NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BRICARD

Sur la similitude directe dans le plan, application de la méthode des équipollences

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 112-120

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__112_0>

[B12c]

SUR LA SIMILITUDE DIRECTE DANS LE PLAN, APPLICATION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES;

Par M. R. BRICARD.

---

1. Considérons un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy. On sait que la *méthode des équipollences* (Cauchy, Bellavitis) est un procédé de calcul géométrique dont voici le principe : Tout vecteur AB est représenté par la quantité complexe $x+yi$, x et y étant les projections de ce vecteur, respectivement sur Ox et sur Oy. Réciproquement, à toute imaginaire $x+yi$ correspond un vecteur défini en grandeur et en direction, mais non en position.

On a

$$AB = -BA.$$

Trois points quelconques A, B, C donnent lieu à l'identité entre vecteurs

$$AB + BC + CA = 0.$$

Enfin, la similitude *directe* de deux triangles $AA'A''$, $BB'B''$ s'exprime par l'égalité

$$\frac{AA'}{AA''} = \frac{BB'}{BB''}.$$

2. Ces principes étant rappelés, considérons deux triangles directement semblables $AA'A''$, $BB'B''$ et posons

$$\begin{array}{llll} \text{vecteur} & OA = x, & & OB = y, \\ \quad » & OA' = x', & & OB' = y', \\ \quad » & OA'' = x'', & & OB'' = y''. \end{array}$$

On a la relation

$$\frac{AA'}{AA''} = \frac{BB'}{BB''},$$

qui peut s'écrire

$$(1) \qquad \frac{x' - x}{x'' - x} = \frac{y' - y}{y'' - y}.$$

Si l'on considère (x, y), (x', y'), (x'', y'') comme les coordonnées cartésiennes de trois points (imaginaires), l'égalité précédente exprime que ces trois points sont en ligne droite.

Ainsi, *à tout système de deux triangles directement semblables, on peut faire correspondre un système de trois points en ligne droite, et réciproquement.*

Ce principe extrêmement simple permet de transformer les propriétés relatives à des systèmes de points (imaginaires) en ligne droite, en propriétés relatives à des figures semblables *réelles*. Nous donnerons deux exemples de cette méthode de transformation.

Remarquons auparavant que la valeur commune des rapports figurant dans l'égalité (1) est le rapport de division du segment joignant les points (x', y') et (x'', y''), par le point (x, y). Interprété au point de vue des équipollences, ce rapport de division devient le *rapport géométrique* des vecteurs $\frac{AA'}{AA''}$.

Si donc, dans l'énoncé de la propriété à transformer, figurent des relations entre rapports de division de segments par des points, on en déduira des relations entre rapports géométriques de vecteurs.

3. Considérons en premier lieu un triangle imaginaire $\alpha\alpha'\alpha''$, et soient, sur les côtés de ce triangle, trois

points λ, λ', λ'', tels que l'on ait

$$(2)\qquad \frac{\lambda\alpha'}{\lambda\alpha''}\,\frac{\lambda'\alpha''}{\lambda'\alpha}\,\frac{\lambda''\alpha}{\lambda''\alpha'} = 1.$$

On sait, par le théorème classique de Ménélaüs, que les trois points λ, λ', λ'' sont en ligne droite.

Pour transformer ce théorème, traçons à partir d'un point O deux vecteurs, dont l'un représente l'abscisse, l'autre l'ordonnée, imaginaires, du point α. Nous obtenons ainsi deux points réels A et B. Chaque point de la figure primitive donne ainsi naissance à deux points réels, d'après le tableau

α,	A	et	B;		λ,	L	et	M;
α',	A′	et	B′;		λ',	L′	et	M′;
α'',	A″	et	B″:		λ'',	L″	et	M″.

Les points λ, α' et α'' étant en ligne droite, les triangles $LA'A''$ et $MB'B''$ sont directement semblables. On a de même les couples de triangles semblables

$$L'A''A \quad \text{et} \quad M'B''B, \qquad L''AA' \quad \text{et} \quad M''BB'.$$

En outre, la relation (2) donne l'équipollence

$$(3)\qquad \frac{LA'}{LA''}\,\frac{L'A''}{L'A}\,\frac{L''A}{L''A'} = 1,$$

dont voici la signification géométrique : Menons du point O deux vecteurs OC' et OC'', équipollents respectivement à LA' et LA'', et un troisième vecteur OC, déterminé par la condition

$$\frac{OC''}{OC} = \frac{L'A''}{L''A'}.$$

L'équipollence (3) peut s'écrire

$$\frac{OC'}{OC''}\,\frac{OC''}{OC}\,\frac{L''A}{L''A'} = 1,$$

d'où

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{L''A}{L''A'}.$$

Autrement dit : Les triangles $LA'A''$, $L'A''A$, $L''AA'$ sont respectivement semblables aux triangles $OC'C''$, $OC''C$, OCC', formés en joignant le point O aux sommets du triangle $CC'C''$.

Réciproquement, le triangle $CC'C''$ étant quelconque, et les points L, L', L'' étant déterminés par les relations de similitude que nous venons d'indiquer, l'équipollence (3) est satisfaite.

Enfin, la conclusion du théorème de Ménélaüs se transforme en la suivante : *les triangles* $LL'L''$ *et* $MM'M''$ *sont directement semblables.*

Nous parvenons finalement à l'énoncé suivant :

Soient donnés dans un plan deux triangles quelconques $AA'A''$, $BB'B''$, *et d'autre part, un triangle* $CC'C''$ *et un point* O. *Sur les côtés du triangle* $AA'A''$ *construisons trois triangles* $LA'A''$, $L'A''A$, $L''AA'$ *directement semblables aux triangles* $OC'C''$, $OC''C$, OCC', *respectivement, on obtient ainsi trois points* L, L', L''; *au moyen du triangle* $BB'B''$ *déterminons de la même manière trois points* M, M', M''; *les triangles* $LL'L''$ *et* $MM'M''$ *sont directement semblables.*

Ou, plus brièvement :

Soient donnés, dans un plan, un triangle $CC'C''$ *et un point* O. *Sur les côtés d'un triangle quelconque* $AA'A''$, *construisons trois triangles* $LA'A''$, $L'A''A$, $L''AA'$, *directement semblables aux triangles* $OC'C''$, $OC''C$, OCC', *respectivement. La forme du triangle* $LL'L''$ *est indépendante de celle du triangle* $AA'A''$ *et dépend seulement de la forme de la figure* $OCC'C''$.

4. La seconde application est relative à un problème posé autrefois par Laguerre ([1]), et dont la solution n'a pas été donnée, à ma connaissance. Voici l'énoncé de ce problème :

Déterminer dans un plan deux systèmes de neuf points conjugués

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_8, \quad a_9.$$
$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_8, \quad b_9,$$

jouissant de la propriété qu'étant pris au hasard deux couples de points correspondants a_i et b_i, a_j et b_j, il existe toujours un autre couple de points correspondants a_k et b_k et un seul, tel que les deux triangles $a_i a_j a_k$ et $b_i b_j b_k$ soient semblables.

Nous admettrons que toutes les similitudes dont il est question dans cet énoncé sont *directes :* autrement, il pourrait se présenter un très grand nombre de cas dont l'examen successif serait interminable.

En appliquant à la figure qu'il s'agit de former notre méthode de transformation, on obtiendra une figure composée de neuf points, telle que toute droite contenant deux de ces points en contient un troisième.

Or, cette dernière configuration est bien connue : c'est celle que forment les neuf points d'inflexion d'une cubique sans point double. Rappelons brièvement les relations auxquelles ces points donnent lieu.

Ils sont disposés trois par trois sur douze lignes droites (il y aura donc douze couples de triangles semblables dans la figure que nous cherchons à former) et on les construit de la façon suivante : Soit *abc* un triangle quelconque; marquons sur *bc* trois points 1, 2, 3, sur *ca*

([1]) *Nouv. Ann.*, 1865, question 793.

trois points 4, 5, 6 et sur ab trois points 7, 8, 9, les rapports de division des côtés du triangle abc par ces divers points étant indiqués dans le tableau suivant :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{1b}{1c} = k, & \dfrac{2b}{2c} = \omega k, & \dfrac{3b}{3c} = \omega^2 k, \\[2mm] \dfrac{4c}{4a} = k', & \dfrac{5c}{5a} = \omega k', & \dfrac{6c}{6a} = \omega^2 k', \\[2mm] \dfrac{7a}{7b} = k'', & \dfrac{8a}{8b} = \omega k'', & \dfrac{9a}{9b} = \omega^2 k''; \end{cases}$$

k, k' et k'' étant trois nombres quelconques (réels ou non) satisfaisant à la relation

$$kk'k'' = 1,$$

et ω désignant une racine cubique imaginaire de l'unité.
On voit immédiatement que chacune des douze triades suivantes

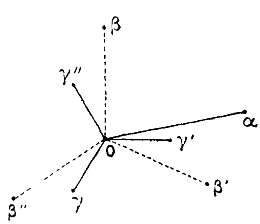
$$(5)\quad \begin{cases} 1\,2\,3, & 1\,4\,7, & 1\,5\,9, & 1\,6\,8, \\ 4\,5\,6, & 2\,5\,8, & 2\,6\,7, & 2\,4\,9, \\ 7\,8\,9, & 3\,6\,9, & 3\,4\,8, & 3\,5\,7 \end{cases}$$

est constituée de points en ligne droite.

Cette construction est aussi générale que possible.

5. Il est aisé de transformer cette figure et de résoudre ainsi le problème de Laguerre. Pour plus de commodité, j'énoncerai tout d'abord la construction à laquelle on parvient.

On commence par construire la figure suivante :



$O\beta$, $O\beta'$, $O\beta''$ sont trois vecteurs de même longueur, faisant entre eux des angles de 120°; de même $O\gamma$, $O\gamma'$ et $O\gamma''$. De plus les sens de rotation $\beta\beta'\beta''$ et $\gamma\gamma'\gamma''$ sont opposés, ce dernier étant pris pour sens positif. Enfin le vecteur $O\alpha$ est quelconque de longueur et de direction, par rapport aux premiers.

Cela fait, on se donne arbitrairement deux triangles ABC, A'B'C', et sur leurs côtés on construit neuf couples de triangles, conformément aux indications du tableau suivant :

Ba_1C	et	$B'b_1C'$	directement semblables à	$\beta O \gamma$,
Ba_2C	et	$B'b_2C'$	»	$\beta' O \gamma'$,
Ba_3C	et	$B'b_3C'$	»	$\beta'' O \gamma''$,
Ca_4A	et	$C'b_4A'$	»	$\gamma O \alpha$,
Ca_5A	et	$C'b_5A'$	»	$\gamma' O \alpha$,
Ca_6A	et	$C'b_6A'$	»	$\gamma'' O \alpha$,
Aa_7B	et	$A'b_7B'$	»	$\alpha O \beta$,
Aa_8B	et	$A'b_8B'$	»	$\alpha O \beta'$,
Aa_9B	et	$A'b_9B'$	»	$\alpha O \beta''$.

Les systèmes $a_1 a_2 \ldots a_9$ et $b_1 b_2 \ldots b_9$ satisfont aux conditions du problème; les douze couples de triangles semblables s'obtiennent par les combinaisons d'indices portées dans le tableau (5); *enfin la construction est aussi générale que possible.*

Il suffit de quelques mots pour légitimer cette construction.

Aux couples de points (A, A'), (B, B'), (C, C') faisons correspondre, par notre transformation, trois points a, b, c. Soit de même i le point qui correspond au couple (a_i, b_i).

Il résulte de la construction que les points $1, 2, \ldots, 9$ sont répartis trois par trois sur les côtés du triangle abc, les rapports de division étant donnés par le tableau suivant :

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1b}{1c} = \dfrac{a_1 B}{a_1 C} = \dfrac{O\beta}{O\gamma}, & \dfrac{2b}{2c} = \dfrac{O\beta'}{O\gamma'}, & \dfrac{3b}{3c} = \dfrac{O\beta''}{O\gamma''}, \\[2ex] \dfrac{4c}{4a} = \dfrac{O\gamma}{O\alpha}, & \dfrac{5c}{5a} = \dfrac{O\gamma'}{O\alpha}, & \dfrac{6c}{6a} = \dfrac{O\gamma''}{O\alpha}, \\[2ex] \dfrac{7a}{7b} = \dfrac{O\alpha}{O\beta}, & \dfrac{8a}{8b} = \dfrac{O\alpha}{O\beta'}, & \dfrac{9a}{9b} = \dfrac{O\alpha}{O\beta''}. \end{array}\right.$$

Mais si l'on pose

$$\frac{O\beta}{O\gamma} = k, \qquad \frac{O\gamma}{O\alpha} = k', \qquad \frac{O\alpha}{O\beta} = k'',$$

on a d'abord

$$k k' k'' = 1 :$$

on a de plus, en se reportant à la figure,

$$\frac{O\beta'}{O\gamma'} = \frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}} O\beta}{e^{\frac{2\pi i}{3}} O\gamma} = e^{\frac{2\pi i}{3}} \frac{O\beta}{O\gamma} = \omega k, \qquad \frac{O\beta''}{O\gamma''} = \omega^2 k,$$

$$\frac{O\gamma'}{O\alpha} = \omega k', \qquad \frac{O\gamma''}{O\alpha} = \omega^2 k',$$

$$\frac{O\alpha}{O\beta'} = \omega k'', \qquad \frac{O\alpha}{O\beta''} = \omega^2 k''.$$

Ainsi, les seconds membres des neuf égalités figurant dans le tableau (6) sont identiques à ceux des égalités figurant dans le tableau (4); les points 1, 2, ..., 9 sont donc répartis par triades sur douze lignes droites, et leur système est, on le voit, aussi général que possible.

L'exactitude et la généralité de notre construction se trouvent donc établies.

Note. — J'avais rédigé l'article précédent quand j'ai appris, par le *Tableau de correspondance des questions et des solutions* annexé au numéro de février des *Nouvelles Annales*, que la question n° 793 de Laguerre avait déjà reçu une réponse (1893, p. 10*). M. Juel, auteur de cette réponse, indique en quelques mots le principe de la solution développée ci-dessus, mais sans entrer dans le détail de la construction. Il n'est d'ailleurs pas douteux que ce même principe (*à deux triangles semblables on peut faire correspondre trois points en ligne droite, et inversement*) n'ait été connu de Laguerre et ne lui ait inspiré la question 793.

C'est dire que mon article ne saurait prétendre à une complète originalité. J'ai cru cependant devoir le publier, d'abord parce que j'y ai poussé jusqu'au bout, si je ne me trompe, la solution du curieux problème de Laguerre, ensuite parce que les détails où je suis entré peuvent attirer l'attention du géomètre sur une méthode de transformation qui doit conduire à d'intéressants résultats.

R. B.