NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1900. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 131-135

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__131_1>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1900. — COMPOSITIONS.

Nancy.

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Une sphère homogène et pesante, de diamètre égal à* 1^m, *se meut dans un fluide incompressible, homogène, pesant, indéfini, en repos à l'infini. La densité de la sphère est égale à* 2, *celle du fluide est égale à* 1. *A l'instant initial, le centre* A *de la sphère est animé d'une vitesse horizontale* A_0V_0 *de* 2^m *par seconde, et la sphère est animée d'un mouvement de rotation qui lui fait faire* 30 *tours par minute dans le sens direct autour de la zénithale passant par* A_0; *il n'y a pas de tourbillon dans le fluide.*

A quel instant le centre A *de la sphère se sera-t-il abaissé de* $10^m,2$? *Quelle est la position de* A *par rapport à* A_0 *à cet instant? Quel est l'état des vitesses du solide et du fluide à cet instant?*

Épreuve pratique. — *Sur l'une des bases d'un cylindre droit à base circulaire est soudé par sa grande base un tronc de cône; sur l'autre base du cylindre est soudé par sa section équatoriale un demi-ellipsoïde de révolution, les trois corps sont homogènes. La hauteur du cylindre est égale au diamètre de ses bases; sa masse est de* 25^{kg} *et sa densité de* 7,7; *la hauteur du tronc de cône est égale aux* $\frac{3}{8}$ *du diamètre de sa grande base, sa masse est de* $3^{kg},9$ *et sa densité de* 5,5; *le demi-axe de l'ellipsoïde de révolution dirigé suivant le prolongement de l'axe du cylindre est égal à la hauteur du tronc de cône et sa masse est de* 5^{kg}.

Évaluer le moment d'inertie du solide total par rapport à une génératrice du tronc de cône.

Géométrie supérieure.

Épreuve écrite. — I. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère dans le plan* xOy *la parabole* (P) *définie par l'équation*

$$y^2 = 2p(x - h).$$

1° *Former l'équation de la surface* (E) *enveloppe d'une sphère variable* (Σ) *passant par l'origine et dont le centre décrit la parabole* (P). *Étudier la section de* (E) *par le plan* xOy, *et la surface inverse de* (E) *en prenant pour centre d'inversion l'origine et pour module le carré du paramètre de* (P).

2° *Soit* (S) *une sphère tangente à l'origine au plan* xOy; *démontrer que le cercle suivant lequel* (Σ)

touche (E) *est orthogonal à* (S), *et que* (E) *et* (S) *se coupent orthogonalement en tous les points de leur intersection. Lignes de courbure de la surface* (E).

3° *Dans quel cas les deux familles de lignes de courbure de* (E) *se composent-elles de cercles? Déterminer la deuxième famille de sphères dont* (E) *est l'enveloppe, et trouver le lieu des centres de ces sphères.*

II. *On considère la surface engendrée par une droite* G *s'appuyant sur deux droites rectangulaires non concourantes et faisant un angle constant avec l'une d'elles; déterminer les trajectoires orthogonales des génératrices* G.

Épreuve pratique. — III. *On donne une parabole* (P) *dans un plan horizontal; un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est de* 45° *se déplace de façon que son axe reste vertical et que son sommet décrive la parabole* (P). *Déterminer l'enveloppe de ce cône, ainsi que l'arête de rebroussement et les lignes de courbure de cette enveloppe. Construire la projection horizontale de la section de la surface enveloppe ainsi définie par un plan parallèle au plan de la parabole* (P) *et dont la distance à ce plan est égale au double du paramètre de la parabole.*

I. La surface (E) a pour équation

$$x(x^2+y^2+z^2)+py^2-2hx^2=0;$$

elle est anallagmatique; son inverse est un cylindre et sa section par le plan des xy est la podaire de la parabole (P); ses lignes de courbure sont les cercles caractéristiques et les courbes suivant lesquelles elle est coupée par les sphères (S); elle est une cyclide de Dupin si l'origine est foyer de la parabole (P); le lieu des centres des sphères de la deuxième famille inscrites dans la surface est la parabole focale de la première.

II. Si l'on prend comme axe des z la droite avec laquelle G fait un angle constant, et si $z = 0$, $x = 0$ sont les équations de l'autre droite, la projection d'une trajectoire orthogonale des droites G sur le plan des xy a pour équation

$$\rho = \frac{a \cos^2 \alpha}{\cos \theta} + c,$$

ρ et θ étant les coordonnées polaires d'un point, α l'angle constant donné, c une constante arbitraire.

III. L'enveloppe est une surface développable dont les génératrices font 45° avec le plan horizontal et se projettent suivant les normales à la parabole (P). Les lignes de courbure sont les génératrices et les lignes de niveau.

Astronomie.

Épreuve écrite. — I. *Expliquer comment on détermine les quatre éléments qui définissent le plan, la forme et l'orientation de l'ellipse décrite par la Lune autour de la Terre.*

II. *Soient* O, A, A′ *trois points matériels de masses* 1, m, m', *s'attirant suivant la loi de Newton; les données initiales sont telles que les mouvements non troublés de* A *et de* A′ *par rapport à* O *soient les mouvements elliptiques; on désignera par* a, a', e, e', ϖ, ϖ', n, n' *les demi-grands axes, les excentricités, les longitudes des périhélies et les moyens mouvements de* A *et de* A′ *dans ces mouvements non troublés, à* $t = 0$.

On sait que, en négligeant les carrés des masses m, *m' et les produits de ces masses par les carrés des excentricités e et e' et des inclinaisons, l'excentricité* e_t *du mouvement elliptique auquel le mouvement troublé de* A *est tangent à l'instant t peut être représentée, pour des valeurs suffisamment petites de t, par la formule*

$$e_t = e + an e' m C t \sin(\varpi - \varpi'),$$

où C *désigne une fonction symétrique de a et a'.*

Ceci posé, on demande d'évaluer une limite supérieure que ne peut atteindre e_t *pendant le temps dans lequel on peut envisager la formule précédente comme exacte, et d'effectuer les calculs numériques en prenant pour les constantes relatives à* A *et* A', *pour* $t = 0$, *les valeurs fournies par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes *pour Jupiter et Mars.*