NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Tétraèdres variables liés à des quadriques et à des cubiques gauches

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 10-14

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__10_0>

[L²17d] [M³5]

TÉTRAÈDRES VARIABLES LIÉS A DES QUADRIQUES ET A DES CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. On sait que l'invariant Φ de deux quadriques S et Σ s'annule lorsqu'il existe un tétraèdre conjugué à l'une des quadriques et dont les arêtes sont tangentes à l'autre. Il existe alors une simple infinité de tels tétraèdres; les rôles des deux quadriques peuvent être intervertis. Si l'on considère par exemple les tétraèdres dont les arêtes touchent S et qui sont conjugués à Σ, ces arêtes touchent également la quadrique S′ qui est la polaire réciproque de S par rapport à Σ. Réciproquement (*Nouv. Ann.*, p. 69; 1899), j'ai montré que *si deux quadriques* S *et* S′ *admettent un tétraèdre dont les arêtes leur soient tangentes, elles en admettent une simple infinité*, et j'aurais dû remarquer que *ces tétraèdres sont conjugués à l'une des huit quadriques* Σ *par rapport auxquelles* S *et* S′ *sont polaires réciproques*. En effet, la condition est que les racines du discriminant de la forme KS + S′ vérifient la relation

$$\sum \varepsilon\sqrt{k}\,\varepsilon'\sqrt{k'} = 0,$$

avec $\varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon'^2 = 1$, ...; en rapportant S et S′ au tétraèdre conjugué commun, ce qui donne

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2,$$
$$S' = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d't^2,$$

cette condition devient (avec $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 1$, ...)

$$\sum \alpha\frac{\sqrt{a'}}{\sqrt{a}}\,\beta\frac{\sqrt{b'}}{\sqrt{b}} = 0.$$

Soit alors

$$\Sigma = \alpha\sqrt{a}\sqrt{a'}x^2 + \beta\sqrt{b}\sqrt{b'}y^2 + \ldots,$$

de sorte que $\Sigma = 0$ représente l'une des huit quadriques par rapport auxquelles S et S' sont polaires réciproques; les racines du discriminant de la forme $KS + \Sigma$ sont $-\alpha\frac{\sqrt{a'}}{\sqrt{a}}, \ldots,$ et en les désignant par K, K', ..., la condition ci-dessus devient

$$\Sigma KK' = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Phi = 0,$$

l'invariant Φ se rapportant aux deux quadriques S et Σ.

Donc . . . .

2. On sait que, si une cubique gauche Γ' et une quadrique Q admettent un tétraèdre inscrit à la cubique et conjugué à la quadrique, elles en admettent une infinité (E. Duporcq, *Principes de Géométrie moderne*, p. 109); les plans des faces de ces tétraèdres sont osculateurs à une cubique gauche Γ. Réciproquement, *si deux cubiques gauches* Γ *et* Γ' *admettent en nombre infini des tétraèdres* T *inscrits à* Γ' *et dont les plans des faces sont osculateurs à* Γ, *ces tétraèdres sont conjugués à une quadrique* Q. En effet, représentons les plans osculateurs d'une cubique gauche Γ par l'équation générale

$$m^3x + m^2y + mz + t = 0,$$

et observons que les m des quatre faces des tétraèdres cherchés seront donnés par une équation de la forme

$$f(m) + \lambda\varphi(m) = 0, \tag{1}$$

λ variant. D'abord, si l'on considère la courbe qui est le lieu des sommets des tétraèdres donnés par l'équation (1), on voit immédiatement que cette courbe est une cubique gauche Γ', attendu que, dans un plan m osculateur à Γ, il existe seulement trois points du lieu, lesquels sont les sommets dans ce plan du tétraèdre dont ce plan fait partie [1]. En outre, la relation (1) étant

$$\mathrm{A}m^4 + \mathrm{B}m^3 + \ldots + \lambda(\mathrm{A}'m^4 + \mathrm{B}'m^3 + \ldots) = 0,$$

les coordonnées x, y, z, t du sommet M opposé au plan m dans le tétraèdre dont ce plan fait partie, sont proportionnelles aux quantités

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B}m^3 + \mathrm{C}m^2 + \ldots \\ \mathrm{A}' & \mathrm{B}'m^3 + \mathrm{C}'m^2 + \ldots \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mathrm{A}m + \mathrm{B} & \mathrm{C}m^2 + \mathrm{D}m + \mathrm{E} \\ \mathrm{A}'m + \mathrm{B}' & \mathrm{C}'m^2 + \mathrm{D}'m + \mathrm{E}' \end{vmatrix}, \quad \ldots;$$

ou bien, en désignant par u, v, w, r les coordonnées du plan m, les coordonnées x, y, z, t du point M sont proportionnelles aux quantités

$$\begin{gathered} (\mathrm{AB}')u + (\mathrm{AC}')v + \ldots, \\ (\mathrm{AC}')u + [(\mathrm{AD}') + (\mathrm{BC}')]v + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

d'où il suit que M et m sont polaires réciproques par rapport à une quadrique Q.

Il faut seulement remarquer que *l'existence d'un tétraèdre* T *inscrit à* Γ' *et dont les plans des faces sont osculateurs à* Γ *n'entraîne pas l'existence d'une infinité de tels tétraèdres;* car, s'il en était ainsi, la cubique Γ' étant donnée, la cubique Γ dépendrait de $(4-1)+4$ ou 7 paramètres, tandis qu'elle dépend seulement de 6 paramètres d'après l'équation (1), ou

---

[1] On voit de la même façon que la surface lieu des arêtes des tétraèdres est une surface réglée du sixième ordre; une droite Δ, qui est l'intersection de deux plans osculateurs m et n, coupe en effet cette surface en six points. Si l'équation (1) était de degré n en m, la courbe lieu des sommets serait d'ordre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, la surface lieu des arêtes serait d'ordre $2(n-1)$.

mieux parce que la quadrique Q du théorème primitif dépend de $(4 - 1) + 3$ ou 6 paramètres; *il faut encore une condition.*

Observons que l'on peut, la cubique Γ' étant donnée, prendre à volonté deux tétraèdres inscrits pour définir la quadrique Q ou la cubique Γ; huit points d'une cubique gauche forment, en effet, un système (singulier) de points de Lamé; *l'existence de ces deux tétraèdres* T *pour* Γ *et* Γ' *entraîne l'existence d'une infinité de tétraèdres analogues.*

3. Il y aurait lieu de résoudre la question suivante, qui semble difficile : Si une cubique gauche Γ' et une quadrique Q admettent un tétraèdre dont les arêtes rencontrent la cubique et qui soit conjugué à la quadrique, en admettent-elles une infinité?

Les arêtes des tétraèdres seraient alors dans des plans osculateurs à une cubique gauche Γ, et il y aurait, comme dans les deux cas précédents, à examiner une réciproque. Il pourrait d'ailleurs arriver que les choses n'eussent pas lieu comme dans les cas précédents, et la question est celle-ci : *Peut-on trouver deux cubiques gauches* Γ *et* Γ' *telles qu'il existe une infinité de tétraèdres dont les arêtes rencontrent* Γ' *et soient dans des plans osculateurs à* Γ?

4. Si l'on remplace l'équation (1) par la suivante

$$f(m) + \lambda\,\varphi(m) + \mu\,\psi(m) = 0, \tag{2}$$

également du quatrième degré, *on a des tétraèdres* T *dont les plans des faces sont osculateurs à la cubique gauche* Γ *et qui sont inscrits à une surface d'ordre* $4 - 2$, *c'est-à-dire à une quadrique* Q'. Cette quadrique dépend de 6 paramètres lorsque Γ est donnée; *l'exis-*

tence d'un tétraèdre T *n'entraîne donc pas celle d'une double infinité de tels tétraèdres,* puisque, s'il en était ainsi, la donnée de Γ laisserait $(4-2)+5$ ou 7 paramètres pour Q'; *il faut encore une condition.*

Si l'on se donne un plan a osculateur à Γ, et si l'on considère les tétraèdres T dont une face est dans ce plan, les valeurs de m pour les trois autres faces sont données par une équation du troisième degré de la forme (1), et le sommet A du tétraèdre (opposé au plan a) décrit une droite; cela résulte de la Note 1, ou d'un raisonnement analogue à celui que l'on fait pour l'involution dans les coniques. *Les droites ainsi obtenues sont les génératrices d'un système de la quadrique* Q'.

Note. — Je rappelle que M. E. Duporcq a demandé récemment, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* si l'on connaît des tétraèdres liés d'une même manière à deux quadriques S et Σ qui vérifient la condition $\Phi=0$; si de tels tétraèdres sont connus, il est à désirer qu'ils soient signalés aux lecteurs des *Nouvelles Annales.*