NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Sur la question du premier concours des « Nouvelles annales » pour 1900

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 1 (1901), p. 106-111

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1901_4_1__106_1>

[L²15c]

SUR LA QUESTION DU PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1900;

PAR M. G. FONTENÉ.

I. On connaît les faits suivants. Étant données deux tangentes à une quadrique, *les tangentes à la quadrique qui rencontrent les deux tangentes données forment deux systèmes distincts;* le lieu des points de contact se compose de deux coniques dont les plans passent par la corde des contacts des deux tangentes données, et forment un faisceau harmonique avec les plans qui passent par cette corde et par les deux tangentes fixes. Si l'on prend deux tangentes du même système, elles forment, avec les deux premières, un *contour quadrangulaire circonscrit de première espèce,* les quatre points de contact étant dans un même plan; deux tangentes de systèmes différents donnent des *contours de seconde espèce,* le plan de trois quelconques des points de contact rencontrant le dernier côté en un point dont le conjugué harmonique par rapport aux extrémités de ce côté est le point de contact situé sur ce côté; le théorème de Carnot donne naturellement ces deux espèces de quadrilatères (Cf. Painvin, *Géométrie analytique de l'espace,* IIe Partie, p. 149; Mannheim, *Bull. de la Soc. math.,* géométriquement, p. 78; 1897).

Il faut ajouter un fait, qui n'a peut-être pas été remarqué, et pour lequel nous désignerons un contour quadrangulaire par la notation (M, N) (M′, N′) qui indique les deux couples de sommets opposés : *Lorsqu'un contour quadrangulaire* (M, N) (M′, N′) *est circonscrit à une quadrique, si l'on considère, par exemple, les deux cônes de sommets* M *et* N *circonscrits à la quadrique et les deux coniques suivant lesquelles se coupent ces deux cônes, les points* M′ *et* N′ *sont sur une même de ces deux coniques quand le contour est de première espèce, tandis que le point* M′ *est sur l'une de ces coniques et le point* N′ *sur l'autre quand le contour est de seconde espèce;* on le voit en rapportant la quadrique au tétraèdre MNM′N′.

Cela posé, si l'on se donne une quadrique S et un terne de points A, B, C, on peut chercher un terne de points A′, B′, C′ tels que les *neuf* droites joignant un point non accentué à un point accentué soient tangentes à la quadrique. Les cônes de sommets A, B, C circonscrits à la quadrique se coupent en huit points dont trois seront les point A', B', C'; les équations des trois cônes

$$S+\alpha^2=0, \qquad S+\beta^2=0, \qquad S+\gamma^2=0$$

montrent que les huit points d'intersection sont deux à deux sur quatre droites Oa, Ob, Oc, Od données par les équations

$$-\alpha=\beta=\gamma, \qquad \alpha=-\beta=\gamma, \qquad \alpha=\beta=-\gamma, \qquad \alpha=\beta=\gamma,$$

et le point O, intersection des plans polaires des points A, B, C, est le pôle du plan ABC. Il y a lieu de rechercher l'influence du choix des trois points A', B', C' sur la nature des contours quadrangulaires de la figure; ces contours sont au nombre de neuf, deux sommets opposés pouvant être (B, C), (C, A), (A, B), en même temps que les deux autres peuvent être (B', C'), (C', A'), (A', B').

1° Si l'on suppose d'abord que deux des trois points A', B', C' ne sont pas sur une même droite issue de O, on peut prendre ces points respectivement sur les trois premières droites; alors, des deux coniques d'intersection des cônes B et C, par exemple, coniques situées dans les plans $\beta=-\gamma$, $\beta=\gamma$, ou bOc et dOa, la première passe par les points B' et C', la seconde passe en A', de sorte que le contour désigné par la notation $(B, C)(B', C')$ est de première espèce, tandis que les contours $(B, C)(B', A')$ et $(B, C)(C', A')$ sont de seconde espèce; les trois points A', B', C' correspondent donc un à un aux points A, B, C, *les trois tangentes* AA', BB', CC' *jouent un rôle à part,* et chacun des trois contours $(B, C)(B', C')$, $(C, A)(C', A')$, $(A, B)(A', B')$ est de première espèce, les six autres étant de seconde espèce.

2° Si l'on suppose, en second lieu, que les deux points A' et B' sont sur Od, le point C' étant sur Oc, il arrive ceci : des deux coniques d'intersection des cônes A et B, celle qui est dans le plan $\alpha = \beta$ ou dOc contient les trois points A', B', C'; des deux coniques d'intersection des cônes C et A, ou C et B, celle qui est dans le plan dOb ou dOa contient les points A' et B', l'autre contenant le point C'. Dans ces conditions, les cinq contours dont deux sommets opposés sont (A, B) ou (A', B') sont de première espèce, les quatre autres étant de seconde espèce, c'est-à-dire que *les sommets* C et C' *jouent un rôle à part;* en somme, les points de contact 1, 2, 3, 4 des côtés du contour $(A, B)(A', B')$ sont dans un même plan, et, de plus, les droites 12 et 34 coupant AB en S, les droites 14 et 23 coupant $A'B'$ en S', la corde des contacts pour $C'A$ et $C'B$ coupe AB en S, ce qui donne encore deux contours $(A, B)(C', A')$ et $(A, B)(C', B')$ de première espèce, la corde des contacts pour CA' et CB' coupe $A'B'$ en S', ce qui donne les deux derniers contours $(A', B')(C, A)$ et $(A', B')(C, B)$ de première espèce.

II. La figure dépend de 18 paramètres. Si l'on se donne, pour le premier des deux cas indiqués, la quadrique S et les trois tangentes AA', BB', CC' qui jouent un rôle à part, on cherche à obtenir un contour hexagonal $AB'CA'BC'A$ ayant ses six côtés tangents à la quadrique, et tel que les deux tangentes AB' et $A'B$, par exemple, appartiennent à un même système; *ce problème, qui semble déterminé, est en réalité impossible ou indéterminé.*

Soit A un point quelconque sur AA'; on en déduit un seul point B', un seul point C, un seul point A', en choisissant chaque fois l'une des deux correspondances homographiques qui se présentent; comme, d'après l'hypothèse faite, les trois correspondances suivantes (A', B), (B, C'), (C', A_1) sont identiques aux trois premières, la relation entre A' et A_1 est identique à celle qui a lieu entre A et A'; pour que A_1 puisse se confondre avec A, sans que A' se confonde avec A, ce qui donnerait une solution parasite, il faut que cette relation homographique entre A et A' admette un couple de points distincts échangeables, auquel cas la relation est involutive et le contour hexagonal se ferme de lui-même, quel que soit le point de départ A. Il en est ainsi, par exemple, quand les trois tangentes AA', BB', CC' concourent en un point R; car, en désignant par α, β, γ les points de contact de ces tangentes, si l'on met A en α, on a le contour hexagonal $\alpha R \gamma R \beta R \alpha$; mais les trois tangentes vérifient ici trois conditions, alors qu'une condition suffit.

Pour le second des deux cas indiqués, on peut se donner la quadrique et le contour $(A, B)(A', B')$ de première espèce; on prend le point C' sur celle des deux coniques d'intersection des cônes circonscrits A et B qui contient les points A' et B', et l'on détermine le point C sur celle des deux coniques d'intersection des cônes circonscrits A' et B' qui contient les points A et B; pour cela, on coupe cette conique par le cône circonscrit C', et comme A et B sont deux points de l'intersection, on a le choix entre deux positions du point C.

Si l'on se donne arbitrairement les six points A, B, C, A', B', C', les seules quadriques tangentes aux neuf droites sont-elles des quadriques évanouissantes réduites à des coniques passant par les points A, B, C ou par les points A', B', C'? Ou bien existe-t-il généralement des quadriques véritables tangentes aux neuf droites, les contacts remplissant les conditions du premier cas? En existe-t-il avec les conditions du second cas? Ces questions dépendent du *problème général des quadriques tangentes à neuf droites*, problème sur lequel la question posée avait pour but d'attirer l'attention; j'avoue n'avoir pu les résoudre.

Le cas où les trois droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes est facile à traiter. Si l'on considère une quadrique tangente à ces trois droites et aux cinq premiers côtés du contour hexagonal AB′CA′BC′A, cette quadrique touche le sixième côté du contour : elle donne lieu, en effet, à une infinité simple de contours hexagonaux $A_1 B'_1 C_1 \ldots C'_1 A_1$, dont les six côtés lui sont tangents, et celui de ces contours qui commence en A se confond avec le contour AB′C...C′A, puisque ces deux contours ont cinq côtés communs.

Note. — J'indique en terminant les faits suivants, dont le premier concerne une quadrique tangente à neuf droites :

Étant donnés cinq plans a, b, c, d, e, qui se coupent deux à deux suivant dix droites, si l'on néglige la droite (d, e), il existe une seule quadrique tangente aux neuf droites restantes; le plan polaire du point (a, b, c) par rapport à cette quadrique est le plan polaire du même point par rapport au système des deux plans d et e.

Il est impossible que les dix droites d'intersection de cinq plans (ou les dix droites de jonction de cinq points) soient tangentes à une quadrique de discriminant non nul.