centres doit bien être un plan P. Il est facile à déterminer : soit, en effet, R le plan tangent au cône C, qu'on peut, outre xOy, mener parallèlement à D; toutes les quadriques S touchent ce plan, et aussi, bien évidemment, le plan parallèle issu de D : leurs centres sont donc dans le plan P, parallèle à R et équidistant de ce plan et de la droite D.

3° Le plan P étant ainsi parallèle à un plan R tangent au cône C, s'il est assujetti à contenir un point fixe A, il enveloppera évidemment le cône homothétique à C et dont A est le sommet. Quant à la droite D, soit D′ sa symétrique par rapport au point A; elle est dans le plan U, symétrique de xOy relativement à A, et elle est aussi, d'après la seconde partie, dans le plan R tangent à C : l'enveloppe de D′ est donc la section de C par le plan U, c'est-à-dire une parabole Q′, dont la symétrique Q, par rapport à A, constitue l'enveloppe de D.

4° Il n'existe qu'un plan U, parallèle à xOy, et tel que la parabole Q′, suivant laquelle il coupe C, ait un paramètre donné : il en résulte que, pour que Q admette ce paramètre fixe, A doit se trouver dans le plan équidistant des plans U et xOy.

5° Soit Π un plan tangent à une quadrique S inscrite à C et contenant D; ce plan contient une génératrice Δ de S, qui s'appuie sur D; or, cette génératrice doit aussi toucher C : c'est donc la trace sur le plan Π du plan tangent à C, autre que xOy, qu'on peut mener par le point où D perce le plan Π. Cette droite Δ est donc commune à toutes les quadriques S qui touchent le plan Π.

Si Π se déplace arbitrairement, la congruence des droites Δ est formée des tangentes au cône C qui s'appuient sur D. Il en passe évidemment deux par tout point de l'espace : elles rencontrent D dans les plans tangents à C issus de ce point.

Enfin si Δ reste dans un plan fixe issu de D, elle touche la section de C par ce plan, et c'est évidemment cette conique qui constitue alors l'enveloppe du plan Π.