NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

Sur les solides dont le volume s'exprime au moyen de deux formules élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 129-131

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__129_1>

[O5a]

SUR LES SOLIDES DONT LE VOLUME S'EXPRIME AU MOYEN DE DEUX FORMULES ÉLÉMENTAIRES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Quand l'aire de section faite dans un solide S par un plan quelconque parallèle à un plan fixe P est une fonction entière du second ou du troisième degré de sa distance z au plan P, on connaît la formule simple qui donne le volume d'un segment de S compris entre deux plans parallèles à P : existe-t-il d'autres solides pour lesquels la formule soit applicable quand on prend arbitrairement les distances des bases du segment au plan P? J'ai répondu négativement dans le numéro de juillet 1895, mais en particularisant la forme de la fonction $\varphi(z)$ qui exprime l'aire d'une section : il est facile de lever toute restriction sur la forme de $\varphi(z)$. On doit avoir, quels que soient x et y,

$$(1)\qquad \int_{x-y}^{x+y} \varphi(z)\,dz = \frac{y}{3}[\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+4\varphi(x)];$$

différentiant deux fois par rapport à x, on a

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi'(x+y)-\varphi'(x-y) \\ \quad =\frac{y}{3}[\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+4\varphi''(x)]. \end{cases}$$

Différentiant au contraire (1) deux fois par rapport à y, après avoir d'abord multiplié par 3, on trouve, avec de simples réductions,

$$\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)=y[\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)].$$

La comparaison avec (2) donne l'équation fonctionnelle de forme connue

$$\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)=2\varphi''(x);$$

d'ailleurs, si on la différentie par rapport à y, on voit que $\varphi'''(x+y)$ doit être égal à $\varphi'''(x-y)$: c'est dire que $\varphi'''(z)$ doit être constant et $\varphi(z)$ un polynome du troisième degré.

Si l'on fait varier seulement la hauteur du segment considéré, en laissant fixe la section moyenne dont on peut supposer le z nul, on trouve que $\varphi(z)$ doit être un trinome du second degré augmenté d'une fonction impaire quelconque de z.

Lorsque S est un cône, le volume du segment ou tronc est donné par une formule encore plus élémentaire; cette formule est-elle applicable à des segments de solides pour lesquels $\varphi(z)$ n'aurait pas la forme simple $A^2(z-c)^2$ qui convient au cône ? Non encore. Remplaçant $\varphi(z)$ par $F^2(z)$, on devrait avoir, quels que soient x et y,

$$\int_x^y F^2(z)\,dz=\frac{y-x}{3}[F^2(x)+F^2(y)+F(x)F(y)].$$

Multiplions par 3 et différentions par rapport à y : le résultat peut s'écrire

$$2F^2(y) - F(x)F(y) - F^2(x) = (y-x)[2F(y) + F(x)]F'(y);$$

on peut diviser par $2F(y) + F(x)$, et il reste

$$F(y) - F(x) = (y-x)F'(y).$$

La différentiation relative à x eût donné de même

$$F(x) - F(y) = (x-y)F'(x).$$

$F'(x)$ et $F'(y)$ doivent donc être égaux, donc constants; $F(z)$ est de la forme $A(z-c)$ et $\varphi(z)$, $A^2(z-c)^2$, comme dans le cône.