NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur
et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

X. ANTOMARI,
Docteur ès Sciences, ancien élève de l'École Normale,
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Carnot.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR GERONO, PROUHET, BOURGET, BRISSE ET M. ROUCHÉ.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME I.

(LXe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

[L¹7a]

SUR LA DÉTERMINATION DES FOYERS DES CONIQUES;

PAR M. ERNEST CESÀRO.

Il y a quelque chose d'hybride, à mon avis, dans les calculs que l'on fait habituellement pour déterminer les foyers d'une conique. C'est que la conception du *foyer*, telle qu'on la doit à Plücker, est essentiellement fondée sur l'imaginaire $\sqrt{-1}$, et que tout effort pour l'expliquer dans le domaine restreint des nombres *réels* doit nécessairement se résoudre en calculs dénués de symétrie et d'élégance. Aussi les simplifications apportées à la recherche des foyers (¹) reposent-elles sur l'introduction du symbole $\sqrt{-1}$ dans un champ dont il n'aurait jamais dû être banni. Pour aller plus loin il suffit de se placer dès le commencement dans le domaine des nombres complexes, en représentant un point *réel* quelconque par son affixe x, auquel on adjoint le nombre conjugué $\bar{x}$. Une conique est alors représentée par une équation quadratique, telle que

$$(1) \qquad ax^2 + b\bar{x}^2 + c + 2f\bar{x} + 2gx + 2hx\bar{x} = 0,$$

(¹) *Voir*, par exemple, une Note de M. E. Goursat dans ce Journal (1887, p. 465).

où l'on doit supposer

(2) $$b = \bar{a}, \qquad c = \bar{c}, \qquad g = \bar{f}, \qquad h = \bar{h},$$

lorsque la courbe est *réelle*. Le cercle est caractérisé par la condition $a = 0$ (et, par suite, $b = 0$); l'hyperbole équilatère par $h = 0$; une ellipse quelconque, la parabole, une hyperbole quelconque par

$$|a| < |h|, \qquad |a| = |h|, \qquad |a| > |h|,$$

respectivement. Par définition *les foyers sont les sommets d'un quadrilatère circonscrit dont les côtés concourent aux points cycliques*. Deux côtés opposés sont représentés par deux équations de la forme $x =$ const., les deux autres par deux équations telles que $\bar{x} =$ const. Ayant fixé la valeur de x dans l'équation (1), celle-ci fournit deux valeurs coïncidentes pour $\bar{x}$, sous la condition

$$b(ax^2 + 2gx + c) - (hx + f)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

(3) $$Cx^2 - 2Gx + A = 0,$$

en représentant par A, B, ..., les mineurs complémentaires de a, b, ..., dans le discriminant de la conique

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}.$$

L'équation (3) exprime le contact de la conique avec la droite $x =$ const.; ses racines sont donc les valeurs que x doit avoir sur l'un ou sur l'autre des deux côtés opposés considérés, et, par suite, aux quatre foyers. En agissant de même pour les deux autres côtés, on trouve que les valeurs de la seconde coordonnée en ces mêmes points sont données par l'équation

(4) $$C\bar{x}^2 - 2F\bar{x} + B = 0.$$

Il faut maintenant remarquer que, en vertu de (2), les équations (3) et (4) ont les coefficients correspondants conjugués entre eux. Il en résulte que les racines d'une équation sont conjuguées de celles de l'autre, de sorte que, en associant chaque racine (3) avec celle des deux racines de (4), qui lui est conjuguée, on obtient *deux* foyers *réels*. Il est d'ailleurs évident que *l'équation* (3) *suffit pour leur détermination;* car, en se donnant les coefficients de l'équation (1), on se donne aussi, en vertu de (2), leurs conjugués. La connaissance des racines de (3) entraîne donc celle de leurs nombres conjugués, et, par suite, celle des foyers réels. Je remarque enfin que, d'après (3) et (4), les coordonnées du centre de la conique sont

$$(5) \qquad x_0 = \frac{G}{C}, \qquad \bar{x}_0 = \frac{F}{C}.$$

Afin de montrer ce qu'il y a de souple et de pénétrant dans l'emploi des nombres complexes, je vais chercher les foyers des coniques inscrites à un triangle, dont je me donne les sommets par leurs affixes x_1, x_2, x_3. Une droite quelconque étant représentée par une équation telle que $ux + v\bar{x} + w = 0$, les nombres u, v, w sont les coordonnées de la droite, et l'équation tangentielle de la conique est

$$(6) \qquad A u^2 + B v^2 + C w^2 + 2 F v w + 2 G w u + 2 H u v = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée par les coordonnées des côtés du triangle, égales aux mineurs complémentaires des éléments de chaque ligne du déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} x_1 & \bar{x}_1 & 1 \\ x_2 & \bar{x}_2 & 1 \\ x_3 & \bar{x}_3 & 1 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$u_1 = \bar{x}_2 - \bar{x}_3, \quad v_1 = -(x_2 - x_3), \quad w_1 = x_2\bar{x}_3 - x_3\bar{x}_2; \quad \ldots$$

Il est évident que $\bar{w} = -w$. Les nombres w_1, w_2, w_3 sont donc de pures imaginaires, ainsi que leur somme δ. Comme on a aussi $\bar{v} = -u$, on voit que les nombres μ_1, μ_2, μ_3, définis par les égalités

$$\mu_1\delta = u_1 x_0 + v_1\bar{x}_0 + w_1, \quad \ldots,$$

sont *réels*. Ces nombres sont, comme on sait, les coordonnées barycentriques de x_0 par rapport au triangle $x_1x_2x_3$; car ils satisfont aux relations

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 = x_0, \qquad \mu_1\bar{x}_1 + \mu_2\bar{x}_2 + \mu_3\bar{x}_3 = \bar{x}_0,$$

et

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1.$$

Cela posé, si l'on remplace F et G par leurs valeurs (5) dans l'équation (6), celle-ci devient

$$(A - Cx_0^2)u^2 + (B - C\bar{x}_0^2)v^2 + 2(H - Cx_0\bar{x}_0)uv + C(ux_0 + v\bar{x}_0 + w)^2 = 0.$$

En y regardant comme inconnues $A - Cx_0^2$, $B - C\bar{x}_0^2$, $2(H - Cx_0\bar{x}_0)$, l'équation qui précède, écrite pour les trois côtés, fournit un système de trois équations linéaires dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix} u_1^2 & v_1^2 & u_1v_1 \\ u_2^2 & v_2^2 & u_2v_2 \\ u_3^2 & v_3^2 & u_3v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)(u_3v_1 - u_1v_3)(u_1v_2 - u_2v_1).$$

Chaque facteur du second membre étant égal à δ, la valeur du déterminant est δ^3. Il en résulte

$$(A + Cx_0^2)\delta = C\begin{vmatrix} \mu_1^2 & u_1v_1 & v_1^2 \\ \mu_2^2 & u_2v_2 & v_2^2 \\ \mu_3^2 & u_3v_3 & v_3^2 \end{vmatrix}.$$

Le dernier déterminant est égal au produit de δ par

$$\alpha = \mu_1^2 v_2 v_3 + \mu_2^2 v_3 v_1 + \mu_3^2 v_1 v_2.$$

Donc

$$A = C(\alpha + x_0^2).$$

Cela suffit pour la détermination des foyers. L'équation (3) devient

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}(x - x_0)^2 = {} & \mu_1^2(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\\ & + \mu_2^2(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)\\ & + \mu_3^2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2);\end{aligned}\right.$$

mais on peut lui donner une autre forme. Je remarque d'abord que, d'après l'identité

$$x_2(x_3 + x_1) - x_3 x_1 + x_3(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 2 x_2 x_3,$$

l'expression

$$\alpha + x_0^2 = \mu_1^2[x_1(x_2 + x_3) - x_2 x_3] + \ldots + 2\mu_2\mu_3 x_2 x_3 + \ldots$$

est le produit de $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ par

$$\mu_1[x_1(x_2 + x_3) - x_2 x_3] \\ + \mu_2[x_2(x_3 + x_1) - x_3 x_1] + \mu_3[x_3(x_1 + x_2) - x_1 x_2].$$

Il en résulte que l'on peut écrire, au lieu de (7),

$$(8)\qquad \mu_1[x^2 - 2 x x_1 + x_1(x_2 + x_3) - x_2 x_3] + \ldots = 0.$$

Pour achever la détermination de la conique il faut encore calculer B et H. Il est évident que $B = C(\beta + \bar{x}_0^2)$, où β, conjugué de α, est donné par la formule

$$\beta = \mu_1^2 u_2 u_3 + \mu_2^2 u_3 u_1 + \mu_3^2 u_1 u_2;$$

puis

$$2(H - C x_0 \bar{x}_0)\delta = -C \begin{vmatrix} \mu_1^2 & u_1^2 & v_1^2 \\ \mu_2^2 & u_2^2 & v_2^2 \\ \mu_3^2 & u_3^2 & v_3^2 \end{vmatrix},$$

d'où

$$H = C(\gamma + x_0 \bar{x}_0),$$

en posant

$$\gamma = -\frac{1}{2}\left[\mu_1^2(u_2 v_3 + u_3 v_2) + \mu_2^2(u_3 v_1 + u_1 v_3) + \mu_3^2(u_1 v_2 + u_2 v_1)\right].$$

On peut maintenant calculer a, b, ..., au moyen des formules connues

$$a\Delta = BC - F^2, \qquad f\Delta = GH - AF, \qquad \ldots,$$

et l'on trouve ainsi comme équation de la conique

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\beta(x - x_0)^2 + \alpha(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 \\ &\qquad - 2\gamma(x - x_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) + \alpha\beta - \gamma^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

L'aire totale de la conique (1) est

$$\frac{\pi}{2}\Delta : (h^2 - ab)^{\frac{3}{2}}.$$

Dans le cas actuel Δ se réduit à $(\gamma^2 - \alpha\beta)^2$, et l'expression qui précède devient

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}.$$

Il convient d'introduire ici les nombres $m_1 = 1 - 2\mu_1, \ldots,$ inversement proportionnels aux coordonnées barycentriques du pôle d'homologie de la conique, par rapport au triangle considéré. Un calcul facile donne $m_1 m_2 m_3 \delta^2$ comme valeur de $4(\alpha\beta - \gamma^2)$. Il en résulte que l'aire de la conique (9) est proportionnelle au produit des nombres m_1, m_2, m_3, dont la somme est 1. Elle atteint donc sa plus grande valeur pour $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, c'est-à-dire lorsque le centre de la conique est le barycentre du triangle. Dans ce cas l'équation (8) devient

$$3x^2 - 2x(x_1 + x_2 + x_3) + (x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2) = 0.$$

On voit que le premier membre est la dérivée de $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. On retrouve ainsi ce cas particulier d'un beau théorème de M. Van den Berg [1] : *les zéros de la dérivée d'un polynome du troisième degré sont les foyers de la plus grande ellipse inscrite dans le triangle formé par les zéros du polynome.* Plus généralement, si l'on introduit les nombres m dans l'équation (8), celle-ci devient

$$(10)\quad \begin{cases} m_1(x-x_2)(x-x_3)+m_2(x-x_3)(x-x_1) \\ \qquad\qquad\qquad +m_3(x-x_1)(x-x_2)=0. \end{cases}$$

Donc *les zéros et les infinis de la dérivée de la fonction* $(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}(x-x_3)^{m_3}$, *qui ne coïncident pas avec les zéros ou les infinis de la fonction, sont les foyers d'une conique inscrite au triangle formé par ces derniers points, admettant comme pôle d'homologie le point dont les coordonnées barycentriques sont inversement proportionnelles aux exposants.*

Par l'emploi des formules (5) on a exclu le cas des paraboles; mais il est facile de le faire rentrer dans le cas général en supposant que le centre s'éloigne à l'infini. Il suffit d'écrire $m_1+m_2+m_3=0$. C'est l'équation barycentrique de la droite à l'infini, exprimant, dans le cas actuel, que le pôle d'homologie appartient à l'ellipse de Steiner. Si l'on a égard à l'identité

$$(x-x_2)(x-x_3)=(x-x_1-x_2-x_3)x+xx_1+x_2x_3,$$

on voit que l'équation (10) devient

$$m_1(xx_1+x_2x_3)+m_2(xx_2+x_3x_1)+m_3(xx_3+x_1x_2)=0$$

Celle-ci exprime [2] que le rapport anharmonique des points x, x_1, x_2, x_3 est *réel*, et, partant, que les

---

(1) *Nieuw Archief voor Wiskunde*, t. XV, p. 140.

(2) *Voir*, par exemple, *Analisi algebrica*, p. 297.

foyers des paraboles inscrites sont situés sur la circonférence circonscrite. En particulier, lorsque x est le conjugué harmonique d'un sommet par rapport aux deux autres, on sait (1) qu'il est un zéro de l'évectant du polynome $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Dans ce cas, deux des nombres m devant être égaux entre eux, il s'ensuit que la parabole considérée *touche un des côtés en son milieu*, et que la médiane correspondante à ce côté est un diamètre. Donc *les zéros de l'évectant d'un polynome du troisième degré sont les foyers des trois paraboles inscrites au triangle des zéros du polynome, ayant les axes parallèles aux médianes de ce triangle.*

Je remarque enfin, dans le cas général, que, ε et η étant les affixes des foyers, le premier membre de l'équation (10) est identiquement égal à $(x-\varepsilon)(x-\eta)$, d'où il suit, en prenant successivement $x = x_1, x_2, x_3$,

$$m_1 = \frac{(x_1-\varepsilon)(x_1-\eta)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \qquad \cdots.$$

Il en résulte (les nombres m étant *réels*) que les angles $\varepsilon x_1 x_2$, $\varepsilon x_2 x_3$, $\varepsilon x_3 x_1$ sont respectivement égaux aux angles $x_3 x_1 \eta$, $x_1 x_2 \eta$, $x_2 x_3 \eta$. C'est ce qu'on exprime en disant, comme on sait, que les points ε et η sont *conjugués isogonaux*. Cela posé, si ε_1, ε_2, ε_3 sont les valeurs des rapports

$$\frac{x-x_1}{\overline{x}-\overline{x}_1}, \quad \frac{x-x_2}{\overline{x}-\overline{x}_2}, \quad \frac{x-x_3}{\overline{x}-\overline{x}_3}$$

au point ε, on a, en passant de l'équation (10) à sa conjuguée,

$$\begin{aligned} &m_1\varepsilon_1(x-x_2)(x-x_3) \\ &\quad + m_2\varepsilon_2(x-x_3)(x-x_1) + m_3\varepsilon_3(x-x_1)(x-x_2) = 0, \end{aligned}$$

(1) BELTRAMI, *Ricerche sulla Geometria delle forme binarie cubiche*, § 13.

pour $x = \varepsilon$. Il s'ensuit

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{m_1}(\varepsilon - x_1) = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{m_2}(\varepsilon - x_2) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{m_3}(\varepsilon - x_3)$$
$$= \varepsilon_1(x_2 - x_3) + \varepsilon_2(x_3 - x_1) + \varepsilon_3(x_1 - x_2);$$

puis, en remplaçant m_1, m_2, m_3 par leurs valeurs dans la relation

$$\varepsilon\eta = m_1 x_2 x_3 + m_2 x_3 x_1 + m_3 x_1 x_2,$$

on trouve l'autre foyer

$$\eta = \frac{\varepsilon_1 x_1(x_2 - x_3) + \varepsilon_2 x_2(x_3 - x_1) + \varepsilon_3 x_3(x_1 - x_2)}{\varepsilon_1(x_2 - x_3) + \varepsilon_2(x_3 - x_1) + \varepsilon_3(x_1 - x_2)}.$$

On déduit de cette formule la valeur du rapport anharmonique

$$(\eta x_1 x_2 x_3) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}.$$

En particulier, si ε_1, ε_2, ε_3 sont proportionnels aux racines cubiques de l'unité, ce rapport devient égal à une racine cubique *imaginaire* de -1, c'est-à-dire que η constitue un groupe équianharmonique avec x_1, x_2, x_3. On sait que cette propriété caractérise les zéros du Hessien du polynome $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Il est d'ailleurs évident que ε est un *centre isogone* du triangle $x_1 x_2 x_3$. Donc η, son conjugué isogonal, est un *centre isodynamique*. On retrouve ainsi le théorème suivant, dû à Beltrami : *les zéros du Hessien d'un polynome du troisième degré sont les centres isodynamiques du triangle des zéros du polynome.* Ils sont donc les foyers de deux coniques inscrites, dont les grands axes sont parallèles à la droite d'Euler, et les centres, situés sur la droite qui touche l'hyperbole de Kiepert au barycentre, sont séparés harmoniquement par ce point et par le point de Lemoine.

[L²17d] [M³5]

TÉTRAÈDRES VARIABLES LIÉS A DES QUADRIQUES ET A DES CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. On sait que l'invariant Φ de deux quadriques S et Σ s'annule lorsqu'il existe un tétraèdre conjugué à l'une des quadriques et dont les arêtes sont tangentes à l'autre. Il existe alors une simple infinité de tels tétraèdres; les rôles des deux quadriques peuvent être intervertis. Si l'on considère par exemple les tétraèdres dont les arêtes touchent S et qui sont conjugués à Σ, ces arêtes touchent également la quadrique S' qui est la polaire réciproque de S par rapport à Σ. Réciproquement (*Nouv. Ann.*, p. 69; 1899), j'ai montré que *si deux quadriques* S *et* S' *admettent un tétraèdre dont les arêtes leur soient tangentes, elles en admettent une simple infinité,* et j'aurais dû remarquer que *ces tétraèdres sont conjugués à l'une des huit quadriques* Σ *par rapport auxquelles* S *et* S' *sont polaires réciproques.* En effet, la condition est que les racines du discriminant de la forme $KS + S'$ vérifient la relation

$$\Sigma\, \varepsilon \sqrt{k}\, \varepsilon' \sqrt{k'} = 0,$$

avec $\varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon'^2 = 1$, ...; en rapportant S et S' au tétraèdre conjugué commun, ce qui donne

$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2,$$
$$S' = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d't^2,$$

cette condition devient (avec $\alpha^2 = 1$, $\beta^2 = 1$, ...)

$$\sum \alpha \frac{\sqrt{a'}}{\sqrt{a}} \beta \frac{\sqrt{b'}}{\sqrt{b}} = 0.$$

Soit alors

$$\Sigma = \alpha\sqrt{a}\sqrt{a'}x^2 + \beta\sqrt{b}\sqrt{b'}y^2 + \ldots,$$

de sorte que $\Sigma = 0$ représente l'une des huit quadriques par rapport auxquelles S et S' sont polaires réciproques; les racines du discriminant de la forme $KS + \Sigma$ sont $-\alpha\frac{\sqrt{a'}}{\sqrt{a}}, \ldots,$ et en les désignant par $K, K', \ldots,$ la condition ci-dessus devient

$$\Sigma KK' = 0 \quad \text{ou} \quad \Phi = 0,$$

l'invariant Φ se rapportant aux deux quadriques S et Σ.

Donc . . . .

2. On sait que, si une cubique gauche Γ' et une quadrique Q admettent un tétraèdre inscrit à la cubique et conjugué à la quadrique, elles en admettent une infinité (E. Duporcq, *Principes de Géométrie moderne,* p. 109); les plans des faces de ces tétraèdres sont osculateurs à une cubique gauche Γ. Réciproquement, *si deux cubiques gauches* Γ *et* Γ' *admettent en nombre infini des tétraèdres* T *inscrits à* Γ' *et dont les plans des faces sont osculateurs à* Γ, *ces tétraèdres sont conjugués à une quadrique* Q. En effet, représentons les plans osculateurs d'une cubique gauche Γ par l'équation générale

$$m^3x + m^2y + mz + t = 0,$$

et observons que les m des quatre faces des tétraèdres cherchés seront donnés par une équation de la forme

$$f(m) + \lambda\varphi(m) = 0, \tag{1}$$

λ variant. D'abord, si l'on considère la courbe qui est le lieu des sommets des tétraèdres donnés par l'équation (1), on voit immédiatement que cette courbe est une cubique gauche Γ', attendu que, dans un plan m osculateur à Γ, il existe seulement trois points du lieu, lesquels sont les sommets dans ce plan du tétraèdre dont ce plan fait partie [1]. En outre, la relation (1) étant

$$Am^4 + Bm^3 + \ldots + \lambda(A'm^4 + B'm^3 + \ldots) = 0,$$

les coordonnées x, y, z, t du sommet M opposé au plan m dans le tétraèdre dont ce plan fait partie, sont proportionnelles aux quantités

$$\begin{vmatrix} A & Bm^3 + Cm^2 + \ldots \\ A' & B'm^3 + C'm^2 + \ldots \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Am + B & Cm^2 + Dm + E \\ A'm + B' & C'm^2 + D'm + E' \end{vmatrix}, \quad \ldots;$$

ou bien, en désignant par u, v, w, r les coordonnées du plan m, les coordonnées x, y, z, t du point M sont proportionnelles aux quantités

$$(AB')u + (AC')v + \ldots,$$
$$(AC')u + [(AD') + (BC')]v + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où il suit que M et m sont polaires réciproques par rapport à une quadrique Q.

Il faut seulement remarquer que *l'existence d'un tétraèdre* T *inscrit à* Γ' *et dont les plans des faces sont osculateurs à* Γ *n'entraîne pas l'existence d'une infinité de tels tétraèdres;* car, s'il en était ainsi, la cubique Γ' étant donnée, la cubique Γ dépendrait de $(4-1)+4$ ou 7 paramètres, tandis qu'elle dépend seulement de 6 paramètres d'après l'équation (1), ou

---

[1] On voit de la même façon que la surface lieu des arêtes des tétraèdres est une surface réglée du sixième ordre; une droite Δ, qui est l'intersection de deux plans osculateurs m et n, coupe en effet cette surface en six points. Si l'équation (1) était de degré n en m, la courbe lieu des sommets serait d'ordre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, la surface lieu des arêtes serait d'ordre $2(n-1)$.

mieux parce que la quadrique Q du théorème primitif dépend de $(4 - 1) + 3$ ou 6 paramètres; *il faut encore une condition.*

Observons que l'on peut, la cubique Γ' étant donnée, prendre à volonté deux tétraèdres inscrits pour définir la quadrique Q ou la cubique Γ; huit points d'une cubique gauche forment, en effet, un système (singulier) de points de Lamé; *l'existence de ces deux tétraèdres* T *pour* Γ *et* Γ' *entraîne l'existence d'une infinité de tétraèdres analogues.*

3. Il y aurait lieu de résoudre la question suivante, qui semble difficile : Si une cubique gauche Γ' et une quadrique Q admettent un tétraèdre dont les arêtes rencontrent la cubique et qui soit conjugué à la quadrique, en admettent-elles une infinité?

Les arêtes des tétraèdres seraient alors dans des plans osculateurs à une cubique gauche Γ, et il y aurait, comme dans les deux cas précédents, à examiner une réciproque. Il pourrait d'ailleurs arriver que les choses n'eussent pas lieu comme dans les cas précédents, et la question est celle-ci : *Peut-on trouver deux cubiques gauches* Γ *et* Γ' *telles qu'il existe une infinité de tétraèdres dont les arêtes rencontrent* Γ' *et soient dans des plans osculateurs à* Γ?

4. Si l'on remplace l'équation (1) par la suivante

$$f(m) + \lambda\,\varphi(m) + \mu\,\psi(m) = 0, \tag{2}$$

également du quatrième degré, *on a des tétraèdres* T *dont les plans des faces sont osculateurs à la cubique gauche* Γ *et qui sont inscrits à une surface d'ordre* $4 - 2$, *c'est-à-dire à une quadrique* Q'. Cette quadrique dépend de 6 paramètres lorsque Γ est donnée; *l'exis-*

tence d'un tétraèdre T *n'entraîne donc pas celle d'une double infinité de tels tétraèdres,* puisque, s'il en était ainsi, la donnée de Γ laisserait $(4-2)+5$ ou 7 paramètres pour Q'; *il faut encore une condition.*

Si l'on se donne un plan a osculateur à Γ, et si l'on considère les tétraèdres T dont une face est dans ce plan, les valeurs de m pour les trois autres faces sont données par une équation du troisième degré de la forme (1), et le sommet A du tétraèdre (opposé au plan a) décrit une droite; cela résulte de la Note 1, ou d'un raisonnement analogue à celui que l'on fait pour l'involution dans les coniques. *Les droites ainsi obtenues sont les génératrices d'un système de la quadrique* Q'.

Note. — Je rappelle que M. E. Duporcq a demandé récemment, dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* si l'on connaît des tétraèdres liés d'une même manière à deux quadriques S et Σ qui vérifient la condition $\Phi=0$; si de tels tétraèdres sont connus, il est à désirer qu'ils soient signalés aux lecteurs des *Nouvelles Annales.*

[F4a]

DÉMONSTRATION DIRECTE DU THÉORÈME D'ADDITION DE LA FONCTION ELLIPTIQUE $Z(x)$;

PAR M. E. IAGGI.

Pour étudier la fonction de seconde espèce déterminée par l'intégrale

$$(1)\qquad Z = k^2\int_0^u \frac{u^2\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

on pose $u=\operatorname{sn}x$ et l'on considère la fonction

$$(2)\qquad Z(x) = k^2\int_0^x \operatorname{sn}^2 x\,dx$$

qui s'exprime, comme on sait, au moyen de la fonction $\Theta(x)$, et, des propriétés de la fonction Θ, on déduit le théorème d'addition

$$\mathrm{Z}(x+y) = \mathrm{Z}(x) + \mathrm{Z}(y) + k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} y \operatorname{sn}(x+y). \tag{3}$$

Ce théorème n'est, au fond, que le théorème d'addition de la fonction de première espèce $\operatorname{sn} x$, et nous allons le démontrer directement sans nous servir de la fonction Θ.

Posons

$$t = x + y, \qquad \begin{aligned} u_1 &= \operatorname{sn} x, \\ u_2 &= \operatorname{sn} y, \\ u_3 &= \operatorname{sn}(x+y) = \operatorname{sn} t, \\ \Delta u &= \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}. \end{aligned}$$

On sait que

$$u_3 = \frac{u_1 \Delta u_2 + u_2 \Delta u_1}{1 - k^2 u_1^2 u_2^2}. \tag{4}$$

Mais on a [1]

$$u_1^2 \Delta_{u_2}^2 - u_2^2 \Delta_{u_1}^2 = (u_1^2 - u_2^2)(1 - k^2 u_1^2 u_2^2).$$

La formule d'addition de $\operatorname{sn} x$ peut donc se mettre sous la forme

$$u_3 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{u_1 \Delta u_2 - u_2 \Delta u_1}. \tag{5}$$

Si l'on remarque que

$$u_1 = \operatorname{sn}(t-y), \qquad u_2 = \operatorname{sn}(t-x),$$

on pourra écrire, au moyen de la formule précédente,

$$u_1 = \frac{u_3^2 - u_2^2}{u_3 \Delta u_2 + u_2 \Delta u_3}, \qquad u_2 = \frac{u_3^2 - u_1^2}{u_3 \Delta u_1 + u_1 \Delta u_3}$$

---

[1] On a l'occasion de démontrer cette identité lorsqu'on intègre l'équation d'Euler, soit par la méthode de M. Darboux, soit par la méthode que nous avons exposée dans notre Note *Sur l'intégrale d'Euler et l'addition des fonctions elliptiques* (*Nouvelles Annales*, p. 443; 1900).

ou

$$(6)\qquad u_3^2 - u_1 u_2 \Delta u_3 = u_2^2 + u_1 u_3 \Delta u_2,$$
$$(7)\qquad u_3^2 - u_1 u_2 \Delta u_3 = u_1^2 + u_2 u_3 \Delta u_1.$$

Or, on a aussi

$$(8)\qquad \frac{du_3}{\Delta u_3} = \frac{du_1}{\Delta u_1} + \frac{du_2}{\Delta u_2}.$$

Multipliant les deux membres de (6) par $\frac{du_2}{\Delta u_2}$, les deux membres de (7) par $\frac{du_1}{\Delta u_1}$ et ajoutant, en tenant compte de (8), on obtient l'équation différentielle

$$\frac{u_3^2\,du_3}{\Delta u_3} - u_1 u_2\,du_3 = \frac{u_1^2\,du_1}{\Delta u_1} + \frac{u_2^2\,du_2}{\Delta u_2} + u_1 u_3\,du_2 + u_2 u_3\,du_1$$

qui s'écrit

$$(9)\qquad \frac{u_3^2\,du_3}{\Delta u_3} = \frac{u_1^2\,du_1}{\Delta u_1} + \frac{u_2^2\,du_2}{\Delta u_2} + d(u_1 u_2 u_3).$$

Multipliant les deux membres de (9) par k^2 et intégrant en remarquant que les deux membres doivent être identiques si l'on fait $u_1 = 0 = x$, et, par suite, que la constante d'intégration est nulle, on obtient la formule d'addition (3) de la fonction $Z(x)$.

[D4a]

RELATIONS ENTRE LES ZÉROS ET LES COEFFICIENTS D'UNE FONCTION ENTIÈRE;

PAR M. E. JAGGI.

Soit une fonction entière $F(x)$ donnée par son développement en série sous la forme

$$(1)\qquad \frac{F(x)}{F(0)} = 1 + \frac{A_1}{1}x + \frac{A_2}{1.2}x^2 + \frac{A_3}{1.2.3}x^3 + \ldots.$$

Nous nous proposons de trouver des relations entre les coefficients A et les zéros

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_i, \quad \ldots$$

de la fonction $F(x)$. On sait que la fonction $F(x)$ se met sous la forme

$$(2) \qquad F(x) = e^{G(x)} \prod_i \left[\left(1 - \frac{x}{a_i}\right) e^{g_i(x)}\right],$$

où $G(x)$ est une fonction entière indépendante des zéros a_i, et les $g_i(x)$ sont des polynomes dépendant respectivement des zéros a_i et rendant convergent le produit précédent, ou, si l'on veut, la série

$$\sum_i \left[g'_i(x) - \frac{1}{a_i - x}\right].$$

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons d'abord que $G(x)$ est une constante et nous poserons

$$f_i(x) = g_i(x) + L\left(1 - \frac{x}{a_i}\right),$$

en sorte que

$$(3) \qquad F(x) = \prod e^{f_i(x)} = e^{\sum\limits_i f_i(x)}.$$

Pour identifier (1) et (3) nous n'avons donc qu'à développer cette exponentielle; on a immédiatement

$$\frac{F(x)}{F(o)} = 1 + \frac{\sum\limits_i f'_i(o)}{1} x + \frac{\sum\limits_i f''_i(o) + \left[\sum\limits_i f'_i(o)\right]^2}{1.2} x^2 + \ldots.$$

D'ailleurs

$$f_i^{(n)}(x) = g_i^{(n)}(x) - \frac{1.2\ldots(n-1)}{(a_i - x)^n},$$

$$f_i^{(n)}(o) = g_i^{(n)}(o) - \frac{1.2\ldots(n-1)}{a_i^n}.$$

et, par conséquent,

$$A_1 = \sum_i \left[g'_i(o) - \frac{1}{a_i} \right],$$

$$A_2 = \sum_i \left[g''_i(o) - \frac{1}{a_i^2} \right] + \left\{ \sum_i \left[g'_i(o) - \frac{1}{a_i} \right] \right\}^2,$$

$$A_3 = \sum_i \left[g'''_i(o) - \frac{2}{a_i^3} \right]$$
$$+ 3 \sum_i \left[g'_i(o) - \frac{1}{a_i} \right] \sum_i \left[g''_i(o) - \frac{1}{a_i^2} \right]$$
$$+ \left\{ \sum_i \left[g'_i(o) - \frac{1}{a_i} \right] \right\}^2,$$

. . . .

En résumé, les coefficients A_1, A_2, A_3, ... s'obtiennent par la même loi que les coefficients du développement

$$\frac{e^{g(x)}}{e^{g(0)}} = 1 + \frac{g'(o)}{1} x + \frac{g''(o) + g'^2(o)}{1.2} x^2$$
$$+ \frac{g'''(o) + 3\, g'(o)\, g''(o) + g'^3(o)}{1.2.3} x^3 + \ldots;$$

il suffit de remplacer dans celui-ci

$$g^{(n)}(o) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

par

$$\sum_i f_i^{(n)}(o) = \sum_i \left[g_i^{(n)}(o) - \frac{1.2\ldots(n-1)}{a_i^n} \right].$$

S'il existe un facteur $e^{G(x)}$ dans $F(x)$, cette fonction se met sous la forme

$$F(x) = e^{G(x) + \sum_i f_i(x)},$$

et l'on voit qu'à chacun des termes $\sum_i f_i^{(n)}(o)$ il suffit d'ajouter le terme correspondant $G^{(n)}(o)$.

Lorsque la série

$$\sum_i \frac{1}{a_i}$$

est convergente, les exponentielles $e^{g_i(x)}$ disparaissent dans les facteurs primaires de $F(x)$, et l'on a

$$A_1 = -\sum_i \frac{1}{a_i},$$

$$A_2 = \left(\sum_i \frac{1}{a_i}\right)^3 - \sum \frac{1}{a_i^2} = 1.2 \sum_{i,j} \frac{1}{a_i a_j} \qquad (i \neq j),$$

$$A_3 = -2\sum_i \frac{1}{a_i^3} + 3\sum_i \frac{1}{a_i} \sum_i \frac{1}{a_i^2} - \left(\sum_i \frac{1}{a_i}\right)^3$$

$$= -1.2.3 \sum_i \frac{1}{a_i a_j a_k} \qquad (i \neq j \neq k),$$

. . . .

Ces formules conviennent, en particulier, au cas où $F(x)$ est un polynome, et ne sont autres que celles qu'on obtient en changeant x en $\frac{1}{x}$ dans le polynome et en exprimant les coefficients du polynome par les sommes de puissances semblables des racines.

Les formules générales que nous avons démontrées sont susceptibles de nombreuses applications. Nous nous contenterons, actuellement, d'en signaler une fort simple : l'application à la fonction

$$F(x) = \frac{\sin \pi\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}},$$

qui donne les sommes

$$\sum_n \frac{1}{n^{2p}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

des puissances semblables paires des inverses des nombres entiers.

[R6aα]

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DES TRAVAUX VIRTUELS;

PAR M. GALLIAN,
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

La démonstration du théorème des travaux virtuels donnée par Lagrange n'est pas entièrement satisfaisante; cependant l'idée première sur laquelle elle repose, idée qui réside dans l'application du principe des moufles, peut, par sa combinaison avec quelques axiomes dont le caractère d'évidence ne me paraît pas sérieusement contestable, conduire à une solution qui me semble rigoureuse et que je vais exposer.

1° AXIOME I. — *Des forces étant en équilibre sur un système, l'équilibre n'est pas rompu par l'introduction de liaisons nouvelles.*

Dès lors si des forces sont en équilibre sur un système, que d'autres forces soient aussi en équilibre sur un second système identique au premier quant à la disposition des points et aux liaisons qui existent entre eux, et que, superposant les deux systèmes, on mette les points homologues en coïncidence et qu'on les lie ensuite invariablement chacun à chacun de manière à former un système unique identique aux proposés, l'équilibre ne sera pas altéré.

D'après cela on peut, sans troubler l'équilibre d'un système, introduire de nouvelles forces répondant à la condition qu'elles se feraient équilibre si elles agissaient seules sur le système.

Axiome II. — *Désignant généralement par* M *les points d'un système au repos qui n'est actuellement soumis à l'action d'aucune force, et par* F *des forces qui, si elles étaient appliquées à ces points, communiqueraient au système un mouvement d'après lequel chaque point* M *se déplacerait dans une direction initiale* MM′, *on peut à chaque force* F *en adjoindre une autre f de direction donnée et assez petite pour que l'introduction du groupe* (F, *f*) *produise aussi un mouvement, et que dans ce mouvement la direction initiale* MM″ *de chaque point diffère aussi peu qu'on voudra de la direction* MM′. *Si chaque force f tire précisément dans la direction directement opposée à* MM′ *et est suffisamment petite, les directions* MM′, MM″ *coïncident.*

Axiome III. — *Un système de points au repos et qui n'est actuellement soumis à l'action d'aucune force se mettra en mouvement si tous les points viennent à être tous tirés en même temps suivant les directions initiales d'un système de trajectoires compatibles avec les liaisons.*

2° Ces axiomes posés, soient des points

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots,$$

assujettis à des liaisons, et que je me propose de tirer respectivement dans les directions

$$M_1 A_1, \quad M_2 A_2, \quad \ldots,$$

par des forces

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots,$$

que je suppose avoir une commune mesure Φ contenue m_1 fois dans F_1, m_2 fois dans F_2, etc., les entiers m_1,

m_2, ... étant pairs, ce qu'il est toujours possible d'admettre sans nuire à la généralité.

Au lieu d'appliquer directement à chaque point la force qui lui est destinée, opérons comme il suit : Considérons les points des groupes M_1, M_2, ..., et A_1, A_2, ..., comme des anneaux de rayon nul, ces anneaux étant d'ailleurs fixes pour le second groupe. Concevons alors qu'un fil flexible et inextensible, attaché par un bout à l'anneau A_1, passe alternativement dans les anneaux M_1 et A_1 autant de fois qu'il est nécessaire pour qu'il y ait m_1 brins allant d'un anneau à l'autre, puis qu'il traverse alternativement les anneaux A_2 et M_2, en commençant par A_2, jusqu'à ce qu'il y ait m_2, brins circulant entre A_2 et M_2, et ainsi de suite. Les nombres m_1, m_2, ... étant pairs, et le fil entrant dans chaque couple d'anneaux par l'anneau fixe, c'est aussi par l'anneau fixe qu'il en sortira.

Les diverses portions du fil étant disposées en ligne droite sans tension, appliquons au brin libre, et dans la direction de ce brin, une force égale à Φ. Les points du système sont alors dans les mêmes conditions que s'ils étaient directement tirés par les forces

$$m_1\Phi = F_1, \qquad m_2\Phi = F_2, \qquad \ldots,$$

dans les directions

$$M_1A_1, \quad M_2A_2, \quad \ldots.$$

Le fil étant ainsi tendu, le système qui était au repos reste immobile, ou bien il se met en mouvement, et alors le brin libre s'allonge. Mais ce brin ne s'allongera que s'il peut s'allonger, par conséquent tout système de déplacements des points du système qui correspondrait à un raccourcissement initial du brin libre ne peut se produire.

Ceci posé, soient d'une manière générale :

M un point du système;
$F = m\Phi$ la force qu'on lui destine;
A l'anneau fixe correspondant;
M' une position voisine de M.

Désignant par ω l'angle des segments MA, MM', par δL la variation de longueur du brin libre lorsque chaque point vient en M', et posant $MA = \lambda$, $MM' = \delta s$, on a

$$M'A = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda\cos\omega\,\delta s + \delta s^2},$$

$$\begin{aligned}\delta L &= -\sum m(M'A - MA)\\ &= -\sum m\left[\lambda\left(1 - \frac{2\lambda\cos\omega\,\delta s - \delta s^2}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \lambda\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi\,\delta L = \sum \frac{1}{2}F\frac{2\lambda\cos\omega\,\delta s - \delta s^2}{\lambda} + \ldots\\ + \frac{1.1.3.5.7\ldots 2n-3}{1.2.3.4.5\ldots n}F\frac{(2\lambda\cos\omega\,\delta s - \delta s^2)^n}{\lambda^{2n-1}} + \ldots.\end{aligned}$$

Je pose

$$\delta T = \sum F\cos\omega\,\delta s.$$

Pour des valeurs suffisamment petites de δs, le signe de δL est le même que celui de

$$\sum \frac{1}{2}F\frac{2\lambda\cos\omega\,\delta s - \delta s^2}{\lambda} = \delta T - \sum \frac{1}{2}F\frac{\delta s^2}{\lambda}.$$

Si donc δT est négatif, il en est de même de δL. Par conséquent :

Tout déplacement infiniment petit Δ, pour lequel la somme des travaux des forces serait négative, est interdit au système.

Cette proposition fondamentale établie pour des forces commensurables entre elles s'étend sans difficulté à des forces quelconques. En effet, que les forces engendrent le déplacement Δ. On pourra toujours trouver d'autres forces commensurables entre elles, différant assez peu des proposées pour qu'elles produisent un déplacement et qu'en même temps ce déplacement soit assez voisin de Δ pour que le travail total correspondant soit négatif (axiome II), ce qui est impossible.

3° Lorsque les grandeurs qui entrent dans la composition de δT restent indéterminées, l'expression générale de δT est un infiniment petit d'un certain ordre par rapport aux variations des paramètres indépendants, par exemple d'ordre n. Les grandeurs composantes ayant actuellement des valeurs particulières, soit un déplacement infiniment petit Δ pour lequel l'ordre de δT serait supérieur à n : je dis qu'un tel déplacement est interdit au système.

En effet, que le système effectue le déplacement Δ. Chaque point M se déplace dans une certaine direction MM'; appliquons-lui une force f dans la direction opposée M'M. Si les forces f sont suffisamment petites, le groupe de forces (F, f) engendrera un certain déplacement d'après lequel chaque point M se déplacera dans la même direction MM' (axiome II). Or, pour un tel déplacement le travail total du groupe (F, f) est négatif, car la portion qui provient des forces F est par hypothèse d'ordre au moins égal à $n+1$, tandis que celle qui provient des forces f est au plus d'ordre n et négative, puisque chacun des angles $\widehat{f\mathrm{MM}'}$ est égal à π. Donc il y a réduction à l'absurde.

4° Supposons enfin que, parmi les déplacements infiniment petits compatibles avec les liaisons, il en existe au moins un pour lequel la somme des travaux serait d'ordre n (n conservant la signification indiquée plus haut) et positive : je dis qu'alors il n'y aura pas équilibre.

Soit Δ un tel déplacement défini d'une manière générale par le segment MM', et admettons que le système soit en équilibre. Concevons que les points soient assujettis à des liaisons nouvelles dont l'introduction ne permette que le déplacement Δ : le système S qui en résulte est en équilibre (axiome I). Ceci posé, à chaque force F adjoignons-en deux autres : l'une, — F, égale et opposée à F, l'autre f tirant dans la direction MM'. On pourra toujours donner aux forces f des valeurs telles que le travail du groupe (— F, f) soit négatif, puisque le travail du groupe (— F) est négatif par hypothèse et d'ordre n. Les forces f étant ainsi choisies quant aux intensités, le groupe (— F, f) agissant seul sur le système S y serait en équilibre, puisque le seul déplacement compatible avec les liaisons est interdit par la négativité du travail; donc le groupe (F, — F, f) est aussi en équilibre sur le même système (axiome I). Or, dans ce dernier groupe chaque force F détruit la force directement opposée — F appliquée au même point, de sorte qu'il ne reste que les forces f : or celles-ci ne peuvent pas se faire équilibre (axiome III). Il y a donc réduction à l'absurbe.

5° Conclusion :

Tout système de déplacements infiniment petits correspondant à un travail total négatif ou d'ordre supérieur à n est à rejeter. Donc, si tous les déplacements compatibles avec les liaisons répondent à l'une de ces deux conditions, aucun mouvement n'étant possible, il y a équilibre. Il suffit qu'un seul déplacement compatible ne réponde à aucune des deux conditions pour qu'il n'y ait pas équilibre.

Lorsque les liaisons sont telles qu'à tout système compatible de déplacements infiniment petits en correspondre un autre composé des mêmes éléments, mais dirigés en sens contraire, le travail total ne saurait être constamment négatif, et la seule condition à considérer est que ce travail soit d'ordre supérieur à n.

[A3k]

NOUVEAU PROCÉDÉ DE RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. LE PROF. Dr TSURNICHI HAYASHI.

Le procédé suivant, par lequel on peut résoudre une équation du quatrième degré, est semblable à celui dont M. A. Pleskot s'est servi pour une équation du troisième degré [*Nouveau procédé pour résoudre les équations du troisième degré* (*Nouvelles Annales de Math.*, février 1899)].

Soient

$$P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}},$$

$$a = x_1 + x_2,$$

$$\frac{1}{b} = x_1 x_2.$$

Nous avons alors l'équation

$$(1) \qquad P^4 - [2(a-b) + 4b]P^2 - 8P + (a-b)^2 - \frac{4}{b} = 0,$$

qui est du quatrième degré en P. De là, si l'équation (1) est donnée, ses racines sont

$$(2) \qquad P = \sqrt{b} + \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{b}} + a\right)},$$

Soit l'équation donnée du quatrième degré

$$(\text{A}) \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Construisons l'équation du quatrième degré dont les racines sont égales à λ fois celles de l'équation (A)

$$(3) \qquad x^4 + p\lambda^2 x^2 + q\lambda^3 x + r\lambda^4 = 0.$$

Comparons (1) et (3); nous obtenons alors

$$(4) \qquad \begin{cases} p\lambda^2 = -2(a-b) - 4b, \\ q\lambda^3 = -8, \\ r\lambda^4 = (a-b)^2 - \dfrac{4}{b}. \end{cases}$$

La seconde de ces équations détermine la valeur de λ

$$\lambda = -\frac{2}{q^{\frac{1}{3}}}.$$

Les deux autres deviennent alors

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{2p}{q^{\frac{1}{3}}} = -(a-b) - 2b, \\ \dfrac{4br}{q^{\frac{4}{3}}} = (a-b)^2 - \dfrac{4}{b}, \end{cases}$$

d'où, éliminant $(a-b)$,

$$(\text{B}) \qquad b\left(p + bq^{\frac{2}{3}}\right)^2 = 4br + q^{\frac{4}{3}}.$$

Choisissons l'une quelconque des trois valeurs de b que nous pouvons déterminer d'après cette équation du troisième degré, et déterminons a par la première des relations (5). Alors les racines de l'équation (3) sont données par (2). Mais les racines de l'équation donnée (A) sont $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\text{ième}}$ de celles de l'équation (2).

De là : Les racines de l'équation du quatrième degré

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

sont données par

$$-\frac{q^{\frac{1}{3}}}{2}\left\{\sqrt{b}+\sqrt{\left[\frac{2}{\sqrt{b}}-\left(\frac{2p}{q^{\frac{2}{3}}}+b\right)\right]}\right\},$$

relation où b est déterminé par l'équation du troisième degré

$$(\text{B}) \qquad b\left(p+bq^{\frac{2}{3}}\right)^2 = 4\,br+q^{\frac{4}{3}}.$$

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES (SESSION DE JUILLET 1899);

SOLUTIONS PAR M. AUDIBERT.

Clermont.

Calculer les deux intégrales

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dn, \qquad \int_0^1 e^x x^n(1-x)^n\,dx.$$

En déduire une valeur approchée du nombre, base des logarithmes népériens; limite supérieure de l'erreur commise.

En intégrant par parties la première, que nous désignons par P_n, on trouve

$$\text{P}_n = \frac{n}{2(2n+1)}\,\text{P}_{n-1}$$

et, par suite,

$$\text{P}_n = \frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots(2n+1)}.$$

Quant à la seconde, désignée I_n, la même méthode conduit à la formule

$$\text{I}_n = -2n(2n-1)\,\text{I}_{n-1}+n(n-1)\,\text{I}_{n-2},$$

qui se prête peu au calcul final de I_n en fonction de e et de n.

Rappelons la relation connue

$$\int_0^1 e^x f(x)\,dx = \Big|_0^1 e^x[f(x) + (-1)^1 f^1(x) + \ldots + (-1)^n f^n(x) x + \ldots + f^{2n}(x)].$$

La fonction $x^n(1-x)^n$ et ses $(n-1)$ premières dérivées sont nulles aux deux limites, et dans le développement de $\frac{d^\mu}{dx^\mu}[x^n(1-x)^n]$ les deux seuls termes qui ne s'annulent pas à la fois sont équidistants des extrêmes. Ainsi pour $\mu = n$, ce sont le premier et le dernier, soit au signe près,

$$n![(1-x)^n \text{ et } x^n].$$

En général, pour les valeurs de μ de n à $2n$, ces termes sont au signe près

$$\frac{\mu!}{(\mu-n)!} n(n-1)\ldots(2n-\mu+1)[(1-x)^{2n-\mu} \text{ et } x^{2n-\mu}].$$

A l'aide de ces données, on obtient la formule

$$I_n = e\left[n! + (-1)^1(n+1)!\frac{n}{1} + (-1)^2(n+2)!\frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots + (-1)^n(2n)!\right]$$
$$+ (-1)^{n+1}\left[n! + (n+1)!\frac{n}{1} + (n+2)!\frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots + (2n)!\right].$$

En vertu de la règle de la moyenne, I_n est plus petit que $\frac{e-1}{2^{2n}}$ et que $\frac{1}{2^{2n-1}}$. Ainsi l'équation $I_n = 0$ fournira une valeur approchée de e, avec une erreur moindre que

$$\frac{1}{2^{2n-1}\left[n! + (-1)^1(n+1)!\frac{n}{1} + \ldots + (-1)^n(2n)!\right]}.$$

Pour $n = 5$, on peut compter sur 9 décimales exactes. Le calcul donne en effet

$$e = \frac{49\,171}{18\,069} = 2,718281828.$$

Grenoble.

Développement de

$$y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^m + \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-m},$$

suivant les puissances ascendantes de x, m étant entier ou fractionnaire. Cercle de convergence.

Les dérivées successives de y s'obtiennent par les formules

$$y'\sqrt{x^2 - 1} = \frac{m}{2}\left((x + \sqrt{x^2 - 1})^m - (x - \sqrt{x^2 - 1})^m\right),$$

$$y''(x^2 - 1) + xy' - m^2 y = 0.$$

$$y^{(n)}(x^2 - 1) + (2n - 3)xy^{(n-1)} + \left((n - 2)^2 - m^2\right)y^{(n-2)} = 0.$$

Pour $x = 0$, on aura

$$y_0 = \frac{i^m + (-i)^m}{2}, \qquad y'_0 = \frac{m\left(i^m - (-i)^m\right)}{2i},$$

$$y_0^{(n)} = \left((n - 2)^2 - m^2\right)y_0^{(n-2)},$$

d'où résulte, pour n pair,

$$y_0^{(n)} = (-m^2)(2^2 - m^2)(4^2 - m^2)\ldots\left((n - 2)^2 - m^2\right)y_0$$

et pour n impair,

$$y_0^{(n)} = (1 - m^2)(3^2 - m^2)(5^2 - m^2)\ldots\left((n - 2)^2 - m^2\right)y'_0,$$

et finalement le développement

$$\begin{aligned} y = \;& y_0\left[1 + \frac{x^2}{2!}(-m^2) + \frac{x^4}{4!}(-m^2)(2^2 - m^2) + \ldots\right] \\ & + y'_0\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!}(1 - m^2) + \frac{x^5}{5!}(1 - m^2)(3^2 - m^2) + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Si m est entier et pair, la série se réduit à la première ligne, avec le coefficient $(-1)^{\frac{m}{2}}$ et s'arrête au terme de rang $n = m - 2$. Pour m impair, la série se réduit à la seconde ligne, limitée de même et multipliée par le coefficient $m(-1)^{\frac{m-1}{2}}$.

Si m est fractionnaire, posons

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

$$i^m = \cos\frac{m\pi}{2} + i\sin\frac{m\pi}{2},$$

$$(-i)^m = \cos\frac{m\pi}{2} - i\sin\frac{m\pi}{2},$$

d'où résulte

$$y_0 = \cos m\frac{\pi}{2}, \qquad y'_0 = \sin\frac{m\pi}{2}.$$

Le développement consistera en deux séries illimitées qui seront convergentes, si à partir d'un terme de rang P le rapport du terme de rang μ ($\mu > P$), à celui qui le précède,

$$\frac{x^2[(\mu-2)^2 - m^2]}{\mu(\mu-1)},$$

est plus petit que l'unité et ne tend pas vers l'unité, ce qui n'aura lieu que pour $x < 1$.

Dans ce cas, en posant $x = \cos\varphi$ l'on aurait $y = \cos m\varphi$ dont on a le développement suivant les puissances de $\cos\varphi$.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES DE 1900.

Solution par M. CALLOT,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée Carnot.

On considère les paraboloïdes Π *représentés en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$\frac{y^2}{p+\lambda} + \frac{q+\lambda}{z^2} - 2x - \lambda = 0,$$

dans laquelle p, q sont des constantes et λ un paramètre variable, et l'on propose d'étudier la surface Σ, enveloppe des plans polaires P par rapport aux paraboloïdes Π d'un point donné A.

1° *La surface Σ est de la troisième classe, et chaque plan polaire touche cette surface en tous les points d'une droite G.*

2° *Les droites G sont tangentes à une courbe gauche Γ du troisième ordre; elles admettent un cône directeur C du deuxième degré.*

3° *La section de la surface Σ par un plan tangent, c'est-à-dire par un plan polaire P, se compose d'une droite G et d'une conique. Déduire de là le degré de la surface Σ.*

4° *Chaque droite G est le lieu des pôles d'un plan Q par rapport aux paraboloïdes Π. Chaque plan Q est perpendiculaire à la droite G correspondante.*

5° *En supposant que G décrive la surface Σ, on demande l'enveloppe C_1 des plans Q qui correspondent aux diverses droites G.*

On indiquera les relations qui lient l'enveloppe G avec les paraboloïdes Π et avec le cône C.

Remarquons que les paraboloïdes Π forment un système homofocal, c'est-à-dire font partie d'un faisceau tangentiel déterminé par l'un d'eux et l'ombilicale. Ce faisceau pourra donc se déduire dualistiquement d'un faisceau ponctuel de quadriques.

1° On sait que le lieu des pôles d'un plan R par rapport aux quadriques d'un faisceau ponctuel est une cubique gauche Γ_1. Corrélativement l'enveloppe des plans polaires P du point A par rapport au faisceau des paraboloïdes Π sera une surface de la troisième classe Σ. A deux points infiniment voisins de Γ_1 correspondront deux plans tangents infiniment voisins de Σ. On voit donc qu'à toute tangente à Γ_1 correspond une génératrice G de Σ. A tout point μ de G correspond un plan ϖ à Γ_1 qui passe par une tangente fixe, quand μ décrit G. Le plan tangent en μ correspond au point de contact de ϖ. Il est donc le même tout le long de G.

2° A deux tangentes infiniment voisines à Γ_1 correspondent deux génératrices infiniment voisines de Σ. Or les deux tangentes définissent un plan osculateur à Γ_1 auquel correspond le point de rencontre de deux génératrices; celles-ci ont donc une enveloppe. Or, comme par tout point de l'espace on peut mener trois plans osculateurs à Γ_1, on voit que dans tout plan il y aura trois points de l'enveloppe des droites G. Donc cette enveloppe est une cubique gauche Γ.

Nous verrons plus tard que les droites G admettent un cône directeur du second degré.

3° Un plan tangent à Σ correspond à un point *m* de Γ_1 et aux points de la surface situés dans ce plan les plans tangents à Γ_1 menés par *m*. Or ces plans enveloppent le cône de sommet *m* qui s'appuie sur Γ_1. Ce cône étant du deuxième degré, on voit que le plan tangent à Σ la coupe suivant une conique. Comme le plan est tangent tout le long d'une droite, la section se compose d'une droite et d'une conique. Il en résulte que Σ est du quatrième ordre.

4° A toute droite G correspond une tangente δ à Γ_1; or, δ étant donnée, il existe dans le plan R un point I tel que tous ses plans polaires, par rapport au faisceau ponctuel considéré au début, passent par δ. On voit donc qu'il existe bien un plan Q correspondant à I, tel que tous ses pôles par rapport aux paraboloïdes Π soient sur G. Comme I est dans le plan R, tous les plans Q passent par le point A.

La droite G doit contenir des pôles de Q par rapport à toutes les quadriques du faisceau tangentiel donné; en particulier elle contiendra leur pôle par rapport à l'ombilicale. Elle lui est donc perpendiculaire.

5° Il en résulte que Q enveloppe le cône C, de sommet A supplémentaire du cône directeur C de la surface Σ. Tous les plans tangents à C sont parallèles à des plans tangents à Σ. Donc chaque génératrice de C est perpendiculaire à un plan polaire δ. Elle est donc perpendiculaire à sa conjuguée par rapport à un des paraboloïdes Π. Or le lieu des droites qui passent par A, et qui sont perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à des quadriques homofocales, est le cône de Chasle de sommet A. Donc le cône G est du second degré, et par suite aussi le cône C.

CORRESPONDANCE.

Dijon, le 14 novembre 1900.

Messieurs les Directeurs des « Nouvelles Annales de Mathématiques ».

Dans la *Chronique* de votre numéro d'août dernier, je trouve cette phrase :

« L'*Esperanto* est une nouvelle langue internationale, fort appréciée de plusieurs mathématiciens; cette langue est assurément plus simple que feu le *Volapük*, et elle est facile à apprendre, du moins pour nous autres Latins, mais le même cercle vicieux se présente toujours à l'esprit : Pourquoi apprendre une nouvelle langue que personne ne sait encore? »

Je puis me croire un de ceux que ces lignes visent, intentionnellement ou non, parce que je suis un professeur de Mathématiques, en même temps un propagateur de l'Esperanto absolument convaincu et assez actif, parce que j'ai été l'un des premiers, je crois, à attirer sur lui l'attention des hommes de science (*Revue générale des Sciences* du 15 avril dernier; *Intermédiaire des Mathématiciens* de juin dernier; *Enseignement mathématique* de juillet dernier et de novembre courant). A ce titre, vous accorderez peut-être aux observations suivantes la place dans les *Nouvelles Annales* que l'un de leurs plus anciens collaborateurs ose espérer de votre bienveillance et de votre désir bien connu d'aider la lumière à se projeter sur toute question touchant à un intérêt mathématique.

I. « ... Nouvelle langue internationale... ». Le mot *nouvelle* n'est plus tout à fait juste, car si les progrès de l'Esperanto en France sont de date récente, M. le Dr Zamenhof, son créateur, l'avait fait connaître dès 1887. L'oubli de l'épithète *auxiliaire* accrédite dans les esprits mal renseignés une méprise des plus fâcheuses : trop souvent on croit que l'Esperanto ne promet ses services que sous la condition rigoureuse d'être accepté comme langue *universelle*, c'est-à-dire d'être employé par tous les hommes *indistinctement, à l'exclusion de leurs langues nationales;* et, à la seule idée d'une pareille supplantation, on sourit, on se détourne. Il ne s'agit aucunement de cela, d'obtenir, par exemple, des Russes et des Français que les uns et les autres oublient leurs langues pour ne plus parler qu'Esperanto; les espérantistes leur disent simplement : « Au lieu de sacrifier des *années* pour n'arriver qu'à écorcher, vous le français, vous le russe, dépensez seulement les quelques *semaines* de très légers efforts qui vous rendront tous maîtres de notre langue, pour pouvoir désormais l'employer *entre Russe et Français :* chez vous, c'est-à-dire entre *Russe et Russe,* ou bien entre *Français et Français,* laissez l'Esperanto de côté, si bon vous semble. » Telle, l'interposition d'une glace fluorescente, inutile, même gênante, dans d'autres circonstances, rend immédiatement perceptibles à nos yeux, leur *traduit,* en quelque sorte, les radiations incapables de les impressionner directement. Le surplus, s'il n'est pas plus impossible, *en soi,* que l'évolution d'où la langue française est sortie par la fusion des dialectes de la Gaule avec le latin, l'allemand, etc., n'est qu'une utopie pour de longs siècles encore, et ni M. le Dr Zamenhof, ni ses élèves sensés, n'y ont jamais versé.

II. « ...; cette langue est assurément plus simple que feu le *Volapük* ... » Les hommes compétents s'accordent à dire que, si la grammaire du Volapük est déjà bonne, son vocabulaire est horriblement ardu, détestable. Sur lui, je ne sais rien de plus; mais il est notoire que sa faveur inouïe d'un moment a promptement fait place au plus lamentable effondrement; mais je me suis assimilé l'Esperanto en un clin d'œil, je le vois en possession d'un terrain dont les limites s'écartent sans cesse, maintenant bien au delà de l'ancien domaine du Volapük, j'assiste chaque jour aux progrès de cette diffusion, *s'accélérant partout* nonobstant les préjugés si tenaces que la déconfiture de son prédécesseur a soulevés contre toute langue internationale. Je ne puis donc hésiter un instant à prétendre que, dans le passage ci-dessus, le mot *infiniment* serait de mise au lieu d'*assurément*.

La phrase française :

« Je me suis permis d'écrire cette lettre en (Volapük, Esperanto) parce que mon secrétaire russe a été appelé pour faire ses vingt-huit jours et parce que j'ai appris que le (Volapük, Esperanto) est déjà fort répandu dans votre ville »,

se traduit en Volapük par :

« *Edalob obe penön Volapüko, bi spodel rusänik oba pebüdom al pläg militik plo vigs fol, e bi elilob das Volapük binom pepaköl ya levemo in zif olik* »

et donne en Esperanto :

« **Mi permesis al mi skribi tiun c̄i leteron esperante, c̄ar mia sekretario rusa estis vokita por fari siajn dudek-ok tagojn de militista servado kaj mi sciig̅is ke Esperanto jam estas tre vastigita en via urbo.** »

La simple comparaison de ces deux échantillons permet au premier venu de dire lui-même de quel côté se trouve tout au moins la limpidité intuitive.

III. « ... elle est facile à apprendre, du moins pour nous autres Latins.... » La facilité de l'Esperanto éclate, extraordinaire, à peine croyable, pour qui entend l'explication raisonnée de dix lignes seulement d'un texte quelconque. Quant à cette opinion, çà et là enracinée *a priori,* que les côtés néo-latins de la langue la rendent difficile pour les Européens de races non latines, elle est démentie, non seulement par la nationalité *russe* de M. le Dr Zamenhof, mais encore par les déclarations de ces Européens *eux-mêmes.* Voici, en effet, ce qui m'a été ècrit tout récemment à ce sujet (en Esperanto, bien entendu) :

1° Par M. Josef Socha, l'un des intendants de M. le prince de Lichstenstein, à Feldsberg (Basse-Autriche) : « ... Je suis un Tchèque-Slave..., c'est en 1866, pendant un stage militaire, que j'ai appris l'existence du beau, du *facile* Esperanto. *Au bout de deux mois, je correspondais couramment déjà en Esperanto....* »

2° Par M. A. Zinoviev, ingénieur à Poltava (Russie) : « ... Une lettre en Esperanto *écrite à un Allemand* est presque toujours acceptée et *déchiffrée....* »

3° Par M. A. Kofman, à Odessa (Russie) : « ... Quant à l'Esperanto, *dont l'étude exige seulement un mois ou deux,* son acquisition est très rapide et la stupéfaction inévitable.... »

4° Par M. F. Avilov, professeur dans l'un des gymnases de Tiflis (Russie) : « ... Pour acquérir la faculté de se faire comprendre en Esperanto par la parole ou par l'écriture, *il suffit de deux à sept jours pour un sujet connaissant les racines latines, de un à deux mois pour ceux qui ne savent aucune langue étrangère, ce dont je me suis convaincu par expérience.* »

5° Par M. Hugo Karlsten, instituteur populaire (primaire) à Jockmock (Suède) : « ... Il n'y a pas longtemps que je connais l'Esperanto, *deux mois seulement. Cependant, je comprends la langue presque bien, et je puis écrire facilement des lettres avec l'aide du dictionnaire Esperanto. Très facile à apprendre, beau et pratique!* Quel agrément de pouvoir correspondre avec un espérantiste d'un pays quelconque! »

6° Par M. A.-W. Magnusson, officier de police à cheval, à Stockholm (Suède) : « ... Je suis un homme *de la plus humble situation sociale,* et je ne possède en tout qu'une *petite instruction, sans aucun savoir linguistique.* Malgré cela, j'ai correspondu avec grand succès avec des Allemands, des Russes, des Belges et des Hongrois, au moyen de notre chère langue Esperanto.... Jamais il ne m'est arrivé de n'être pas compris par mes correspondants, et j'ai toujours compris leurs réponses. *Ceci est merveilleux, car je possède mal la grammaire de ma langue maternelle....* Je crois que de telles attestations valent mieux pour appuyer vos efforts en faveur de l'idée contre les sceptiques, que celles des personnes sachant deux, trois langues, ou bien versées dans la grammaire de leur langue nationale.... »

7° Des *femmes* enfin, Mme Bella Süssmuth, à Södertelje (Suède), Mlles Ebba Bergström de la même ville, Elisaveta Polkanova, à Kostroma (Russie), Elis. Zilatef, d'une localité voisine de Tirnovo (Bulgarie) m'ont fait aussi l'honneur de m'écrire en Esperanto. Cette langue n'étant encore employée, ni dans les affaires, ni comme luxe de l'éducation féminine, il en faut bien conclure que *son étude est facile, même agréable, jusqu'en Suède, en Russie et en Bulgarie.*

IV. « ... le même cercle vicieux ... : Pourquoi apprendre une langue que personne ne sait encore? » Je riposterai par cette question du même genre : « Pourquoi tel industriel fabrique-t-il, par millions quelquefois, un objet que personne n'a encore demandé, que personne souvent ne connaît? » Et je répondrai : Pour cette simple raison générale, que ce qui veut exister doit se résigner *à passer par un commencement;* pour cette autre, particulière, que l'Esperanto est extraordinairement facile, qu'une fois appris par *chaque individu, mais pas avant,* elle appartiendra à la collectivité humaine et revaudra aux mêmes individus les plus éminents services. Bénéficierons-nous des signaux maritimes télégraphiques, etc., moyens de communication intellectuelle intervenant aussi dès que la parole ou l'écriture, même en français, allemand, etc., deviennent impraticables ou insuffisants, si *chacun* de leurs inventeurs, de leurs premiers adeptes, s'était, au lieu d'agir, barricadé dans ce cercle, *autrement vicieux,* d'attendre, pour les créer, pour se familiariser avec eux, que *tout le monde* les connût?

Que « personne » ne sache l'Esperanto, ne le pratique même, par la plume ou par la bouche, c'est ce qui a cessé maintenant d'être dans le vrai, et ne cesse plus de s'en écarter à très grands pas. Pour en fournir la démonstration, et malgré ma confiance entière dans la loyauté des chefs du mouvement espérantiste en France (que maintenant je connais personnellement et estime infiniment), je ne renverrai pas aux faits rapportés, innombrables, à l'appui de cette dernière assertion, dans les publications de la propagande espérantiste : je me contenterai de citer ceux que j'ai pu recueillir *moi-même.*

1° Ayant ouvert en juin dernier, sur l'Esperanto et *à son aide* (car, sans lui, l'aurais-je pu faire?), une enquête dans les lieux où le français ne se parle pas, cela par des lettres particulières et des annonces insérées dans les deux journaux de la langue [*L'Espérantiste,* publié à Épernay; la *Lingvo internacia,* rédigée à Upsala (Suède), imprimée à Szegzard (Hongrie)], j'ai reçu de la *Russie* (*Pologne, ..., Transbaïkalie,* en passant par la *mer Noire,* le *Caucase* et le *Volga*), de l'*Allemagne,* de la *Basse-Autriche,* de la *Styrie,* de la *Bohême,* de la *Suède,* de la *Roumanie,* de la *Bulgarie,* de l'*Italie,* de l'*Espagne,* du *Portugal,* des *États-Unis,* de l'*Islande,* plus de *soixante* cartes postales ou *lettres étendues,* écrites en *Esperanto,* et à toutes j'ai répondu dans la même langue. (Où est celui qui aurait pu faire, à chaque unité d'un groupe de correspondants *aussi polyglotte,* la gracieuseté de lui écrire *correctement dans son idiome national?*) Les pièces de cette correspondance m'arrivent encore chaque semaine; toutes portent leurs marques d'origine authentiques, et je me ferais un plaisir de les communiquer à qui aurait la curiosité de les examiner.

2° Voici, de ces correspondances et traduits en français, des extraits qui paraîtront sans doute concluants :

« ... J'ai sous les yeux des documents, savoir des lettres qui me sont venues de *tous les points du monde,* de beaucoup de nations (différentes), et la vôtre (en particulier).... » [A.-K. Burenkov, à Saint-Pétersbourg (Russie).]

« ... *En* 1897, mon collègue Wagner et moi, nous avons reçu la visite de M. Avilov, professeur au premier Gymnase de *Tiflis,* et, comme l'Esperanto était la seule langue connue de nous trois à la fois, nous avons été *forcés de l'employer pour causer ensemble,* et il est de fait que *les choses marchaient tout à fait bien, ...,* cela *pendant deux jours....* Depuis trois ans j'ai écrit (en Esperanto) *à près de cinquante étrangers,* et de *tous* j'ai reçu des réponses.... Je possède des lettres venues de *Reikiavik* (Islande), de *Londres* et de diverses villes de *Suède*, de *Pétersbourg, Moscou, Kiew, Odessa*, d'*Allemagne*, de *Belgique* et de *France* (*Paris, Rouen, Angers, Lyon, Épernay, Thouars*, etc.), du *Portugal* et de l'*Espagne*, de la *Suisse* et de l'*Italie*, ..., de *Tacoma* (*États-Unis*), de *Nouméa* (*Nouvelle-Calédonie*), ..., de *Françaises, Russes* et *Suédoises*.... » [Josef Socha, à Feldsberg (Basse-Autriche).]

« ... *Deux* journées passées dans la maison hospitalière de MM. Socha et Wagner m'ont pleinement convaincu que, pour l'usage oral, l'Esperanto ne donne lieu à aucune méprise, même dans son état actuel très peu satisfaisant où, faute d'un dictionnaire complet, chacun de nous doit, lui-même personnellement, créer les mots pour les idées originaires et combinées. Nous avons babillé sans difficulté sur *la littérature, les travaux champêtres, le sport vélocipédique, les besoins quotidiens, etc.* » [F. Avilov, à Tiflis (Russie).]

« ... Il m'est *souvent* arrivé de rencontrer à Odessa des personnes que je ne connaissais ni de nom, ni de visage, et de constater avec surprise qu'elles savaient parfaitement l'Esperanto.... J'ai eu beaucoup de plaisir à lire des lettres de *Portugais, Suédois, Finlandais*.... » [A. Kofman, à Odessa (Russie).]

« ... Je possède quelques *centaines* d'écrits (en Esperanto) (lettres, cartes postales, etc.) reçus de *différents pays pendant les trois dernières années*.... » [Paul Nylén, à Upsala (Suède).]

« ... Dans les *États-Unis*, comme en *Russie*, j'ai connaissance de beaucoup de cas où notre langue (l'Esperanto) *a rendu des services aux voyageurs*.... » [V. de Majnov, à Scranton (États-Unis).]

« ... Grâce à l'Esperanto, je corresponds avec *beaucoup d'étrangers* (d'*Allemagne, France, Russie, Suède, Italie, Amérique*, etc.). » [Hr. Popov, à Tirnovo (Bulgarie).]

« ... Je corresponds en Esperanto *depuis* 1896, et j'ai déjà reçu de très nombreuses correspondances de *cent cinq espérantistes de presque tous les pays de l'Europe*, du *Caucase*, de la *Sibérie*, de la *Tunisie*, de l'*Algérie*, du *Canada*, des *États-Unis*, de l'État de *Grenade*, du *Brésil*, du *Chili*, de la *Nouvelle-Calédonie*.... » [R. Sperl, à Leoben (Autriche).]

« ... Il est à ma connaissance qu'il y a *beaucoup* d'espérantistes en *Russie* et en *Sibérie*.... » [A. Nippa, de (illisible) (Russie).]

« ... Parmi mes connaissances, il y a une personne dans le voisinage de *Revel,* une autre dans l'*île de Dago,* près des côtes de la Baltique, avec lesquelles je corresponds en Esperanto.... » [H. Stalberg, à Vezenberg (Russie).]

« ... L'Esperanto est connu *presque dans toute la ville*.... Pendant cet hiver, je fais un cours d'Esperanto; jeudi dernier, jour de ma deuxième leçon, mon auditoire ne comprenait *pas moins de quarante-trois personnes* dont *sept jeunes filles* et *une dame*.... » [J.-J. Süssmuth, à Södertelje (Suède).]

« ... J'emploie l'Esperanto, *depuis plus de dix ans déjà,* à correspondre avec mes amis de *tous les coins du monde*.... » [R.-H. Geoghegan, vice-consul de la Grande-Bretagne à Tacoma (États-Unis).]

« ... Je puis vous affirmer qu'au moyen de l'Esperanto je corresponds *depuis longtemps* déjà avec des *étrangers de beaucoup de nationalités*.... » [Dr Costa e Almeida, à Rezende (Portugal).]

« ... Grâce à la langue internationale, je corresponds *presque avec cinquante personnes d'autres pays,* quoique, en dehors du russe, ma langue nationale, et de l'allemand, je ne possède *aucune autre langue*.... » [V. Kurmanajev, à Pétersbourg (Russie).]

« ... En correspondant au moyen de l'Esperanto avec des *Français, Finlandais, Polonais, Russes, Allemands, Tchèques, Belges, Américains, Esthoniens et autres,* en ..., j'ai été forcé.... » [P. Ahlberg, officier de police à cheval, à Stockholm (Suède).]

« ... Moi, un Russe, *ne sachant aucune autre langue que le russe,* j'emploie l'Esperanto *depuis trois ans déjà* pour communiquer avec des étrangers, et, de cette manière, je corresponds avec l'*Espagne,* la *Hongrie* et la *Suède*.... Une personne de ma connaissance *a voyagé à travers la Finlande et la Suède à l'aide de l'Esperanto seulement, et son voyage s'est fait avec un succès complet*.... » [Dr A. Veitzler, à Saint-Kupjansk-Uslovoj (Russie).]

« ... Je corresponds avec des espérantistes *de tous les pays du monde,* quoique ne sachant, en dehors de l'Esperanto, *aucune langue vivante* (que le russe). Pendant l'été passé, j'ai fait un voyage le long du Volga, et dans *toutes* les villes de cette région j'ai visité des espérantistes que je n'avais *jamais vus, jamais connus....* Nous avons employé l'Esperanto *exclusivement, exactement comme s'il eût été notre langue maternelle.* Je suis professeur et écrivain. Pendant les dernières années, j'ai collaboré à de *très nombreux* journaux et revues *au dehors de la Russie,* seulement *grâce à l'Esperanto;* sans l'Esperanto, ceci m'aurait été tout à fait impossible. Dans ma localité (partie nord du gouvernement de Jaroslav), l'Esperanto a *une foule d'amis,* non seulement dans les villes, mais *même dans les villages....* » [Ivan Sirjaev, à Selo-Vereteja (Russie).]

3° Ici même enfin, *à Dijon,* en septembre dernier, M. Lambert, mon collègue de Philologie à la Faculté des Lettres, a reçu, fort inopinément, la visite d'un *Suédois* de Stockholm, dont auparavant il ignorait l'existence, qui avait trouvé ses nom et adresse sur l'Annuaire de la *Société pour la propagation de l'Esperanto,* et qui s'était annoncé par ces mots en Esperanto : « **Doktoro Krikortz kuracito demandas ĉu vi volas permesi al li viziton** » (Le Dr Krikortz, médecin, demande si vous voulez lui permettre une visite). Une fois en présence de l'étranger, M. Lambert, initié depuis fort peu, comme moi-même, à l'Esperanto, et *ne l'ayant pas encore parlé,* se souciait peu, par crainte de trop graves accidents, de l'inaugurer cette fois impromptu par la bouche. Cependant il fallut en venir là, parce que ni le suédois, ni le français, ni l'allemand, ni ... ne purent réussir des deux côtés à la fois, et *il est de fait que les choses marchèrent tout à fait bien,* comme entre MM. Socha, Wagner et Avilov, à Feldsberg (*voir* ci-dessus). Car, *de 2h à 10h de l'après-midi, puis le lendemain matin,* le médecin suédois et le professeur français « bavardèrent comme des pies », suivant l'expression de M. Lambert, sur *tout :* voyages, villes d'eaux de la Suède, neige boréale, Lapons, politique, affaire Dreyfus, enseignement, photographie, bicyclette, cela en visitant promenades, monuments, musées, en dînant chez l'indigène, en choisissant une chambre pour l'étranger à l'hôtel de la Cloche, en l'embarquant pour Bourbon-Lancy, etc.

Si ceux qui liront cette lettre ne voient rien, c'est évidemment qu'ils n'auront point d'yeux, ou bien qu'ils ne voudront pas les ouvrir.

Veuillez, etc.

CHARLES MÉRAY,
Correspondant de l'Institut (Académie des Sciences),
Professeur de Mathématiques à l'Université de Dijon.

M. **E. Duporcq.** — *A propos de la question* 1861 (**1900**, p. 432). — On peut remarquer que le théorème énoncé n'est qu'un cas particulier du suivant :

Si une courbe fermée se déplace de façon à toucher une droite fixe en un point fixe, le lieu des points liés à cette courbe et dont les trajectoires ont une aire donnée, est un cercle, dont le centre est le centre de gravité des courbures de la courbe envisagée.

Il suffit de remarquer que le plan mobile est entraîné par le roulement sans glissement de la développée de la courbe envisagée sur une de ses tangentes. Il en résulte, d'après un théorème bien connu, dû à Steiner, que les trajectoires d'aire donnée sont engendrées par les points d'un cercle, dont le centre est le centre de gravité des courbures de la développée; or on sait, d'autre part, qu'une courbe et sa développée ont le même centre de gravité des courbures. On pourra consulter, sur ce sujet, mon Mémoire *Sur l'aire plane balayée par un secteur variable,* publié en 1895 dans le *Journ. de Math. pures et appliquées,* p. 443-65.

M. **Ripert.** — *A propos de la question* 1867 (septembre 1900). — Dans l'énoncé parfaitement exact de ma question 1855, j'ai employé une très mauvaise terminologie que je voudrais faire disparaître. J'avais perdu de vue que l'expression *triangles triplement homologiques* est usuelle dans un tout autre sens que celui que je lui ai donné.

Rectifier ainsi l'énoncé :

« Montrer qu'elle comporte deux groupes de trois triangles ayant deux à deux même *centre* d'homologie, deux groupes de trois triangles et un groupe de quatre triangles ayant deux à deux même *axe* d'homologie et beaucoup d'autres propriétés.... »

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 525.

(1860, p. 234.)

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *les racines d'une équation*

$$f(x) = 0,$$

que nous écrirons sous la forme

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, 1)^n = 0.$$

Posons

$$A_m = (-1)^m a_0^{n-2} \sum \frac{x_1^m f'(x_2) f'(x_3) \ldots f'(x_n)}{f'(x_1)},$$

où f' *est la dérivée de* f; *démontrer que la forme*

$$\varphi = (A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n-4})(x, y)^{2n-4},$$

est un covariant de la forme

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, y)^n \quad (1).$$

(Michael Roberts.)

SOLUTION

Par M. A. Boulanger.

Soit la forme

$$f(x,y) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots$$
$$+ n a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n,$$

ou, avec la notation abrégée de Cayley,

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)(x, y)^n.$$

---

(1) L'énoncé des *Nouvelles Annales* est incorrect; il doit y avoir alternance de signe des A. L'énoncé transcrit ici est *exact*.

Tout covariant $\varphi(x, y, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de f vérifie les équations aux dérivées partielles

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} y\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots + na_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n},\\ x\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= a_n\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}} + 2a_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-2}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + na_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}.\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, si la fonction entière $\varphi(x, y, a_0, \ldots, a_n)$, homogène séparément par rapport aux variables et aux coefficients, satisfait identiquement aux équations (1), elle sera un covariant de $f(x, y)$. (Cayley, 1855; *voir* la démonstration de Brioschi, *Annali di Matematica,* 1858.)

Soit

$$\varphi = A_0 x^p + pA_1 x^{p-1}y + \frac{p(p-1)}{1.2}A_2 x^{p-2}y^2 + \ldots + A_p y^p,$$

cette fonction où les A sont de formes de même degré en $a_0, a_1, \ldots, a_n$; la condition de vérification du système (1) en $x, y, a_0, a_1, \ldots, a_n$ équivaut à celle du système suivant, en $a_0, a_1, \ldots, a_n$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} a_0\frac{\partial A_m}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial A_m}{\partial a_2} + 3a_2\frac{\partial A_m}{\partial a_3} + \ldots + na_{n-1}\frac{\partial A_m}{\partial a_n} &= mA_{m-1},\\ na_1\frac{\partial A_m}{\partial a_0} + (n-1)a_2\frac{\partial A_m}{\partial a_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n\frac{\partial A_m}{\partial a_{n-1}} &= mA_{p-m+1}\end{aligned}\right.$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots, p).$$

Ces propriétés rappelées, le théorème à établir est immédiat. Soit

$$f(x, 1) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n);$$

comme

$$f'(x_i, 1) - a_0(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n),$$

les coefficients de la forme φ de l'énoncé s'écrivent

$$A_m = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} a_0^{2n-4}\sum x_1^m(x_2 - x_3)^2\ldots(x_{n-1} - x_n)^2;$$

comme $m \leqq 2n - 4$, la fonction symétrique entière mise en évidence, où chaque racine a pour exposant maximum $2n - 4$, est, à $\frac{1}{a_0^{2n-4}}$ près, une forme de degré $(2n-4)$ en a_0, $a_1, \ldots, a_n$; A_m est donc une telle forme.

Il suffit dès lors de vérifier que les A_m vérifient les équations (2). A cet effet, utilisons la substitution

$$x = x' + hy', \qquad y = y',$$

qui transforme la forme $(a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n$ en la forme $(a'_0, a'_1, \ldots, a'_n)(x', y')^n$, avec

$$(3) \quad a'_i = a_i + i a_{i-1} h + \frac{i(i-1)}{1.2} a_{i-2} h^2 + \ldots + i a_1 h^{i-1} + a_0 h^i$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Pour cette nouvelle forme, on a

$$A_m(a'_0, a'_1, \ldots, a'_n)$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} a_0'^{2n-4} \sum x_1'^m (x'_2 - x'_3)^2 \ldots (x'_{n-1} - x_n)^2,$$

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ étant les racines de $(a'_0, a'_2, \ldots, a'_n)(x', 1) = 0$, c'est-à-dire $x_1 - h, x_2 - h, \ldots$; donc la relation

$$A_m(a'_0, a'_1, \ldots, a'_n)$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} a_0^{2n-4} \sum (x_1 - h)^m (x_2 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2$$

sera, après remplacement des a'_i par leurs valeurs (3), une identité en h; si l'on développe le premier membre par la formule de Taylor en regardant a_i comme valeur initiale de a'_i, on reconnaît immédiatement, par l'identification des termes du premier degré en h, que les A_m vérifient la première série des équations (2).

La seconde série des équations (2) sera évidemment vérifiée si l'on démontre que l'échange dans $f(x, y)$ des coefficients équidistants des extrêmes échange entre eux dans φ les coefficients A équidistants des extrêmes. Or la substitution

$$x = y', \qquad y = x'$$

transforme $f(x, y)$ en $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)(x', y')$, forme pour laquelle on a

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}_m(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)\\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} a_n^{2n-4} \sum \frac{1}{x_1^m}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right)^2 \cdots \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right)^2\\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} \frac{a_n^{2n-4}}{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{2n-4}} \sum x_1^{2n-4-m}(x_2 - x_3)_2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2\\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+m} a_0^{2n-4} \sum x_1^{(2n-4)-m}(x_2 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2\\
&= \mathrm{A}_{(2n-4)-m}(a_0, a_1, \ldots, a_n).
\end{aligned}
$$

Le théorème est donc établi.

QUESTIONS.

1901. Sur une biquadratique, il existe seize points où le plan osculateur à cette courbe la suroscule et ces seize points sont à l'intersection de la biquadratique avec les faces du tétraèdre ayant pour sommets les sommets des quatre cônes du second degré passant par la biquadratique.

(H. LÉAUTÉ.)

1902. Si, par une génératrice quelconque de l'un des quatre cônes du second degré qui passent par une biquadratique, on mène les quatre plans tangents à cette courbe, les quatre points de contact sont dans un même plan. (H. LÉAUTÉ.)

1903. Si l'on considère les courbes tracées sur une même quadrique, le rapport anharmonique de quatre courbes quelconques, tangentes à une même biquadratique, est constant lorsque ces courbes appartiennent à un faisceau tel qu'elles ne coupent la biquadratique qu'en deux points variables.

(H. LÉAUTÉ.)

1904. Si l'on considère quatre plans osculateurs à une biquadratique en quatre points situés dans un même plan, leurs quatre autres points d'intersection avec la courbe sont aussi dans un même plan. (H. LÉAUTÉ.)

1905. Lorsque les côtés d'un polygone inscrit dans une biquadratique parcourent des quadriques ou des quadricuspidales fixes, le dernier côté décrit une quadrique ou une quadricuspidale suivant que le nombre de côtés qui parcourent des quadriques est impair ou pair. (H. LÉAUTÉ.)

1906. Par un point d'une biquadratique, on peut mener neuf plans osculateurs à cette courbe (sans y comprendre le plan osculateur au point choisi); les neuf points d'osculation ainsi déterminés sont trois à trois situés dans trois plans passant par le point donné. (H. LÉAUTÉ.)

1907. Si, par l'une des génératrices d'une quadrique passant par une biquadratique, on mène les quatre plans tangents à cette courbe, les quatre points de contact sont fixes quelle que soit la génératrice choisie sur la quadrique considérée.
(H. LÉAUTÉ.)

1908. Un point matériel est sollicité par une force centrale qui est fonction de la distance du point au centre fixe et est exprimée par $f(r)$: démontrer que le rayon de courbure des courbes tautochrones pour ladite loi de force est donné par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d}{dr}\left(r\sqrt{1 - 2k^2\frac{U(r)}{U'^2(r)}}\right),$$

après avoir posé

$$U(r) = \int_r^{r_0} f(r)\,dr,$$

r_0 étant le rayon vecteur correspondant au point de tautochronisme. (VITTORIO NOBILE.)

1909. On compare à un thermomètre centigrade un autre thermomètre marquant aussi 0° et 100° dans la glace fondante et l'eau bouillante, mais gradué de telle sorte que, quand on passe de θ° à $\theta + 1^\circ$, le volume V_θ s'accroît d'une fraction constante β, non du volume à 0°, mais du volume à θ°. Quelle est la température centigrade t d'un milieu pour lequel la lecture sur le second thermomètre dépasse de T la lecture faite sur le premier? (LÉMERAY.)

UNE LETTRE DE M. HERMITE.

A la séance de clôture du *Congrès international des Mathématiciens*, le 11 août 1900, je proposai, d'accord avec quelques Collègues, l'envoi du télégramme suivant à M. Ch. Hermite, président d'honneur du Congrès, et qui se trouvait alors à Saint-Jean-de-Luz :

Le Congrès international des Mathématiciens envoie l'expression de son admiration et de sa sympathie respectueuse au géomètre illustre qui honore son pays et le monde scientifique entier, par son talent aussi bien que par son caractère.

C'est unanimement que les Mathématiciens de toutes les nations forment pour Monsieur Hermite les vœux les plus sincères de bonheur et de santé.

L'envoi proposé fut voté par acclamations, et le télégramme, qui figurera sans aucun doute dans les Comptes rendus du Congrès, fut adressé aussitôt. En faisant cette proposition, je n'avais eu d'autre mérite que de traduire en quelques mots la pensée de tous nos Collègues, je pourrais dire la pensée unanime de tous les mathématiciens, présents ou non; car tous vénèrent à juste titre l'homme illustre chez lequel le génie et la bonté sont liés si intimement.

L'initiative que j'avais prise, et qui, à mon défaut, aurait été prise par un autre, me semblait chose toute naturelle. Ce n'est donc pas sans une véritable surprise, mêlée, je dois le dire, d'une sincère émotion, que j'ai reçu dans les premiers jours de janvier la lettre qu'on va lire. Bien qu'elle ait un caractère tout intime, j'ai cru devoir demander à M. Hermite la permission de la publier dans les *Nouvelles Annales;* sur mes instances, il a consenti, avec sa bienveillance habituelle.

Si j'ai sollicité cette autorisation, malgré le caractère beaucoup trop élogieux de certains passages en ce qui me concerne, c'est qu'à mon avis cette lettre honore beaucoup plus l'auteur que le destinataire; c'est, en second lieu, parce qu'elle contient en des termes excellents une réponse adressée aux membres du Congrès, plutôt qu'à moi personnellement. Il m'a semblé, enfin, qu'on ne lirait pas sans plaisir cette manifestation du grand géomètre, dans le même recueil précisément où le jeune Charles Hermite, candidat à l'École Polytechnique, publiait en 1842 des articles portant déjà l'empreinte d'un génie naissant.

C.-A. LAISANT.

Voici le texte de la Lettre de M. Hermite :

Paris, 3 janvier 1901.

MONSIEUR,

J'ai à remplir envers vous un devoir de conscience et de cœur que j'ignorais jusqu'ici, que rien ne m'avait révélé, et qu'une Lettre récente de M. J. Duràn Loriga vient seulement de m'apprendre. Au mois d'août dernier, un télégramme m'est parvenu à Saint-Jean-de-Luz, envoyé par le Congrès mathématique réuni alors à Paris, qui m'a comblé de joie, qui a fait l'orgueil et le bonheur de tous les miens, en m'apportant les félicitations des membres du Congrès, et rappelant ma vie de travail en termes trop bienveillants et que je voudrais avoir mérités. Qui avait provoqué et obtenu pour moi un témoignage si précieux d'estime, au-dessus de toutes les récompenses? Je viens de l'apprendre, Monsieur, et je ne puis dire quelle satisfaction je ressens à vous en remercier sincèrement, bien cordialement, comme du couronnement de ma carrière.

Vous avez traversé les orages de la politique, vous avez connu les passions des pervers, les folies des insensés, la lâcheté des honnêtes gens; vous avez cruellement souffert du malheur des circonstances; et je doute que vous ayez jamais été effleuré par le regret du passé, en revenant à votre vocation mathématique et aux inspirations de votre beau talent pour l'Analyse.

Je n'ai jamais eu l'honneur des luttes, des troubles qui sont le partage des hommes politiques; ma vie a été toujours tranquille, mais non indifférente au pays; et c'est avec le respect du courage dans le combat, des efforts pour le servir, des tristesses et des amertumes qu'on y rencontre, que je vous renouvelle mes remerciements pour un généreux concours donné à un algébriste au terme de sa carrière, en vous offrant l'hommage de ma sympathie, de ma reconnaissance et de mes sentiments entièrement dévoués.

Ch. Hermite.

Les lignes qui précèdent étaient déjà livrées à l'impression quand m'est arrivée la douloureuse nouvelle de la mort du grand géomètre, de l'homme excellent qui sera pleuré par tous les mathématiciens.

La Lettre qu'on vient de lire est sans doute l'une des dernières qu'il ait écrites, la dernière peut-être; et elle prend par cela même une valeur d'autant plus grande. On y trouve la marque des deux vertus qui l'ont caractérisé surtout, et qui contribueront autant que son génie à l'honneur de sa mémoire : la bonté, la modestie.

Ce n'est pas sans un serrement de cœur que je me rappelle la visite, toute récente, que je lui ai rendue à cette occasion et que je ne soupçonnais pas, hélas, devoir être la dernière. Il souffrait un peu, était oppressé, me disait : « Je suis au bout de ma carrière, mais je n'ai » pas à me plaindre; on m'a toujours gâté; j'ai tra- » vaillé, mais j'aurais pu faire davantage. »

Puis, il se mettait à évoquer les anciens souvenirs, se reportait au temps où il m'interrogeait comme candidat à l'École Polytechnique, me rappelait qu'il avait eu, ainsi que moi, pour professeur, un homme de grande valeur intellectuelle et morale, Gerono, pour lequel nous avions une vénération commune. Ensuite, il me faisait part, avec une netteté et une lucidité remarquables, de ses idées sur l'enseignement, qu'il aurait voulu voir *clarifié* et simplifié.

Enfin, comme je sollicitais, ainsi que je l'ai dit plus haut, l'autorisation de publier sa Lettre : « J'aurais » mauvaise grâce à vous la refuser, me répondit-il ; » mais ne me mettez pas en avant; je ne veux prendre » aucune initiative, faire aucune manifestation ; *je vis* » *dans mon trou,* entouré d'affections, heureux en » somme, mais *je ne suis plus bon à rien,* et je n'ai » qu'à garder le silence. Dites donc bien que ma Lettre » était tout intime, et que je me suis borné à vous » donner un consentement. »

Quoi qu'il pût penser et dire, le Maître qui parlait ainsi *était bon* à servir d'exemple aux hommes de science, et surtout à ceux qui sont arrivés à la gloire. Il montrait que chez ceux qui ont le cœur haut placé, la bienveillance est conciliable avec le talent; que pour le vrai savant, la seule passion doit être le culte de la vérité, que les préoccupations personnelles disparaissent, que l'esprit d'intrigue et de critique acerbe est haïssable.

Même disparu, il nous donnera longtemps encore ces fortes leçons morales. Il les donnera également aux jeunes générations qui nous suivent, lorsqu'elles étudieront non seulement ses œuvres, mais sa vie.

Ce n'est pas le lieu ni le moment d'essayer de la retracer ici. Certains tableaux sont trop grands pour se prêter à des réductions semblables. Mon seul but a été, sous le coup de la douloureuse annonce de la mort de M. Hermite, de payer un modeste tribut d'admiration et de respect à l'une des figures contemporaines dont la Science et la France ont le droit de s'enorgueillir. Que sa famille le sache bien : l'affliction où elle est plongée est partagée par les savants, sur toute l'étendue du globe; et la mémoire de celui qui vient de nous être enlevé restera justement l'objet de l'admiration générale. Puisse cette pensée, chez ceux qui le pleurent, être un adoucissement de leur peine!

C.-A. LAISANT.

[O6]

ÉTUDE SUR LES PSEUDO-SURFACES, EN GÉNÉRAL, ET SUR UN EXEMPLE PARTICULIER DE PSEUDO-SURFACES MINIMA;

PAR M. L'ABBÉ ISSALY.

L'exemple auquel l'étude générale que nous avons en vue doit, en quelque sorte, servir de cadre est celui d'un *pseudo-hélicoïde* gauche, très voisin de l'hélicoïde à plan directeur ordinaire.

Bien qu'un pareil lieu ne puisse pas être représenté, à la manière des surfaces, par une équation en *termes finis*, il peut l'être toutefois, analytiquement, par trois équations différentielles simultanées, et géométriquement, par les réseaux, tous réels et intégrables, de ses lignes de courbure, de ses lignes asymptotiques, géodésiques, etc.

Comme il sera prouvé, notamment, que les premières de ces lignes sont obliques entre elles, tandis que les secondes sont rectangulaires, nous pouvons en conclure (eu égard à nos recherches antérieures) que le nouveau lieu est une *pseudo-surface*, d'abord, et, plus strictement, une pseudo-surface *minima*.

Allant plus loin, nous ferons voir que, dans le sens habituel du mot, notre pseudo-hélicoïde est rigoureusement *applicable* sur une alysséide qu'on aurait déformée en altérant (comme pour lui, du reste) la loi de variation infinitésimale de ses rayons vecteurs, sans cependant nuire en rien, chose possible, à l'orthogonalité initiale de ses lignes de courbure.

Mais, pour traiter avec plein succès un sujet si inusité, il nous paraît opportun d'en faire comme le centre de tout un ensemble de formules exclusivement empruntées à ce que, par extension, on peut nommer la *théorie des pseudo-surfaces* (1).

I.

DÉFINITIONS ET FORMULES RELATIVES A LA THÉORIE DES PSEUDO-SURFACES.

Coordonnées rectangulaires.

1. Étant données deux séries de courbes (s), (s'), variables de forme et de position, mais assujetties à se rencontrer, aux infiniment petits du deuxième ordre près, nous avons, dès 1888, démontré, dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France,* qu'un tel lieu, dit *pseudo-surface*, non seulement possède les propriétés fondamentales des surfaces, mais encore les généralise notablement. Ainsi en est-il, par exemple, pour tout ce qui a trait à la normale, aux plans soit tangent, soit osculateur, à l'indicatrice, aux lignes remarquables de toute espèce, etc.

(1) Une analyse très succincte de ce travail a été présentée par l'auteur, dans la séance du 9 août 1900, au Congrès des Mathématiciens, réunis en Sorbonne (Section de Géométrie).

Ceci rappelé, soient, d'une part, T_0 le trièdre trirectangle fixe de référence et, d'autre part, MXYZ ou T, le trièdre mobile, supposé, lui aussi, jusqu'à avis contraire, trirectangle. Soient en outre a, b, c, a', ..., les cosinus directeurs des arêtes de ce second trièdre. Nous admettrons comme établi *géométriquement* le système de relations différentielles (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 50; 1900) :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial s} &= a'r - a''q,\\ \frac{\partial a'}{\partial s} &= a''p - ar,\\ \frac{\partial a''}{\partial s} &= aq - a'p, \end{aligned}\right.$$

ainsi que son analogue, relatif à la variable s'. Des deux réunis on déduit aussitôt

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \Sigma a''\frac{\partial a'}{\partial s} = -\Sigma a'\frac{\partial a''}{\partial s},\\ q &= \Sigma a\frac{\partial a''}{\partial s} = -\Sigma a''\frac{\partial a}{\partial s},\\ r &= \Sigma a'\frac{\partial a}{\partial s} = -\Sigma a\frac{\partial a'}{\partial s},\\ p' &= \Sigma a''\frac{\partial a'}{\partial s'} = -\Sigma a'\frac{\partial a''}{\partial s'},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Au moyen de ces valeurs, il devient facile de former, en coordonnées rectangulaires, du moins, les équations des diverses lignes remarquables d'une pseudo-surface $\mathfrak{F}''$, tangente à l'origine M, au plan mobile des XY, à savoir

$$(3)\qquad p\,ds^2 + (q+p')\,ds\,ds' + q'\,ds'^2 = 0 \qquad \text{(lignes de courbure)},$$

$$(4)\qquad -q\,ds^2 + (p-q')\,ds\,ds' + p'\,ds'^2 = 0 \qquad \text{(lignes asymptotiques)},$$

$$(5)\qquad d\varphi + r\,ds + r'\,ds' = 0 \qquad \text{(lignes géodésiques)}.$$

On passera d'ailleurs au cas des surfaces en introduisant, dans les deux premières, la condition connue $p + q' = 0$.

Mais ici une question se présente : Est-il possible de distinguer les pseudo-surfaces entre elles, comme on distingue les surfaces, et, conséquemment, de déterminer avec netteté les lignes, ou asymptotiques, ou géodésiques, etc., propres à chacune? Oui, on le peut. Il suffit pour cela de mettre à profit l'indépendance originelle (¹) des arcs ds, ds', et de poser, à l'exemple de Gauss,

$$ds = \mathrm{A}\, du, \qquad ds' = \mathrm{A}'\, du', \tag{6}$$

formules dans lesquelles A et A′ désignent des fonctions *données* de u et u', mais dont il y aura lieu pourtant de fixer tout à l'heure le mode de composition. Quoi qu'il en soit, si pour le moment nous portons ces valeurs

(¹) Dans nos précédentes recherches nous avons distingué les pseudo-surfaces des surfaces, en disant que, à l'encontre de celles-ci, les arcs coordonnés ds, ds' devaient, sur les premières, seules, être regardés comme indépendants des variables u et u'. En réalité, le vrai critérium qui les classifie porte sur les *variations* réciproques de ces mêmes arcs. Autrement dit, pour les pseudo-surfaces, on a

$$d_s d_{s'} x \neq d_{s'} d_s x,$$

tandis que, pour les surfaces, au contraire,

$$d_s d_{s'} x = d_{s'} d_s x,$$

invariablement.

Quant aux arcs eux-mêmes, ils peuvent, *au même titre*, ainsi que tout ce Mémoire en fournit la preuve, être considérés, tantôt comme variables indépendantes, par exemple lorsqu'il s'agit de propriétés similaires affectant à la fois et les pseudo-surfaces et les surfaces, tantôt comme fonctions de deux autres variables quelconques, telles que u, u', lorsqu'il s'agit, notamment, de l'étude isolée d'un lieu de l'une ou de l'autre espèce.

A peine est-il besoin d'ajouter que les conditions relatées ci-dessus entraînent $p + q' \neq 0$, pour les pseudo-surfaces, $p + q' = 0$ pour les surfaces, et *vice versa*.

dans l'expression de l'élément linéaire

$$(7)\qquad dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 + ds'^2 + 2\,ds\,ds' \cos\Phi,$$

il prendra la forme

$$(7')\qquad dS^2 = A^2 du^2 + A'^2 du'^2 + 2B'' du\,du',$$

le coefficient B″, disons-le par anticipation, devant rester *nul* dans le cas particulier de la pseudo-surface annoncée.

2. Actuellement, soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du lieu $\mathfrak{F}''$, par rapport au trièdre fixe T_0. L'analogie que nous avons signalée, en commençant, entre le mode de génération d'une surface et d'une pseudo-surface, nous conduit à représenter cette dernière par le système général

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= P\,du + Q\,du', \\ dy &= P'\,du + Q'\,du', \\ dz &= P''du + Q''du', \end{aligned}\right.$$

dans lequel, P, Q, P′, ... désignent des fonctions absolument *quelconques* de u et u'. C'est dire qu'en principe aucune de ces trois équations n'est *intégrable*.

Que, pour représenter une pseudo-surface, l'une au moins des trois, la première, par exemple, doive être telle, c'est que, sans cette condition, on aurait forcément

$$P = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad Q = \frac{\partial x}{\partial u'},$$

et alors du système tout entier on tirerait

$$x = \varphi(u, u'), \qquad y = \psi(u, u'), \qquad z = \chi(u, u'),$$

de sorte que la pseudo-surface $\mathfrak{F}''$ ne serait pas distincte de la surface F″, tangente, comme elle, au point $M(x_0, y_0, z_0)$ au plan des XY ; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Remarquons toutefois que, respectivement à ces deux cas, on peut déduire du système (8)

$$\begin{vmatrix} dx & P & Q \\ dy & P' & Q' \\ dz & P'' & Q'' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} dx & \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u'} \\ dy & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u'} \\ dz & \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u'} \end{vmatrix} = 0,$$

équations qui prouvent que l'élément linéaire (7) ne sort pas, ou du plan

$$(9) \quad \begin{cases} (P'Q'' - Q'P'')(x - x_0) + (P''Q - Q''P)(y - y_0) \\ \qquad + (PQ' - QP')(z - z_0) = 0, \end{cases}$$

ou de son analogue en $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \ldots$, c'est-à-dire du plan *tangent*, mené en M, soit à $\mathfrak{F}''$, soit à F''. Je dis : tangent, car on verra bientôt que les coefficients des variables sont proportionnels à a'', b'', c'', en sorte que, lorsque les paramètres u_0, u'_0 et, par eux, les coordonnées x_0, y_0, z_0 varient d'une manière continue, le premier de ces plans *enveloppe* $\mathfrak{F}''$ et le second, F''.

C'est du premier d'entre eux que nous aurons à nous occuper exclusivement. Nous l'écrirons, plus simplement, ainsi

$$(9') \qquad \mathcal{A}(x - x_0) + \mathcal{A}'(y - y_0) + \mathcal{A}''(z - z_0) = 0,$$

avec

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathcal{A} = P'Q'' - Q'P'', \\ \mathcal{A}' = P''Q - Q''P, \\ \mathcal{A}'' = PQ' - QP'. \end{cases}$$

3. Avant de poursuivre, arrêtons-nous un instant au cas très pratique où l'on aurait

$$P = 1, \qquad Q = 0, \qquad P' = 0, \qquad Q' = 1,$$

et, par suite, $u = x$, $u' = y$. Les deux premières équations (8) disparaissent alors et il reste

$$dz = \mathrm{P}'' dx + \mathrm{Q}'' dy, \tag{11}$$

P'', Q'' désignant des fonctions quelconques de x et y. Que si après cela on y remplace ces variables par x_0, y_0, l'équation (9) du plan tangent en M s'écrira

$$z - z_0 = \mathrm{P}''(x - x_0) + \mathrm{Q}''(y - y_0). \tag{9''}$$

Pour donner de ce cas particulier une application immédiate, nous ferons observer que toute *courbe gauche* de l'espace pouvant, dans le cas le glus général, être regardée comme l'intersection de deux pseudo-surfaces, telles que

$$\left\{ \begin{aligned} dx &= \mathrm{P}\, dy + \mathrm{Q}\, dz, \\ dy &= \mathrm{P}'\, dz + \mathrm{Q}'\, dx, \end{aligned} \right. \tag{8'}$$

lieux qu'il convient de désigner par $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$, la tangente

$$\frac{x - x_0}{dx_0} = \frac{y - y_0}{dy_0} = \frac{z - z_0}{dz_0},$$

au point (x_0, y_0, z_0) de la courbe choisie pourra, en vertu des *identités*

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{dx_0} &= \frac{\mathrm{P}(y - y_0) + \mathrm{Q}(z - z_0)}{\mathrm{P}\, dy_0 + \mathrm{Q}\, dz_0}, \\ \frac{y - y_0}{dy_0} &= \frac{\mathrm{P}'(z - z_0) + \mathrm{Q}'(x - x_0)}{\mathrm{P}'\, dz_0 + \mathrm{Q}'\, dx_0}, \end{aligned}$$

être envisagée, à son tour, comme l'*intersection* des deux plans tangents menés à $\mathscr{F}$ et à $\mathscr{F}'$, en ce même point.

En terminant ceci, qu'on nous permette de rappeler que c'est précisément sous la forme (11), la plus simple de toutes, que nous avons signalé pour la première fois l'existence des pseudo-surfaces, en 1888 et 1889, d'abord dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France,* puis, en 1890, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

4. Ces principes établis et ces remarques faites, revenons aux formules (6).

Des identités connues

$$dx = a\,ds + a'\,ds' = \mathrm{A}a\,du + \mathrm{A}'a'\,du' = \mathrm{P}\,du + \mathrm{Q}\,du',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on tire immédiatement

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} & a = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}}, \qquad b = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{A}}, \qquad c = \frac{\mathrm{P}''}{\mathrm{A}}, \\ & \frac{\partial a}{\partial s} = \frac{1}{\mathrm{A}^2}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u} - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}^3}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u}, \\ & \frac{\partial a}{\partial s'} = \frac{1}{\mathrm{A}\mathrm{A}'}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u'} - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}^2\mathrm{A}'}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'}, \end{aligned}\right.$$

$$(12')\quad \left\{\begin{aligned} & a' = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}'}, \qquad b' = \frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{A}'}, \qquad c' = \frac{\mathrm{Q}''}{\mathrm{A}'}, \\ & \frac{\partial a'}{\partial s} = \frac{1}{\mathrm{A}\mathrm{A}'}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u} - \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}\mathrm{A}'^2}\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u}, \\ & \frac{\partial a'}{\partial s'} = \frac{1}{\mathrm{A}'^3}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial u'} - \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}'^3}\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u'}, \end{aligned}\right.$$

les *seconds termes* étant à négliger lorsqu'il s'agit de lignes de courbure ou de lignes asymptotiques, et à retenir pour les lignes géodésiques seules.

Au surplus, et sans distinction de cas d'aucune sorte, les valeurs précédentes de a, b, c, a', ..., nous donnent

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}^2 &= \mathrm{P}^2 + \mathrm{P}'^2 + \mathrm{P}''^2 = \Sigma\,\mathrm{P}^2, \\ \mathrm{A}'^2 &= \mathrm{Q}^2 + \mathrm{Q}'^2 + \mathrm{Q}''^2 = \Sigma\,\mathrm{Q}^2, \\ \mathrm{B}'' &= \mathrm{P}\mathrm{Q} + \mathrm{P}'\mathrm{Q}' + \mathrm{P}''\mathrm{Q}'' = \Sigma\,\mathrm{P}\mathrm{Q}, \end{aligned}\right.$$

conjointement avec

$$(14)\quad \cos\Phi = \frac{\mathrm{B}''}{\mathrm{A}\mathrm{A}'}, \qquad \sin\Phi = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}\mathrm{A}'} = \frac{1}{\mathrm{A}\mathrm{A}'}\sqrt{\mathrm{A}^2\mathrm{A}'^2 - \mathrm{B}''^2},$$

ces deux dernières formules, redisons-le, ne devant être utilisées d'une manière continue que plus tard.

En attendant, servons-nous de celles qui précèdent pour mettre sous forme de déterminants les quatre composantes $-q$, p', p, $-q'$ du Tableau (2). Avec nos coordonnées actuelles, on a d'abord

$$\frac{a''}{bc'-cb'} = \frac{b''}{ca'-ac'} = \frac{c''}{ab'-ba'} = 1,$$

et, par suite,

$$(15)\qquad -q = \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial s} & a & a' \\ \frac{\partial b}{\partial s} & b & b' \\ \frac{\partial c}{\partial s} & c & c' \end{vmatrix} = \frac{1}{A^3 A'} \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & P & Q \\ \frac{\partial P'}{\partial u} & P' & Q' \\ \frac{\partial P''}{\partial u} & P'' & Q'' \end{vmatrix} = \frac{D}{A^3 A'}.$$

Comme les trois autres composantes s'obtiennent en remplaçant les éléments de la première colonne du second déterminant par $\frac{\partial Q}{\partial u'}, \frac{\partial Q'}{\partial u'}, \frac{\partial Q''}{\partial u'}$ pour p', par $\frac{\partial Q}{\partial u}, \ldots$ pour p, et $\frac{\partial P}{\partial u'}, \ldots$ pour $-q'$, on a, en les groupant,

$$(15')\qquad \left\{ \begin{aligned} -q &= \Delta = \frac{D}{A^3 A'}, & p &= \Delta'' = \frac{D''}{A^2 A'^2}, \\ p' &= \Delta' = \frac{D'}{AA'^3}, & -q' &= \Delta''_1 = \frac{D''_1}{A^2 A'^2}. \end{aligned} \right.$$

Servons-nous de ces premiers résultats.

1° Si l'on introduit ces valeurs (où A et A' ont été traités comme des constantes) dans les équations des lignes de courbure (3) et des lignes asymptotiques (4), elles prendront la forme

$$(3')\qquad A^2 D'' du^2 - (A'^2 D - A^2 D')\, du\, du' - A'^2 D''_1\, du'^2 = 0,$$

$$(4')\qquad D\, du^2 + (D'' + D''_1)\, du\, du' + D'\, du'^2 = 0,$$

les différentielles du, du' pouvant, à l'occasion, être avantageusement remplacées par leurs valeurs $\frac{ds}{A}$, $\frac{ds'}{A'}$.

Ajoutons que, pour passer des pseudo-surfaces aux surfaces, il suffit de poser $p = -q'$, c'est-à-dire (15')

$$\Delta'' = \Delta''_1 \qquad \text{ou mieux} \qquad D'' = D''_1.$$

2° Quant aux lignes géodésiques (5), elles exigent un calcul tout spécial. Avant de l'entreprendre, nous adopterons les notations suivantes

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \frac{\partial P}{\partial u} = R, & \frac{\partial Q}{\partial u} = S, & \frac{\partial P}{\partial u'} = S_1, & \frac{\partial Q}{\partial u'} = T, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \end{array} \right.$$

par où l'on voit déjà que, pour revenir aux surfaces, il *suffit* d'avoir

$$S = S_1, \qquad S' = S'_1, \qquad S'' = S''_1,$$

puisque alors les trois équations (8) deviennent intégrables. En rapprochant les expressions (13) et (16) entre elles, et y adjoignant (14), par anticipation, on en tire

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \Sigma PR = A \frac{\partial A}{\partial u}, & \Sigma QT = A' \frac{\partial A'}{\partial u'}, & \Sigma QR = \frac{\partial B''}{\partial u} - A_0 \frac{\partial A}{\partial u'}, \\ \Sigma QS = A' \frac{\partial A'}{\partial u}, & \Sigma PS_1 = A \frac{\partial A}{\partial u'}, & \Sigma PT = \frac{\partial B''}{\partial u'} - A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u}, \\ \Sigma QS_1 = A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u}, & \Sigma PS = A_0 \frac{\partial A}{\partial u'}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

les nouveaux coefficients A_0, A'_0 étant tels que, pour $S = S_1$, ... (cas des surfaces, avons-nous dit), on a nécessairement

$$A_0 = A, \qquad A'_0 = A'.$$

Ceci posé, écrivons l'équation (5) sous la forme

$$(5') \qquad d\varphi + A\,r\,du + A'r'\,du' = 0,$$

et calculons, en premier lieu, les paramètres $A\,r$ et $A'r'$.

Pour rester sur le terrain exclusif des pseudo-surfaces, c'est-à-dire pour éviter toute condition implicite ou explicite *d'intégrabilité*, nous nous reporterons aux systèmes (2). On en tire notamment

$$r = -\Sigma a \frac{\partial a'}{\partial s}, \qquad r' = \Sigma a' \frac{\partial a}{\partial s'}.$$

Or, les dérivées $\frac{\partial a'}{\partial s}$, $\frac{\partial a}{\partial s'}$ nous sont données par les formules (12) qu'il faut prendre ici, selon la remarque déjà faite, *dans toute leur intégrité*. Tenant compte, dans leur emploi, de l'hypothèse qui domine tous les calculs actuels, savoir

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou bien} \qquad B'' = \Sigma PQ = 0,$$

on trouve facilement

$$\begin{aligned} A r &= -\frac{1}{AA'} \Sigma PS = -\frac{1}{A'} \frac{A_0}{A} \frac{\partial A}{\partial u'}, \\ A' r' &= \frac{1}{AA'} \Sigma QS_1 = \frac{1}{A} \frac{A'_0}{A'} \frac{\partial A'}{\partial u}, \end{aligned}$$

formules qui en généralisent d'autres bien connues et dans lesquelles on pourra poser, si bon semble, par abréviation, $\frac{A_0}{A} = a_0$, $\frac{A'_0}{A'} = a'_0$.

Calculons, en second lieu, $d\varphi$, et pour cela remarquons que le triangle infinitésimal $MM'\mu$ nous donne

$$\frac{ds}{\cos\varphi} = \frac{ds'}{\sin\varphi} = \frac{dS}{1}$$

ou bien

$$\frac{A\,du}{\cos\varphi} = \frac{A'\,du'}{\sin\varphi} = \frac{dS}{1} = \sqrt{A^2\,du^2 + A'^2\,du'^2}.$$

Différentiant, il vient

$$\begin{aligned} d(A\,du) &= d^2S\cos\varphi - dS\sin\varphi\,d\varphi, \\ d(A'\,du') &= d^2S\sin\varphi + dS\cos\varphi\,d\varphi; \end{aligned}$$

d'où, par l'élimination de d^2S,

$$dS^2\, d\varphi = A\, du . d(A'\, du') - A'\, du' . d(A\, du).$$

Il ne reste plus qu'à porter, dans l'équation (5'), avec les expressions ci-dessus de Ar et $A'r'$, cette valeur de $d\varphi$, où l'on aura préalablement développé les différentielles totales qu'elle contient, pour en déduire l'équation demandée des lignes géodésiques de la pseudo-surface $\mathcal{F}''$, savoir

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &A^2 A'^2 (du\, d^2 u' - du'\, d^2 u) \\ &\quad = A^2 A_0 \frac{\partial A}{\partial u'} du^3 + \left[A'^2 A \frac{\partial A}{\partial u} - A^2 (A'_0 + A') \frac{\partial A'}{\partial u}\right] du^2\, du' \\ &\quad\quad - \left[A^2 A' \frac{\partial A'}{\partial u'} - A'^2 (A_0 + A) \frac{\partial A}{\partial u'}\right] du\, du'^2 - A'^2 A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u} du'^3. \end{aligned}\right.$$

Lorsque $A_0 = A$ et que $A'_0 = A'$, on retombe, comme on l'a déjà dit, sur le cas des surfaces.

Venons maintenant à la pseudo-surface minima dont nous avons, dès le début, annoncé l'étude.

II.

EXEMPLE D'UN PSEUDO-HÉLICOÏDE GAUCHE, A PLAN DIRECTEUR. SES LIGNES REMARQUABLES.

5. Parmi les pseudo-surfaces, en nombre infini, que les équations générales (8) sont aptes à représenter, il n'en est pas de plus intéressantes, assurément, que celles qui *avoisinent* des surfaces, et ont naturellement celles-ci pour *limites*.

De ce nombre est le pseudo-hélicoïde particulier dont il va être question. Mais auparavant, soient

$$(19)\qquad x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta, \qquad z = a\theta,$$

les équations de l'hélicoïde gauche ordinaire H. En les différentiant, on a

$$(20)\qquad \begin{cases} dx = -\rho \sin\theta \, d\theta + \cos\theta \, d\rho, \\ dy = \quad \rho \cos\theta \, d\theta + \sin\theta \, d\rho, \\ dz = a \, d\theta. \end{cases}$$

Pour produire, *ad libitum,* un pseudo-hélicoïde, voisin du premier, il n'y a qu'à poser, par exemple,

$$(21)\qquad \begin{cases} dx = -\rho \sin\theta \, d\theta + (1+\alpha)\cos\theta \, d\rho, \\ dy = \quad \rho \cos\theta \, d\theta + (1+\alpha)\sin\theta \, d\rho, \\ dz = a \, d\theta. \end{cases}$$

Ainsi altérées, les deux premières équations du système cessent d'être intégrables, tandis que, du même coup, l'hélicoïde H subit une déformation, que l'on peut qualifier de *dilatation* ou de *contraction vectorielle,* selon que la *constante* α est positive ou négative.

La raison en est qu'en projection, sur le plan fixe des xy, l'élément linéaire devient

$$dS_z^2 = \rho^2 \, d\theta^2 + d[(1+\alpha)\rho]^2,$$

forme significative qui justifie, à elle seule, notre dénomination.

Au surplus, je dis que le nouveau lieu géométrique $\mathfrak{H}_\alpha$, défini par le système (21), n'est autre qu'une *pseudo-surface minima.*

En effet, si l'on pose $u = \theta$, $u' = \rho$, les formules (13) donneront

$$A^2 = \rho^2 + a^2, \qquad A'^2 = (1+\alpha)^2, \qquad B'' = 0,$$

et, par suite, l'élément linéaire proprement dit aura, d'après (7'), pour expression

$$(22)\qquad dS^2 = (\rho^2 + a^2)\, d\theta^2 + (1+\alpha)^2 \, d\rho^2.$$

D'autre part, comme, en vertu des relations (15) et (15′), on a

$$(23)\qquad \begin{cases} D = 0, & D'' = a(1+\alpha)^2, \\ D' = 0, & D''_1 = a(1+\alpha), \end{cases}$$

il s'ensuit que la condition caractéristique des surfaces $D'' = D''_1$ (n° 4) n'est rien moins que satisfaite; d'où cette première conséquence : *Le lieu* $\mathfrak{H}_\alpha$ *n'est pas une surface.*

Pour en reconnaître la nature, appliquons-lui (puisque sa forme nous y autorise) les équations des lignes remarquables précédemment établies, équations qui conviennent bien au cas actuel, puisqu'il comporte $B'' = 0$ ou $\Phi = \frac{\pi}{2}$.

a. En ce qui concerne d'abord les lignes de courbure (3′), on trouve

$$(\rho^2 + a^2)\, d\theta^2 - (1+\alpha)\, d\rho^2,$$

et, par suite,

$$\frac{\theta}{\sqrt{1+\alpha}} = \log \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + a^2}}{a} + C.$$

Au surplus, si l'on remonte à (3), on verra que la précédente revient à

$$(1+\alpha)\, ds^2 - ds'^2 = 0.$$

Or ceci accuse deux directions *obliques,* également inclinées sur les axes mobiles MX, MY; ce que l'on sait être le propre exclusif des lignes de courbure d'une *pseudo-surface*.

b. De son côté, l'équation (4′) des lignes asymptotiques se réduit à

$$d\rho\, d\theta = 0,$$

c'est-à-dire, en multipliant par $(1+\alpha)\sqrt{\rho^2 + a^2}$, à

$$ds\, ds' = 0.$$

Ces lignes sont donc rectangulaires, comme les axes coordonnés mobiles qu'elles ont pour tangentes, à l'origine, propriété qu'en somme permettait de prévoir la condition d'orthogonalité $q - p' = 0$, fournie directement par l'équation (4), puisque cette même condition, pouvant être mise sous la forme

$$A'^2 D + A^2 D' = 0, \tag{24}$$

se trouve, d'après (23), identiquement satisfaite.

Concluons-en que le lieu $\mathfrak{J}_\alpha$ n'est pas une pseudo-surface quelconque, mais, par définition, une pseudo-surface *minima*. C. Q. F. D.

L'indicatrice en M peut aussi servir à confirmer le fait; car elle n'est autre que l'hyperbole *équilatère*

$$XY = \frac{1+\alpha}{2+\alpha}\left(a + \frac{\rho^2}{a}\right).$$

c. Passons aux lignes géodésiques. On voit d'abord qu'en ayant égard aux valeurs de A et A′ ci-dessus, les relations (17) se réduisent à

$$A\frac{\partial A}{\partial \theta} = 0, \qquad A'\frac{\partial A'}{\partial \rho} = 0, \qquad A'_0\frac{\partial A'}{\partial \theta} = 0,$$

$$A'\frac{\partial A'}{\partial \theta} = 0, \qquad A\frac{\partial A}{\partial \rho} = \rho, \qquad A_0\frac{\partial A}{\partial \rho} = (1+\alpha)\rho;$$

substituant dans (18), on trouve

$$\left(\rho + \frac{a^2}{\rho}\right)\frac{d^2\rho}{d\theta^2} - (2+\alpha)\frac{d\rho^2}{\partial\theta^2} - \frac{\rho^2 + a^2}{1+\alpha} = 0, \tag{25}$$

équation qui, intégrée, donne

$$\theta = \int \frac{(1+\alpha)\lambda\, d\rho}{\sqrt{(\rho^2 + a^2)[(\rho^2 + a^2)^{1+\alpha} - \lambda^2]}} + C,$$

λ désignant une première *constante*.

Comme vérification, pour $\alpha = 0$, on retombe exactement sur les équations correspondantes des lignes géodésiques de l'hélicoïde H.

6. Il ne sera pas sans intérêt de faire remarquer, en dernier lieu, au sujet du système (21), que si ses deux premières équations ne sont pas intégrables, du moins, en multipliant les deux membres de la première par $(\cos\theta)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, et ceux de la seconde par $(\sin\theta)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, ces facteurs *intégrants* rendront les seconds membres différentielles exactes, si bien que la surface résultante de leur intégration, savoir

$$(19') \qquad \begin{cases} x' = (1+\alpha)\rho(\cos\theta)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \\ y' = (1+\alpha)\rho(\sin\theta)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \\ z' = a\theta, \end{cases}$$

sera, pour le moins, aussi étroitement liée au pseudo-hélicoïde $\mathfrak{H}_\alpha$ que ne l'est l'hélicoïde H lui-même.

III.

APPLICABILITÉ DU PSEUDO-HÉLICOÏDE PRÉCÉDENT SUR UNE ALYSSÉIDE VECTORIELLEMENT DÉFORMÉE.

7. Arrivons à ce que, dans le sens conventionnel du mot, on peut appeler l'*applicabilité* du pseudo-hélicoïde $\mathfrak{H}_\alpha$ sur telle ou telle pseudo-surface, ou même surface, proposées.

A cet effet, il convient de rappeler d'abord qu'une surface de révolution quelconque Σ peut être définie par le système d'équations

$$(26) \qquad x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = \varphi(\rho),$$

lequel, différentié, donne

$$(27)\qquad \begin{cases} dx = -\rho \sin\theta \, d\theta + \cos\theta \, d\rho, \\ dy = \quad \rho \cos\theta \, d\theta + \sin\theta \, d\rho, \\ dz = \varphi'(\rho) \, d\rho. \end{cases}$$

Cela posé, considérons cet autre système analogue

$$(28)\qquad \begin{cases} dx = -\dfrac{\rho_1}{1+\alpha} \sin\theta \, d\theta + \cos\theta \, d\rho_1, \\ dy = \quad \dfrac{\rho_1}{1+\alpha} \cos\theta \, d\theta + \sin\theta \, d\rho_1, \\ dz = \varphi'(\rho_1) \, d\rho_1, \end{cases}$$

dans lequel (abstraction faite de l'indice qui aura bientôt son explication) les deux premières différentielles ne sont plus exactes et accusent, dans la surface Σ, une déformation vectorielle de même genre que celle constatée, dans le paragraphe précédent, au sujet de la pseudo-surface $\mathfrak{H}_\alpha$. Quoi qu'il en soit de cette particularité, on pourrait croire sans invraisemblance qu'il va être, ici encore, question de pseudo-surfaces. Eh bien! non. Chose étonnante, le nouveau lieu Σ_α est encore *une surface*.

En effet, si l'on pose $u = \theta$, $u' = \rho_1$, on aura (13)

$$A^2 = \frac{\rho_1^2}{(1+\alpha)^2}, \qquad A'^2 = 1 + \varphi'^2, \qquad B'' = 0,$$

d'où l'on déduit d'abord

$$(29)\qquad dS^2 = \frac{\rho_1^2}{(1+\alpha)^2} d\theta^2 + (1 + \varphi'^2) \, d\rho_1^2.$$

Mais on a, d'autre part,

$$(30)\qquad \begin{cases} D = -\dfrac{\rho_1^2}{(1+\alpha)^2} \varphi', \qquad D'' = 0, \\ D' = -\dfrac{\rho_1}{1+\alpha} \varphi'', \qquad D''_1 = 0. \end{cases}$$

Remontant à la condition caractéristique des surfaces $D'' = D''_1$, l'on voit qu'elle se trouve *identiquement* vérifiée. Donc le lieu Σ_α est bien une surface, ainsi que nous l'avions annoncé.

Autre preuve : si l'on forme l'équation de ses lignes de courbure, on trouvera, à un facteur négligeable près,

$$d\rho_1\, d\theta = 0 \qquad \text{ou} \qquad ds\, ds' = 0.$$

Elles sont donc *rectangulaires*, ainsi que l'étaient naguère, rappelons-le, les lignes asymptotiques, soit de H, soit de $\mathfrak{H}_\alpha$.

8. Ces généralités établies, choisissons, comme exemple, l'alysséide A_α. Elle sera représentée par les deux premières équations (28) jointes à celle de la chaînette méridienne

$$\rho_1 = \frac{a_1}{2}\left(e^{\frac{z}{a_1}} + e^{-\frac{z}{a_1}}\right), \tag{31}$$

ou bien

$$\frac{z}{a_1} = \log\frac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - a_1^2}}{a_1}, \tag{31'}$$

équations d'où l'on déduit

$$\frac{dz}{d\rho_1} = \varphi'(\rho_1) = \frac{a_1}{\sqrt{\rho_1^2 - a_1^2}}.$$

Cela étant, posons

$$a_1 = a(1+\alpha), \qquad \rho_1^2 - a_1^2 = \sigma_1^2 = (1+\alpha^2)\rho^2. \tag{32}$$

Dans σ_1, on reconnaît une portion d'arc (rectifiable) de chaînette, compté à partir du point le plus bas de la courbe. On en conclut successivement

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (1+\alpha)^2(\rho^2 + a^2), \\ \rho_1\, d\rho_1 &= (1+\alpha)^2 \rho\, d\rho. \end{aligned}$$

Portant le tout dans la valeur (29) de l'élément linéaire de Σ_α, il devient pour notre alysséide déformée

$$dS^2 = (\rho^2 + a^2)\,d\theta^2 + (1+\alpha)^2\,d\rho^2, \tag{33}$$

expression *identique* à celle obtenue (29) pour l'élément linéaire du pseudo-hélicoïde $\mathfrak{H}_\alpha$. De là cette propriété :

L'alysséide, vectoriellement déformée d'après une certaine loi, est encore une VRAIE SURFACE. *De plus, elle est exactement applicable sur un hélicoïde gauche, déformé d'après une loi analogue à la précédente, mais transformé, lui, par cette opération, en* PSEUDO-SURFACE.

9. Demandons-nous, à ce propos, si, en restant surface, l'alysséide déformée A_α reste, en outre, surface *minima?*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que son indicatrice soit une hyperbole *équilatère*. Or l'équation *réduite* de l'indicatrice étant

$$-q\,X^2 + p'\,Y^2 = 1,$$

peut, à l'aide des déterminants (15), se mettre sous la forme

$$A'^2 D\,X^2 + A^2 D'\,Y^2 = A^3 A'^3,$$

et, conséquemment, d'après (30), sous celle-ci

$$(1+\alpha)(1+\varphi'^2)\varphi' X^2 + \rho_1\varphi'' Y^2 = -\rho_1(1+\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Mais, de l'équation (31') de la chaînette, on tire

$$\varphi'(\rho_1) = \frac{a_1}{\sqrt{\rho_1^2 - a_1^2}}, \qquad \varphi''(\rho_1) = -\frac{a_1\rho_1}{(\rho_1^2 - a_1^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituant, il vient pour l'indicatrice cherchée

$$(1+\alpha)X^2 - Y^2 = -\frac{\rho_1^2}{a_1}.$$

C'est une hyperbole, mais qui n'est équilatère que si $\alpha = 0$.

Donc, bien que l'alysséide A soit une surface minima, l'alysséide déformée A_α ne l'est pas. Par contre, on a vu que l'hélicoïde H, devenu $\mathfrak{H}_\alpha$, constituait, dans ce deuxième état, une *pseudo-surface minima*.

Nous terminerons ceci, en écrivant l'équation différentielle des lignes géodésiques de l'alysséide A_α. Calculée, à l'aide de la formule (18), elle est, toutes réductions faites,

$$(25')\quad \left\{\begin{aligned} &\rho_1 \frac{d^2\rho_1}{d\theta^2} - \left[\frac{a_1^2}{\rho_1^2 - a_1^2} + (2+\alpha)\right]\frac{d\rho_1^2}{d\theta^2} \\ &\qquad\qquad - \frac{1}{1+\alpha}(\rho_1^2 - a_1^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

On vérifie que, eu égard aux relations (32), elle *coïncide* avec l'équation (25) des lignes géodésiques de la pseudo-surface $\mathfrak{H}_\alpha$; ce à quoi l'on pouvait d'ailleurs s'attendre.

IV.

CONSÉQUENCES ET GÉNÉRALISATION DIVERSES.

Coordonnées obliques.

10. Puisqu'on ne saurait nier que la propriété qui caractérise toute surface consiste dans l'orthogonalité de ses lignes de courbure, nous sommes en droit de tirer de tout ce qui précède, entre autres conséquences, celles-ci :

THÉORÈME. — *Il existe des surfaces, non susceptibles d'être représentées par un système de trois équations* FINIES, *de la forme*

$$x = \varphi(u, u'), \qquad y = \psi(u, u'), \qquad z = \chi(u, u'),$$

ni, par conséquent, par une seule, de la forme

$$F(x, y, z) = 0.$$

En effet, la condition qui caractérise toute surface étant (n° 4)

$$(34) \qquad p + q' = 0 \quad \text{ou} \quad D'' = D''_1,$$

elle revient, explicitement (15), à

$$(34') \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial u'} & P & Q \\ \frac{\partial Q'}{\partial u} - \frac{\partial P'}{\partial u'} & P' & Q' \\ \frac{\partial Q''}{\partial u} - \frac{\partial P''}{\partial u'} & P'' & Q'' \end{vmatrix} = 0.$$

Or cette condition générale est sans doute vérifiée par

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial u'}, \qquad \frac{\partial Q'}{\partial u} = \frac{\partial P'}{\partial u'}, \qquad \frac{\partial Q''}{\partial u} = \frac{\partial P''}{\partial u'},$$

ou, sous une autre forme (16), par

$$S = S_1, \qquad S' = S'_1, \qquad S'' = S''_1,$$

conditions partielles qui expriment que chacune des équations fondamentales (8) est intégrable. Mais cette même condition (34') est vérifiée aussi, par exemple, par

$$P\frac{\partial Q'}{\partial u} = P'\frac{\partial Q}{\partial u}, \qquad P\frac{\partial P'}{\partial u'} = P'\frac{\partial P}{\partial u'}, \qquad P'' = \frac{\partial Q''}{\partial u} = \frac{\partial P''}{\partial u'} = 0;$$

et c'est justement le cas de l'alysséide déformée A_α (n° 8).

Corollaire I. — A l'instar des pseudo-surfaces, il est telle surface qui n'est exprimable que par trois équations différentielles de la forme (8), l'une d'elles au moins étant supposée *non intégrable*.

Nous n'en voulons d'autres preuves que l'exemple que nous en ont offert (nos 7 et 8) les surfaces Σ_α et, notamment, l'alysséide A_α.

Corollaire II. — Une même forme de l'élément linéaire peut convenir, *à la fois*, et à une pseudo-surface, et à une surface.

Ainsi en a-t-il été en effet (22) et (33) pour le pseudo-hélicoïde $\mathfrak{H}_\alpha$ et l'alysséide A_α.

Corollaire III. — Si la connaissance de l'élément linéaire d'une surface (ordinaire) suffit à la détermination de ses lignes géodésiques, il n'en est plus de même quand il s'agit de pseudo-surfaces.

On a vu effectivement (n° 4), et la suite le démontrera plus généralement encore, qu'outre les trois fonctions de Gauss E, F, G et leurs dérivées, c'est-à-dire, d'après nos notations, A, A', B'' et les leurs, deux nouvelles fonctions A_0, A'_0 (qui coïncident, il est vrai, avec A, A' dans le cas des surfaces) sont alors nécessaires. D'où cette conséquence imprévue, savoir : que la considération de ce que l'on nomme le dS^2 ne saurait prendre, dans cette deuxième théorie, l'importance (exagérée, à notre avis) qu'on lui accorde dans la première. Ajoutons qu'on en peut dire autant des *paramètres différentiels* $\Delta\varphi$ et $\Delta_2\varphi$ de Beltrami, quoique convenablement adaptés aux pseudo-surfaces.

11. En présence de faits pareils, aussi curieux que gros de conséquences, on nous saura gré sans doute de chercher à en élargir le plus possible, le domaine. C'est ce que nous nous proposons de faire en reprenant, à grands traits, avec des coordonnées *obliques* (jusqu'ici inutiles) nos premières formules.

Et d'abord, substituons au triangle trirectangle mobile dont il a été exclusivement fait usage jusqu'à présent, deux trièdres birectangles supplémentaires, le premier MXYZ ou T, d'angle aigu Φ, le second MX_1Y_1Z ou T_1, d'angle obtus $\pi - \Phi$, ceux-là mêmes que nous avons déjà introduits (*Nouvelles Annales*, p. 52; 1900) et qui nous ont fourni les deux systèmes corrélatifs

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial a}{\partial s} = \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial a}{\partial u} = a'_1 r - a''_1 q \sin\Phi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial s} = \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial a_1}{\partial u} = a' n_1 - a'' q_1 \sin\Phi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

les cosinus directeurs $a, b, c, a', \ldots$ et $a_1, b_1, c_1, a'_1, \ldots$ étant liés entre eux et à Φ par les relations

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{l} a_1 \sin\Phi = a - a'\cos\Phi, \\ a'_1 \sin\Phi = a' - a\cos\Phi, \\ \qquad a''_1 = a'', \end{array}\right.$$

et les composantes n, r, n_1, r_1, par celles-ci

$$(37)\qquad n = r + \frac{\partial\Phi}{\partial s} = r_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial s} = n_1.$$

Du système (35), notamment, on déduit

$$p\sin\Phi = p_1 - q_1\cos\Phi = \Sigma a''_1 \frac{\partial a'}{\partial s},$$

$$q\sin\Phi = q_1 - p_1\cos\Phi = -\Sigma a''_1 \frac{\partial a}{\partial s};$$

et l'on a ensuite des valeurs analogues pour $p'\sin\Phi, \ldots$. Or, par des considérations dont l'exposé ne saurait trouver place ici, on peut prouver que, avec nos coordonnées actuelles, l'équation des lignes de courbure (3) devient

$$p_1\, ds^2 + (q_1 + p'_1)\, ds\, ds' + q'_1\, ds'^2 = 0,$$

ou, équivalemment,

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &(p+q\cos\Phi)\,ds^2\\ &\quad+[(q+p\cos\Phi)+(p'+q'\cos\Phi)]\,ds\,ds'\\ &\qquad\qquad+(q'+p'\cos\Phi)\,ds'^2 = 0,\end{aligned}\right.$$

tandis que l'équation des lignes asymptotiques conserve sa première forme (4), savoir

$$(39)\qquad -q\,ds^2+(p-q')\,ds\,ds'+p'\,ds'^2=0.$$

Ceci posé, si l'on tient compte de ce que, présentement,

$$\frac{a''}{bc'-cb'}=\frac{b''}{ca'-ac'}=\frac{c''}{ab'-ba'}=\frac{1}{\sin\Phi},$$

on verra sans peine que, pour étendre à nos nouvelles coordonnées le Tableau (15), il suffit d'y remplacer la composante q, dont il fournit la valeur, par

$$q\sin^2\Phi = q\,\frac{A^2A'^2-B''^2}{A^2A'^2}=q\,\frac{H^2}{A^2A'^2}.$$

Et comme la règle reste la même pour les trois autres composantes p', p, $-q'$, il suit de leur groupement que l'on peut former la suite de rapports égaux

$$(40)\qquad \frac{-q}{\frac{A'}{A}D}=\frac{p'}{\frac{A}{A'}D'}=\frac{p}{D''}=\frac{-q'}{D''_1}=\frac{1}{H^2},$$

laquelle, remarquons-le, entraîne, entre autres combinaisons, celle-ci

$$pq'-qp'=\frac{DD'-D''D''_1}{H^4}.$$

Quoi qu'il en soit, si l'on porte les valeurs (40) dans l'équation (38) et qu'on ait égard à ce que $\cos\Phi=\dfrac{B''}{AA'}$, les lignes de courbure de $\mathcal{S}''$ deviendront

$$(38')\quad \left\{\begin{aligned}&(A^2 D'' - B'' D)\,du^2\\ &\quad - [(A'^2 D - A^2 D') - B''(D'' - D''_1)]\,du\,du'\\ &\qquad\qquad - (A'^2 D''_1 - B'' D')\,du'^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

On aura de même pour ses lignes asymptotiques

$$(39')\qquad D\,du^2 + (D'' + D''_1)\,du\,du' + D'\,du'^2 = 0,$$

comme aussi pour ses *ombilics*

$$\frac{A^2}{D} = \frac{A'^2}{D'} = \frac{2B''}{D'' + D''_1}.$$

12. Le cas particulier de $u = x$, $u' = y$, déjà signalé au n° 3, mérite d'être examiné à part. On a d'abord, en vue de l'expression de dS^2, et en convenant de poser $P'' = p$, $Q'' = q$,

$$(41)\qquad A^2 = 1 + p^2, \qquad A'^2 = 1 + q^2, \qquad B'' = pq;$$

on trouve ensuite

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}&D = \frac{\partial p}{\partial x} = r, \qquad D'' = \frac{\partial q}{\partial x} = s,\\ &D' = \frac{\partial q}{\partial y} = t, \qquad D''_1 = \frac{\partial p}{\partial y} = s_1,\end{aligned}\right.$$

ce qui permet, notons-le, de donner à la suite de rapports égaux (40) la forme suivante

$$(40')\quad \frac{-q}{\left(\dfrac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2}}\right)r} = \frac{p'}{\left(\dfrac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+q^2}}\right)t} = \frac{p}{s} = \frac{-q'}{s_1} = \frac{1}{1+p^2+q^2}.$$

Négligeant toutefois, provisoirement, ce dernier résultat, et nous bornant à substituer, dans (38′), les valeurs précédentes (41) et (42), il vient pour les lignes de courbure de $\mathfrak{F}''$

$$(38'')\quad \left\{\begin{aligned} &[(1+p^2)s - pqr]\,dx^2\\ &\quad -[(1+q^2)r - pq(s-s_1)-(1+p^2)t]\,dx\,dy\\ &\qquad\qquad -[(1+q^2)s_1 - pqt]\,dy^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

On a semblablement pour ses lignes asymptotiques

$$(39'')\qquad r\,dx^2 + (s+s_1)\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

A côté de ces formes, un peu prolixes, il ne sera pas superflu de signaler celles, beaucoup plus condensées, qui suivent

$$(38''')\qquad dq(dx + p\,dz) - dp(dy + q\,dz) = 0,$$
$$(39''')\qquad dp\,dx - dq\,dy = 0,$$

formes qu'on établit aisément à l'aide des différentielles totales suivantes, propres aussi, remarquons-le, à *généraliser* la transformation de Legendre :

$$dz = p\,dx + q\,dy,\qquad dp = r\,dx + s_1\,dy,\qquad dp = s\,dx + t\,dy.$$

Ajoutons, en guise de corollaire, que les *rayons principaux* de $\mathfrak{F}''$, en M, sont donnés par l'équation du second degré

$$(R)\quad \left\{\begin{aligned} &[4rt-(s+s_1)]R^2\\ &\quad -4[(1+q^2)r - pq(s+s_1)\\ &\qquad\qquad +(1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2}\,R\\ &\qquad\qquad\qquad + 4(1+p^2+q^2)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Du deuxième terme de cette équation, on tire la condition caractéristique des *pseudo-surfaces minima,* savoir

$$(1+q^2)r - pq(s+s_1) + (1+p^2)t = 0,$$

laquelle concorde pleinement (40′) avec ces autres formes non moins utiles

$$-q + p' - (p - q')\cos\Phi = 0,$$

voire,

$$A'^2D + A^2D' - B''(D'' + D''_1) = 0.$$

Enfin de l'égalité supposée des racines de la même équation résultent, pour $\mathfrak{F}''$, les *ombilics*

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s+s_1}{2pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

13. Venons maintenant à l'équation des lignes géodésiques de notre pseudo-surface, et cela, dans le cas général d'abord, puis, dans le cas particulier de $u = x$, $u' = y$.

A cet effet, rappelons que, sous la condition $\varphi + \varphi' = \Phi$, ces lignes peuvent être représentées (37) par l'une ou l'autre des équations *équivalentes*

$$\begin{aligned} d\varphi + \mathrm{A}\,r\,du + \mathrm{A}'\,r'\,du' &= 0, \\ d\varphi' - \mathrm{A}\,n\,du - \mathrm{A}'\,n'\,du' &= 0, \end{aligned}$$

et, conséquemment, par leur combinaison,

$$(43)\qquad d\varphi - d\varphi' + \mathrm{A}(n+r)\,du + \mathrm{A}'(n'+r')\,du' = 0.$$

Rappelons aussi qu'entre les angles φ, φ', Φ on a les relations trigonométriques

$$\frac{\mathrm{A}\,du}{\sin\varphi'} = \frac{\mathrm{A}'\,du'}{\sin\varphi} = \frac{d\mathrm{S}}{\sin\Phi},$$

conjointement avec

$$\begin{aligned} d\mathrm{S}^2 &= \mathrm{A}^2\,du^2 + \mathrm{A}'^2\,du'^2 + 2\,\mathrm{A}\mathrm{A}'\cos\Phi\,du\,du', \\ &= \mathrm{A}^2\,du^2 + \mathrm{A}'^2\,du'^2 + 2\,\mathrm{B}''\,du\,du'. \end{aligned}$$

Cela étant, des systèmes (35), (35') et de leurs analogues, on tire d'abord

$$\begin{aligned} n &= -\Sigma a_1 \frac{\partial a'}{\partial s} = \Sigma a' \frac{\partial a_1}{\partial s}, \\ r' &= \Sigma a'_1 \frac{\partial a}{\partial s'} = -\Sigma a \frac{\partial a'_1}{\partial s'}. \end{aligned}$$

En s'aidant ensuite des formules (12) et (17), on obtient, par deux voies distinctes (qui se vérifient mutuellement), les expressions suivantes

$$(44)\quad \begin{cases} An = Ar + \dfrac{\partial\Phi}{\partial u} = -\dfrac{1}{A'\sin\Phi}\left(\dfrac{A_0}{A}\dfrac{\partial A}{\partial u'} - \dfrac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi\right), \\ A'r' = A'n' - \dfrac{\partial\Phi}{\partial u'} = \dfrac{1}{A\sin\Phi}\left(\dfrac{A'_0}{A'}\dfrac{\partial A'}{\partial u} - \dfrac{\partial A}{\partial u'}\cos\Phi\right); \end{cases}$$

d'où découlent celles, faciles à former, de $A(n+r)$ et $A'(n'+r')$.

Que si, en second lieu, on calcule la différence $d\varphi - d\varphi'$ par le même procédé qui nous a donné $d\varphi$, au n° 4, on trouvera, en réunissant tous les résultats, une équation finale que l'on peut écrire abréviativement ainsi

$$(45)\quad \begin{cases} (A^2A'^2 - B''^2)(du\,d^2u' - du'\,d^2u) \\ \quad = \mathfrak{M}\,du^3 + \mathfrak{N}\,du^2\,du' - \mathfrak{N}'\,du\,du'^2 - \mathfrak{M}'\,du'^3, \end{cases}$$

à condition de poser

$$(46)\quad \begin{cases} \mathfrak{M} = A^3A'\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\sin\Phi + A^2A_0\dfrac{\partial A}{\partial u'} - A^3\dfrac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi \\ \mathfrak{N} = A^2A'^2\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\sin\Phi\cos\Phi + \left[A'^2A\dfrac{\partial A}{\partial u} - A^2(A'_0 + A')\dfrac{\partial A'}{\partial u}\right]\sin^2\Phi \\ \qquad + AA'\left[(2A_0 + A)\dfrac{\partial A}{\partial u'} - (A'_0 + 2A')\dfrac{\partial A'}{\partial u}\cos\Phi\right]\cos\Phi. \end{cases}$$

Quant aux deux autres fonctions, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{M}'$, elles se déduisent de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, en remplaçant A_0, A, A', u, u' par A'_0, A', A, u', u et *vice versa*.

Hâtons-nous d'ajouter qu'à cette première forme il pourra être *pratiquement* utile de substituer, à l'occasion, cette autre qui implique B'' et ses dérivées, au lieu de $\cos\Phi$ et des siennes,

$$(46')\quad \begin{cases} \mathfrak{M} = A^2A_0\dfrac{\partial A}{\partial u'} + B''A\dfrac{\partial A}{\partial u} - A^2\dfrac{\partial B''}{\partial u}, \\ \mathfrak{N} = A'^2A\dfrac{\partial A}{\partial u} - A^2(A'_0 + A')\dfrac{\partial A'}{\partial u} \\ \qquad + B''(2A_0 + A)\dfrac{\partial A}{\partial u'} - B''\dfrac{\partial B''}{\partial u}. \end{cases}$$

14. Plaçons ici une remarque importante. Les valeurs ci-dessus de An et $A'r'$, ou mieux, celles de Ar et $A'r'$ nous permettent de généraliser ce que, dans la question présente, on nomme communément le *théorème de Gauss*. On a en effet (*Nouvelles Annales*, p. 57; 1900)

$$\frac{\partial(Ar)}{\partial u'} - \frac{\partial(A'r')}{\partial u} = AA'(pq' - qp')\sin\Phi = HK''.$$

Donc, et c'est là le point essentiel, K'', c'est-à-dire, par analogie, la *courbure totale* d'une pseudo-surface, peut s'exprimer, non pas à l'aide des *trois* fonctions qui suffisent à définir son élément linéaire, mais des *cinq* fonctions A, A', A_0, A'_0, B'' et de leurs dérivées qu'exige (aux dérivées près de A_0, A'_0) l'équation différentielle de ses lignes géodésiques. Donnons à cette courbure totale sa meilleure forme.

A cet effet, si nous remontons au n° **11**, nous y verrons que l'on peut aussi écrire

$$K'' = \frac{DD' - D''D''_1}{H^4};$$

d'où l'on conclut, en s'aidant des formules (13) et suivantes,

$$DD' = \begin{vmatrix} \Sigma RT & \Sigma PT & \Sigma QT \\ \Sigma PR & \Sigma P^2 & \Sigma PQ \\ \Sigma QR & \Sigma PQ & \Sigma Q^2 \end{vmatrix},$$

$$D''D''_1 = \begin{vmatrix} \Sigma SS_1 & \Sigma PS & \Sigma QS \\ \Sigma PS_1 & \Sigma P^2 & \Sigma PQ \\ \Sigma QS_1 & \Sigma PQ & \Sigma Q^2 \end{vmatrix}.$$

D'autre part, les valeurs (16) nous donnent

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial u'} = \frac{\partial R}{\partial u'} = \frac{\partial S_1}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial u\,\partial u'} = \frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial u'}.$$

Posant donc, pour abréger,

$$J = \Sigma(RT - SS_1) = \frac{\partial^2 B''}{\partial u\,\partial u'} - \frac{\partial}{\partial u'}\left(A_0 \frac{\partial A}{\partial u'}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u}\right),$$

il vient finalement

$$DD' - D''D''_1$$

$$= \begin{vmatrix} J & \frac{\partial B''}{\partial u'} - A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u} & A' \frac{\partial A'}{\partial u} \\ A \frac{\partial A}{\partial u} & A^2 & B'' \\ \frac{\partial B''}{\partial u} - A_0 \frac{\partial A}{\partial u'} & B'' & A'^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & A_0 \frac{\partial A}{\partial u'} & A' \frac{\partial A'}{\partial u} \\ A \frac{\partial A}{\partial u'} & A^2 & B'' \\ A'_0 \frac{\partial A'}{\partial u} & B'' & A'^2 \end{vmatrix}.$$

C'est l'expression que nous voulions obtenir. Pour qu'elle convienne aux surfaces, il suffit d'y faire $A_0 = A$, $A'_0 = A'$.

15. Après cette digression et à titre de développement *naturel* du sujet qui nous occupe, il importe de se demander : 1° si les lignes géodésiques d'une pseudo-surface ont, elles aussi, en chacun de leurs points, leur plan osculateur *normal* à cette même pseudo-surface; 2° si elles mesurent le plus court chemin entre deux quelconques de leurs points?

A cela, il faut répondre par l'affirmative. En effet, au moyen de considérations identiques à celles qui ont cours pour les surfaces, et le calcul des variations aidant (Serret, t. II, p. 719), on peut s'assurer que les lignes géodésiques de $\mathfrak{F}''$ peuvent s'écrire (10)

$$(47) \quad \begin{cases} \mathcal{A}\, d\left(\frac{dz}{dS}\right) - \mathcal{A}''\, d\left(\frac{dx}{dS}\right) = 0, \\ \mathcal{A}'\, d\left(\frac{dz}{dS}\right) - \mathcal{A}''\, d\left(\frac{dy}{dS}\right) = 0. \end{cases}$$

En associant à ce système les deux relations usuelles

$$dS^2 \quad = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
$$dS\, d^2S = dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z,$$

on en déduit, de deux manières différentes, l'équation *unique*

$$(48)\quad \begin{cases} \mathcal{A}(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + \mathcal{A}'(dz\,d^2x - dx\,d^2z) \\ \qquad\qquad + \mathcal{A}''(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0. \end{cases}$$

Mais, dans cette équation, dx, dy, dz sont les *données* mêmes (8) du problème. Si donc, après en avoir tiré (16) les différentielles secondes

$$d^2x = \mathrm{P}\,d^2u + \mathrm{Q}\,d^2u' + \mathrm{R}\,du^2 + (\mathrm{S} + \mathrm{S}_1)\,du\,du' + \mathrm{T}\,du'^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on substitue le tout dans l'équation (48), on obtiendra, pour les lignes géodésiques de $\mathcal{F}''$, une forme nouvelle qui, développée, se trouve coïncider parfaitement avec celles que nous connaissons déjà. C. Q. F. D.

Bornons-nous à vérifier qu'il en est bien ainsi dans le cas simple où $u = x$, $u' = y$. On a alors (n[os] 3 et 12)

$$dz = \mathrm{p}\,dx + \mathrm{q}\,dy,$$

et, par suite, (42)

$$d^2z = \mathrm{p}\,d^2x + \mathrm{q}\,d^2y + \mathrm{r}\,dx^2 + (\mathrm{s} + \mathrm{s}_1)\,dx\,dy + \mathrm{t}\,dy^2.$$

Mais, de leur côté, les égalités (10) se réduisent ici à

$$\mathcal{A} = -\mathrm{p}, \qquad \mathcal{A}' = -\mathrm{q}, \qquad \mathcal{A}'' = 1;$$

d'où, finalement, pour l'équation cherchée, un résultat que l'on peut écrire [1]

$$(49)\quad \begin{cases} (1 + \mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2)(dx\,d^2y - dy\,d^2x) \\ \quad = (\mathrm{p}\,dy - \mathrm{q}\,dx)[\mathrm{r}\,dx^2 + (\mathrm{s} + \mathrm{s}_1)\,dx\,dy + \mathrm{t}\,dy^2]. \end{cases}$$

---

[1] De ce résultat il n'est pas sans intérêt de rapprocher cet autre

$$d\mathrm{S}\,d^2\mathrm{S} = (\mathrm{p}\,dx + \mathrm{q}\,dy)[\mathrm{r}\,dx^2 + (\mathrm{s} + \mathrm{s}_1)\,dx\,dy + \mathrm{t}\,dy^2],$$

que fournit, sans peine, la différentiation de l'élément linéaire actuel.

Que si, pour le mettre à l'épreuve, on y fait $s = s_1$ on retombe très exactement sur une forme bien connue de l'équation des lignes géodésiques de la *surface* définie par l'équation $z = f(x, y)$.

Voyons, en second lieu, ce que vont nous donner nos précédentes méthodes. Et d'abord, en s'aidant des formules (17), et observant, entre autres particularités, que

$$\frac{\partial B''}{\partial u} = \Sigma\, P\frac{\partial Q}{\partial u} + \Sigma\, Q\frac{\partial P}{\partial u} = \Sigma\, PS + \Sigma\, QR,$$

on passera, sans nouveaux calculs, de la forme (46′) obtenue pour les fonctions $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, à la forme *mixte*, plus avantageuse, suivante

$$(46'')\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{M} &= B''\, \Sigma PR - A^2 \Sigma QR, \\ \mathfrak{N} &= A'^2 \Sigma PR - A^2 \Sigma Q(S + S_1) \\ &\qquad + B'' \Sigma P(S + S_1) - B'' \Sigma QR. \end{aligned}\right.$$

De ces dernières, on déduira $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$, en remplaçant partout P, Q, R, S, S_1, respectivement, par Q, P, T, S_1, S.

Cela fait, le seul rapprochement des formules (17) et (42) nous montre que, dans le cas actuel,

$$(17')\quad \left\{\begin{array}{lll} \Sigma PR = pr, & \Sigma QT = qt, & \Sigma QR = qr, \\ \Sigma QS = qs, & \Sigma PS_1 = ps_1, & \Sigma PT = pt, \\ \Sigma QS_1 = qs_1, & \Sigma PS = ps, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Portant ces valeurs dans $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$, pris sous la

---

Plus généralement

$$dS\, d^2S = A\frac{\partial A}{\partial u}du^3 + \left(A\frac{\partial A}{\partial u'} + \frac{\partial B''}{\partial u}\right)du^2\, du' + \left(A'\frac{\partial A'}{\partial u} + \frac{\partial B''}{\partial u'}\right)du\, du'^2 + A'\frac{\partial A'}{\partial u'}du'^3,$$

les deux *couples* de termes A_0, A'_0 se détruisant (17) dans les termes du milieu.

forme ($46''$), il vient

$$(49')\quad \begin{cases} (1 + p^2 + q^2)(dx\, d^2y - dy\, d^2x) \\ \quad = - qr\, dx^3 + [pr - q(s + s_1)]\, dx^2\, dy \\ \qquad\qquad - [qt - p(s + s_1)]\, dx\, dy^2 + pt\, dy^3, \end{cases}$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (49) développée et ordonnée.

A peine est-il besoin de dire que ces diverses formes de l'équation des lignes géodésiques de $\mathcal{F}''$ (la dernière exceptée, évidemment) peuvent servir à vérifier la parfaite exactitude des équations (25) et (25'), relatives, soit au pseudo-hélicoïde $\mathfrak{H}_\alpha$, soit à l'alysséide A_α (n° 9).

16. Terminons par la propriété suivante qui se rattache à celle établie au n° 14 :

Théorème. — *Toute pseudo-surface, représentée par l'équation*

$$dz = p\, dx + q\, dy,$$

et telle que $q = \varphi(p)$, *est une pseudo-surface à* COURBURE TOTALE NULLE.

En effet, si l'on prend la différentielle complète de cette dernière condition, on aura

$$dq = \varphi'(p)\, dp,$$

ou bien (n° 12)

$$s\, dx + t\, dy = \varphi'(p)(r\, dx + s_1\, dy).$$

Et comme ceci est vrai, quel que soit le rapport $\frac{dy}{dx}$, on en déduit

$$s = \varphi'(p) r, \qquad t = \varphi'(p) s_1.$$

Éliminant la fonction arbitraire $\varphi'(p)$, il reste

$$(50)\qquad rt - ss_1 = 0,$$

ou, ce qui revient au même (nos 11 et 14),

$$pq' - qp' = \frac{1}{H^4}(DD' - D''D_1'') = K'' = 0;$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1900. — COMPOSITIONS.

Besançon.

ANALYSE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Déterminer une courbe plane* C *telle que,* Ox *étant une droite donnée,* A *un point fixe pris sur la courbe* C, M *un point variable pris sur cette courbe,* T *le point où la tangente en* M *rencontre l'axe* Ox, *l'arc* AM *soit constamment égal au double de la tangente* MT.

L'équation du problème est

$$s = \frac{2y\sqrt{1+y'^2}}{y'},$$

en désignant l'arc AM par s. En différentiant cette équation, puis en remplaçant ds par $\sqrt{1+y'^2}\,dx$, on obtient par rapport à y une équation différentielle du second ordre. La courbe cherchée est une cycloïde.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Étant donnés les deux polynomes*

$$X = x^4 + 3x^2 + 2, \qquad Y = x^3 - 1,$$

déterminer deux polynomes A *et* B, *l'un du troisième degré, l'autre du second degré, tels que l'on ait identiquement*

$$AY + BX = 1.$$

2° *Calculer l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

On obtient par la méthode des coefficients indéterminés

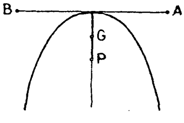
$$A = \frac{5x^3 - 7x^2 + 14x - 16}{18}, \qquad B = \frac{-5x^2 + 7x + 1}{18};$$

l'intégrale demandée peut s'obtenir soit directement, soit par la méthode de Cauchy, et sa valeur est $\frac{\pi}{2}$.

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Exposer la transformation de l'équation de d'Alembert qui donne l'équation de Clairaut.*

II. *Une barre pesante homogène est reliée à un poids* P *sur la perpendiculaire en son milieu de sorte que le centre de gravité du système est en* G.



La barre repose en son milieu sur le sommet d'une chaînette renversée dont l'axe est vertical.

On écarte la barre de sa position d'équilibre, trouver le mouvement de la barre roulant sur la chaînette.

Désignons par m la masse totale du système constitué par la barre homogène et le poids P, par mk^2 le moment d'inertie de ce système par rapport au point G, par a le paramètre de la chaînette, par h la distance du point G à la barre. Prenons pour axes de coordonnées la base et l'axe de la chaînette, et soit y l'ordonnée du point où la barre touche la chaînette. Comme la barre roule sans glisser sur la chaînette, l'équation des forces vives suffit à déterminer le mouvement. On a

$$\frac{m(y^2+h^2+k^2-a^2)}{y^2(y^2-a^2)}\frac{dy^2}{dt^2} = \mathrm{C} + 2mga\frac{y}{a+h},$$

C désignant une constante.

Épreuve pratique. — *Dessiner l'engrenage d'un pignon et d'une crémaillère, le pignon étant muni de six ailes. On prendra* 12^{cm} *pour le diamètre de la circonférence primitive du pignon.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Établir la fonction* S *introduite par Tisserand dans la théorie de la capture des comètes.*

Application aux groupes de comètes périodiques liées à Jupiter.

Épreuve pratique. — *On donne les longueurs de deux rayons vecteurs* r *et* r' *d'une comète parabolique et leur angle* 2α. *Calculer le temps mis par la comète pour décrire l'arc de parabole que sous-tend cet angle.*

Dijon.

Analyse.

Épreuve écrite. — I. *Exposer les points fondamentaux de la théorie du logarithme népérien.*

Démontrer la formule

$$\int_c f(x)\,dx = 2\pi i \mathcal{E}_s f(x),$$

où la fonction $f(x)$ est méromorphe à l'intérieur de l'aire limitée et imperforée s, olotrope sur son contour (c), où l'intégrale est prise sur le contour parcouru une fois dans le sens direct.

II. *Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles des surfaces développables.*

Épreuve pratique. — *Calculer avec quatre chiffres décimaux exacts la racine quatrième du nombre e, base du système des logarithmes népériens.*

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Attraction d'un ellipsoïde homogène à trois axes inégaux sur un point intérieur ou extérieur.*

Épreuve pratique. — *Trouver les axes principaux d'inertie d'un rectangle homogène et d'épaisseur constante par rapport à un de ses sommets.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Théorie de la lunette méridienne.*

Épreuve pratique. — *Détermination du méridien d'un lieu par une mesure d'azimut de l'étoile polaire.*

Lille.

Calcul différentiel et intégral.

Question de Cours. — *On considère l'intégrale indéfinie*

$$\int f(x, y)\,dx,$$

$f(x, y)$ étant une fonction rationnelle de x et de y; on suppose, de plus, que y est la racine carrée d'un polynome du quatrième degré en x.

1° *Montrer comment cette intégrale peut être exprimée à l'aide des fonctions qui figurent dans l'intégration des fractions rationnelles, et, en outre, à l'aide de symboles nouveaux qui sont les intégrales elliptiques de première, de deuxième et de troisième espèce.*

2° *Les intégrales elliptiques étant ainsi définies, faire voir comment on peut, par une transformation rationnelle, les ramener à la forme normale.*

Problème. — *Soient $f(z)$ une fonction holomorphe dans une aire* (S), *limitée par un contour simple* (s); *a, b, x les affixes de points distincts intérieurs à* (S); *α et β des entiers positifs, $\alpha + \beta = n$.*

Démontrer que le résidu de la fonction

$$\varphi(z) = \frac{f(z)(x-a)^\alpha (x-b)^\beta}{(x-z)(z-a)^\alpha (z-b)^\beta},$$

au point $z = a$, est un polynome entier en x de degré $n - 1$.

En conclure la formule

$$f(x) + \frac{1}{2i\pi}\int_{(s)} \varphi(z)\,dz = \mathrm{F}(x),$$

l'intégrale étant prise dans le sens positif, le long du contour (s), *et* $F(x)$ *désignant un polynome de degré* $n-1$.

Montrer que ce polynome $F(x)$ *satisfait aux n conditions.*

$$F(a)=f(a),\quad F'(a)=f'(a),\quad \ldots,\quad F^{(\alpha-1)}(a)=f^{(\alpha-1)}(a),$$
$$F(b)=f(b),\quad F'(b)=f'(b),\quad \ldots,\quad F^{(\beta-1)}(b)=f^{(\beta-1)}(b).$$

Mécanique rationnelle.

I. Question de Cours. — 1° *Établir les équations de Resal par lesquelles on peut remplacer celles d'Euler, dans l'étude du mouvement d'un solide autour d'un point fixe, lorsque deux des moments principaux d'inertie* A *et* B *sont égaux.*

2° *Trouver, dans ce même cas, les conditions que doit vérifier le couple résultant* (L, M, N) *pour que le mouvement se réduise à une précession uniforme, sans nutation.*

II. Problème. — *Étudier les mouvements de deux points matériels* M *et* M_1, *des masses* m *et* m_1, *non pesants, s'attirant proportionnellement à leur distance, et assujettis à se mouvoir sans frottement sur deux cercles fixes égaux* C *et* C_1, *placés de manière que leurs plans soient tous deux perpendiculaires à la ligne des centres* CC_1.

On supposera qu'à l'instant initial la droite MM_1 *est parallèle à* CC_1.

Astronomie.

Épreuve théorique. — *Intégrer, à l'aide de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi, les équations du mouvement d'une planète par rapport au Soleil. Inter-*

prêter les constantes introduites en fonction des éléments de l'orbite de la planète.

Quand la planète est soumise à une force perturbatrice, dire ce qu'on appelle VARIABLES KÉPLÉRIENNES ; *établir les équations qui donnent les dérivées de ces variables.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Résoudre, par l'emploi de la méthode des moindres carrés, les équations suivantes, fournies par des observations d'égale précision*

$$
\begin{aligned}
72x + 85y - 29 &= 0,\\
78x + 3y + 2 &= 0,\\
15x - 94y + 39 &= 0,\\
103x + 8y + 3 &= 0.
\end{aligned}
$$

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Rôle utile du frottement dans la traction mécanique. Théorie de l'adhérence. Calcul de l'effort maximum utilisable à la jante d'une roue motrice. Calcul du couple résistant maximum utilisable dans le cas du freinage par le moteur.*

II. *Voiture automobile dont toutes les roues sont motrices. Calcul de l'effort maximum de traction disponible à la barre d'attelage. Traction au démarrage et sur une rampe.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Épure du diagramme corrigé de l'inertie du piston et de l'inertie de la bielle dans le cas d'une machine à vapeur fixe à grande vitesse.*

On suppose que l'on ait obtenu à l'aide d'un diagramme d'indicateur le graphique des efforts moteurs évalués au bouton de la manivelle.

On demande d'établir les deux graphiques qui donnent les corrections à apporter au graphique précédent lorsqu'on tient compte séparément : 1° de l'inertie du piston ; 2° de l'inertie de la bielle.

Vitesse : 240 tours à la minute.

Longueur de la bielle : cinq fois celle de la manivelle.

On choisira arbitrairement les autres éléments.

N. B. — En admettant tous les résultats relatifs aux mouvements plans, on retrouvera très brièvement les formules à employer et l'on indiquera en quelques mots la marche suivie.

CORRESPONDANCE.

M. **d'Ocagne**. — La courbe qui, dans le faisceau de courbes parallèles envisagées par M. Collignon (*Nouvelles Annales*, **1900**, p. 433), est tangente en O à Ox (p. 442) est celle dont on trouve de nombreuses propriétés dans mon Étude sur les coordonnées axiales (*Nouvelles Annales*, **1884**, p. 557, et *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 48), ainsi que cela résulte d'une remarque de M. E. Cesàro (*Nouvelles Annales*, **1885**, p. 257, et *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 90).

BIBLIOGRAPHIE.

Les philosophes géomètres de la Grèce, *Platon et ses prédécesseurs*; par *G. Milhaud*, professeur à la Faculté des Lettres de Montpellier. 1 vol. in-8° de la *Collection historique des grands philosophes*. Paris, Félix Alcan, éditeur. Prix : 6fr.

Quels sont, de Thalès à Platon, les rapports de la philosophie des Grecs avec la pensée mathématique? Telle est la question à laquelle veut répondre l'auteur des *Philosophes géomètres de la Grèce*.

Après une Introduction où il essaie de définir les tendances générales que la culture mathématique peut imprimer à la réflexion du philosophe, et après avoir rappelé les conclusions d'études antérieures sur le caractère autochtone de la géométrie grecque, M. Milhaud passe en revue la double série des travaux mathématiques et des doctrines, s'efforçant de montrer le lien étroit qui rattache celles-ci à ceux-là. La première Partie est consacrée aux prédécesseurs de Platon; la seconde, de beaucoup la plus importante, à Platon lui-même.

Dans cet Ouvrage on retrouve aisément l'auteur de l'*Essai sur la certitude logique* et du *Rationnel*. D'une part, les traits caractéristiques de sa pensée, en marquant le rôle actif et créateur de l'esprit dans l'édification de la science spéculative, nous ont naturellement préparés à ce genre d'études, où l'évolution des notions scientifiques ne se sépare plus radicalement des conceptions des philosophes; d'autre part, on devine, à la lecture du Livre, et particulièrement quand il s'agit de Platon, à quel point l'auteur se sent attiré par ses propres doctrines vers le rationalisme idéaliste des penseurs grecs.

Leçons sur la Théorie des formes et la Géométrie analytique supérieure, à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences; par M. *H. Andoyer*, maître de conférences et chargé de Cours à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. VI+508 pages gr. in-8°. Paris, Gauthier-Villars, 1900. Prix : 15fr.

Il n'existait pas, jusqu'à ce jour, dans la littérature mathématique française, un Traité didactique de la Théorie des formes. Les travaux des géomètres français sur cette branche importante des Mathématiques sont épars dans divers Recueils que les étudiants ont souvent de la peine à se procurer. Chacun de ces travaux se rattache d'ailleurs à une partie déterminée de la Théorie; de sorte que pour en avoir une idée d'ensemble il fallait soit se livrer à des recherches laborieuses, soit recourir aux Ouvrages étrangers. L'Ouvrage de M. Andoyer vient donc combler une véritable lacune.

La Théorie des formes est intimement liée à la Théorie des nombres et à la Géométrie analytique. Laissant de côté la Théorie arithmétique des formes, M. Andoyer s'est surtout attaché à les étudier au point de vue de la Géométrie analytique. C'est ainsi que la Géométrie dans un espace à une dimension se trouve ramenée à la Théorie des formes binaires, et la Géométrie dans un espace à deux dimensions se trouve à son tour ramenée à la Théorie des formes ternaires.

L'étendue de ce Recueil ne nous permet pas de suivre l'Auteur dans tous ses développements. Nous nous bornerons donc à indiquer rapidement le plan général de l'Ouvrage.

Il est divisé en deux Livres correspondant respectivement à la Géométrie binaire, c'est-à-dire à la Géométrie dans un espace à une dimension, et à la Géométrie ternaire, c'est-à-dire à la Géométrie dans un espace à deux dimensions.

Le Livre I comprend la théorie générale des invariants des systèmes binaires, les formations invariantes, les systèmes linéaires, les résultants et les discriminants, et une étude complète de la forme bilinéaire, des systèmes quadratiques, des formes canoniques et particulièrement des formes cubique, biquadratique et quintique; suit une étude de la forme linéo-quadratique, des formes à deux séries de variables, et enfin l'application des divers résultats obtenus à la Géométrie binaire.

Le Livre II se développe parallèlement au Livre I. Voici les titres principaux des Chapitres :

Théorie des invariants des systèmes ternaires. — Les systèmes linéaires. — La forme bilinéaire et l'Homographie. — La série quadratique. — Le système de deux formes quadratiques. — La correspondance réciproque entre deux espaces coïncidents. — Le système de deux formes bilinéaires et la correspondance quadratique birationnelle. — Étude géométrique du réseau des séries quadratiques. — La série cubique. — La forme trilinéraire. — La série quartique. — La Géométrie métrique ternaire en général. — La Géométrie métrique ternaire spéciale.

Dans la pensée de son Auteur, le Livre de M. Andoyer s'adresse plus spécialement, ainsi que son titre l'indique d'ailleurs, aux étudiants des Facultés des Sciences. Il est certainement appelé à leur rendre de très grands services; mais les personnes qui s'intéressent aux idées nouvelles de la Géométrie supérieure, et leur nombre devient de plus en plus considérable, le liront avec le plus vif intérêt. Je range dans cette catégorie les professeurs soucieux d'acquérir des idées générales pour le plus grand profit de leurs élèves. Nos lecteurs nous sauront donc gré de leur avoir présenté ce Livre de très grande valeur et formeront avec nous le souhait que le distingué géomètre qu'est l'Auteur nous donne bientôt, comme il l'annonce dans sa préface, la Théorie des formes quaternaires et son application aux espaces à trois dimensions. X. A.

QUESTIONS.

1910. On donne l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

On considère deux génératrices G et K de même système dont les pieds sur le plan de l'ellipse de gorge sont aux extrémités d'un même diamètre :

1° Trouver les équations de la droite Δ perpendiculaire commune à G et K;

2° Trouver la surface lieu de Δ (conoïde de Plucker);

3° Trouver sur cette surface le lieu des points tels que les plans tangents fassent un angle donné θ avec le plan de l'ellipse de gorge. Construire les projections de ce lieu sur les plans de coordonnées. CH. BIOCHE.

ERRATA.

3e série, Tome XIX :

Page 492, ligne 2 en remontant, deuxième formule, dénominateur; *au lieu de* $\mu - 2$, *lisez* $\mu + 2$.

Page 582 (Tables); après la ligne 7, *ajoutez :*

École centrale des Arts et Manufactures; concours de 1900; Géométrie analytique; Épure; première et deuxième sessions... 567

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

TABLEAU DE CORRESPONDANCE

ENTRE LES

QUESTIONS POSÉES ET LEURS SOLUTIONS

DE L'ANNÉE 1842 (FONDATION) A 1900 INCLUS.

Ce Tableau est adressé aux abonnés avec le numéro de février 1901. *Il pourra être annexé, dans la collection, soit à l'année* 1900 (*à la fin*), *soit à l'année* 1901 (*au commencement*).

A mesure que des solutions nouvelles seront publiées, les lecteurs pourront utilement les enregistrer dans le présent Tableau.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

TABLEAU DE CORRESPONDANCE

ENTRE LES

QUESTIONS DES « NOUVELLES ANNALES » ET LEURS SOLUTIONS,

DEPUIS L'ANNÉE 1842 (FONDATION) JUSQU'A 1900 INCLUS (1).

1842 (I_1) (1).

1. **1842**, 138, 311.
2. **1842**, 139, 147.
3. **1842**, 142, 429.
4. **1843**, 268.
5. **1842**, 145.
6. **1842**, 243.
7. **1842**, 143.
8. **1842**, 139.
9. **1842**, 146.
10. **1842**, 236.
11. **1842**, 148.
12. **1842**, 265.
13. **1842**, 428; **1848**, 61.
14. **1894**, 25*.
15. **1842**, 470.
16. **1848**, 220.
17. **1842**, 240.
18. **1855**, 217; **1877**, 142.
19. **1843**, 43.
20. **1842**, 422.
21. **1842**, 196; **1877**, 188.
22. **1894**, 27*.
23. **1842**, 360.
24. **1842**, 471.
25. **1853**, 80.
26. **1842**, 357.
27. **1843**, 508.
28. **1875**, 235.
29. **1842**, 356.
30. **1842**, 345.
31. **1842**, 474; **1849**, 61, 130.
32. **1844**, 232; **1872**, 280.
33. **1843**, 115.
34. **1852**, 80; **1878**, 39.
35. **1843**, 36; **1850**, 60.
36. **1842**, 507; **1843**, 237.
37. **1874**, 238.
38. **1843**, 510.
39. **1843**, 312, 496.
40. **1844**, 391.
41. **1842**, 447; **1855**, 281; **1898**, 179.
42. **1844**, 172.
43. **1843**, 365.
44. **1844**, 365; **1863**, 97, 100; **1866**, 21, 27.
45. **1850**, 432.
46. **1847**, 353.
47. **1852**, 287.
48. **1898**, 180.
49. **1843**, 244.
50. **1843**, 145; **1849**, 458.
51. **1894**, 28*.
52. **1851**, 25.
53 **1847**, 46.
54. **1843**, 37; **1894**, 30*.
55. **1846**, 121.
56. **1873**, 439, 522.
57. **1872**, 129.

1843 (II_1).

58. **1843**, 319.
59. **1843**, 271; **1894**, 32*.
60. **1852**, 80.

(1) La notation I_1 indique le 1er Volume de la 1re série.

(1) Les questions ne portant pas d'indications sont sans solution à l'heure actuelle. A mesure que de nouvelles solutions paraîtront, il sera aisé au lecteur de compléter ce Tableau.

Quelques réponses indiquées ne sont pas à proprement parler des solutions, mais de simples indications; le nombre en est d'ailleurs faible. D'autre part, certains renvois sont faits à des passages qui ne portent pas expressément le *numéro* de la question, mais qui cependant traitent le même sujet.

Pour les questions sans solution qui ont été réimprimées, on n'indique dans le Tableau que leur origine première.

Nous espérons être arrivés, sinon à la perfection absolue, du moins à un résultat très correct dans l'ensemble, nous le devons surtout à deux des meilleurs collaborateurs des *Nouvelles Annales* : M. le commandant BROCARD et M. H. LEZ, qui ont revu les épreuves avec le plus grand soin. Nous leur adressons l'expression de toute notre gratitude.

(1) Voir *J. M.*, quest. 375.

(1) Voir *N. C.*, **1877**, 274; **1878**, 112.
(2) Voir *N. C.*, quest. 173.

1849 ($VIII_1$).

199. **1898**, 186.
200. **1850**, 209, 211.
201. **1849**, 206, 249.
202. **1849**, 377.
203. **1849**, 142.
204. **1849**, 412.
205. **1854**, 372.
206. **1850**, 116; **1851**, 80; **1875**, 63, 178.
207. **1849**, 297; **1871**, 36.
208. **1849**, 443; **1862**, 244.
209. **1851**, 317.
210. **1849**, 444.
211. **1850**, 59, 273.
212. **1850**, 62.
213. **1850**, 73.
214. **1849**, 445.
215. **1850**, 56, 151.
216. **1849**, 442.

1850 (IX_1).

217. **1850**, 215.
218. **1854**, 270.
219. **1850**, 206, 212.
220. **1850**, 206, 212.
221. **1850**, 146.
222. **1850**, 146.
223. **1850**, 265.
224. **1850**, 351.
225. **1850**, 351.
226. **1850**, 233.
227. **1850**, 246.
228. **1852**, 314.
229. **1850**, 431.

1851 (X_1).

230. **1851**, 316.
231. **1851**, 316.
232. **1852**, 345; **1857**, 166.
233. **1851**, 353.
234. **1851**, 279, 280; **1871**, 38.
235. **1852**, 187.
236. **1851**, 279.
237. **1852**, 463.
238. **1853**, 215.
239. **1855**, 245.
240. **1870**, 229.
241. **1852**, 424; **1855**, 20; **1861**, 53.
242. **1853**, 161, 336; **1861**, 54.
243. **1852**, 186; **1898**, 187.
244. **1852**, 453.
245. **1894**, 42*.
246. **1852**, 48.
247. **1851**, 461.
248. **1852**, 278, 326.

1852 (XI_1).

249. **1852**, 126, 186.
250. **1852**, 449.
251. **1852**, 148; **1864**, 187; **1881**, 473.
252. **1872**, 93 [1].
253. **1852**, 328.
254. **1852**, 274.
255. **1854**, 210.
256. **1855**, 84.
257. **1854**, 320.
258. **1853**, 70.
259. **1853**, 70.
260. **1854**, 306.
261.
262. **1854**, 26; **1858**, 348.
263. **1853**, 319; **1854**, 362.
264. **1853**, 237.
265. **1853**, 169.
266.
267. **1853**, 167; **1854**, 429.
268. **1853**, 222.
269. **1863**, 527, 528.

1853 (XII_1).

270. **1862**, 335.
271. **1853**, 289.
272. **1855**, 97.
273. **1853**, 441; **1854**, 33; **1860**, 115.
274. **1853**, 462.
275. **1853**, 336.
276. **1854**, 200; **1855**, 85, 88.
277. **1854**, 201.
278. **1854**, 202; **1855**, 170.
279. **1857**, 240; **1858**, 347.
280. **1855**, 89; **1856**, 99.
281. **1861**, 92.
282. **1854**, 306.
283. **1854**, 119.
284. **1854**, 121.
285. **1854**, 398, 402.
286. **1854**, 398, 402.

1854 ($XIII_1$).

287. **1858**, 354; **1863**, 212.
288. **1863**, 343.

[1] Voir *N. C.*, **1878**, 45.

289. **1854**, 331; **1855**, 32; **1857**, 102.
290. **1855**, 198; **1857**, 369.
291. **1877**, 190.
292. **1855**, 132; **1868**, 165.
293. **1855**, 241.
294. **1856**, 459; **1862**, 62.
295. **1857**, 85; **1862**, 64; **1863**, 449.

1855 (XIV_1).

296. **1855**, 142; **1856**, 58; **1858**, 399; **1859**, 64; **1861**, 452.
297. **1855**, 413.
298. **1855**, 435.
299. **1855**, 257.
300 **1855**, 234, 368.
301. **1855**, 235; **1856**, 61.
302. **1855**, 236; **1856**, 61.
303. **1855**, 365.
304. **1855**, 311.
305. **1894**, 54*.
306. **1855**, 318.
307. **1858**, 182; **1863**, 220.
308. **1856**, 46.
309. **1865**, 514.
310. **1855**, 444.
311. **1856**, 181.
312. **1857**, 253.
313. **1856**, 184; **1862**, 163.

1856 (XV_1).

314. **1858**, 315.
315. **1856**, 239, 259.
316. **1856**, 296; **1858**, 396.
317. **1861**, 342; **1863**, 300, 422.
318. **1856**, 157.
319. **1857**, 385; **1858**, 82.
320. **1856**, 297.
321. **1856**, 224; **1857**, 41.
322. **1856**, 225; **1857**, 42.
323. **1856**, 226, 228; **1857**, 252.
324. **1898**, 433.
325. **1876**, 328 [1].
326. **1856**, 299.
327. **1857**, 39.
328. **1856**, 300.
329. **1856**, 303; **1881**, 280.
330. **1856**, 305, 321.

[1] Voir *N. C.*, **1876**, 176.

331. **1857**, 354.
332. **1857**, 26, 66, 241.
333.
334. **1857**, 52, 139, 243.
335. **1857**, 37.
336. **1857**, 43.
337. **1858**, 229.
338. **1857**, 20.
339. **1857**, 45, 48.
340. **1857**, 16.
341. **1898**, 188.
342. **1868**, 442.
343. **1857**, 159, 309.
344. **1857**, 22, 44, 51, 79, 139.
245. **1857**, 9, 10, 71.
346. **1857**, 19.
347. **1858**, 331; **1863**, 320.
348. **1857**, 50, 82.
349. **1857**, 172.
350. **1857**, 248, 416.
351. **1859**, 73.
352. **1857**, 96.
353. **1857**, 25, 173; **1894**, 24*.
354. **1857**, 24, 173.
355. **1857**, 55, 175.

1857 (XVI$_1$).

356. **1858**, 326.
357. **1857**, 243.
358. **1857**, 140; **1861**, 30.
359. **1857**, 176.
360. **1866**, 164; **1900**, 90.
361. **1857**, 234, 255, 333.
362. **1864**, 508.
363. **1857**, 200, 201.
364. **1857**, 196.
365. **1857**, 184, 262.
366. **1857**, 187.
367. **1857**, 199.
368. **1857**, 192, 250.
369. **1857**, 189, 192, 251, 269.
370. **1857**, 336, 435.
371. **1858**, 152.
372. **1857**, 371; **1894**, 24*.
373. **1857**, 292.
374. **1857**, 297.
375. **1857**, 290.
376. **1859**, 129, 138.
377. **1856**, 407; **1858**, 19.
378. **1865**, 225.
379. **1865**, 228.
380. **1864**, 127.
381. **1865**, 547.
382. **1857**, 434.
383.
384. **1857**, 337.
385. **1872**, 329.
386. **1857**, 288.
387. **1859**, 420; **1864**, 401.
388. **1857**, 347.
389. **1857**, 296, 369, 375.
390. **1857**, 380.
391. **1857**, 462.
392. **1857**, 456; **1858**, 156, **1864**, 126.
393. **1858**, 5, 205, 207; **1881**, 403.
394. **1857**, 447; **1858**, 11.
395. **1861**, 30, 42.
396. **1857**, 428; **1858**, 9, 63.
397. **1857**, 449.
398. **1865**, 76.
399. **1893**, 6*; **1898**, 436.
400.
401. **1858**, 113, 429.
402. **1858**, 115, 428.
403. **1858**, 117, 191.
404. **1858**, 264.
405. **1858**, 192; **1860**, 320.
406. **1859**, 224, 230, 237; **1863**, 22.
407. **1860**, 316.
408. **1858**, 190.
409. **1858**, 191.
410. **1858**, 187.
411. **1858**, 187.
412. **1859**, 420; **1861**, 120.

1858 (XVII$_1$).

413. **1858**, 179, 180, 435; **1872**, 82.
414. **1898**, 433.
415. **1858**, 123.
416. **1860**, 38.
417. **1859**, 451.
418. **1860**, 97.
419. **1864**, 168.
420. **1858**, 319.
421. **1858**, 126.
422. **1858**, 118.
423. **1858**, 277.
424.
425. **1858**, 195.
426. **1862**, 111; **1865**, 515.
427. **1859**, 335, 336.
428. **1858**, 177.
429. **1866**, 35.
430. **1866**, 35.
431. **1858**, 263.
432. **1860**, 170.
433. **1858**, 285.
434.
435. **1859**, 199; **1860**, 360.
436. **1860**, 141.
437. **1868**, 37; **1869**, 168.
438. **1860**, 186.
439.
440. **1858**, 296, 393.
441. **1872**, 172.
442. **1858**, 393.
443. **1859**, 77, 261, 406; **1860**, 47.
444. **1872**, 131.
445.
446. **1858**, 447.
447. **1867**, 323.
448. **1900**, 90.
449. **1860**, 195.
450. **1858**, 462.
451 **1858**, 432.
452. **1859**, 172.
453. **1858**, 465; **1859**, 68, 71, 150, 172.
454. **1877**, 382.
455. **1859**, 65, 150.
456. **1859**, 65; **1862**, 114.
457. **1859**, 125, 161.
458. **1858**, 463; **1859**, 66, 147, 150, 195, 362.

1859 (XVIII$_1$).

459. **1859**, 148.
460. **1859**, 108, 110, 186.
461. **1859**, 242, 273; **1860**, 34; **1861**, 155, 171.
462. **1859**, 204.
463. **1859**, 217.
464. **1860**, 149.
465. **1810**, 151.
466. **1859**, 205; **1870**, 281.
467. **1859**, 206, 232.
468. **1859**, 219, 233; **1860**, 155; **1861**, 155, 173.
469. **1859**, 184, 207.
470. **1859**, 280.
471. **1859**, 248.
472. **1859**, 350.
473. **1894**, 33*, 36*.
474. **1863**, 60.
475. **1859**, 165; **1894**, 43*.
476. **1859**, 359.
477. **1859**, 265.
478. **1860**, 283; **1861**, 88.
479. **1861**, 155, 174, 264.

1860 (XIX_1).

1861 (XX_1).

1862 (I_2).

(1) Voir *N. C.*, **1876**, 108.
(2) *Voir* question 347.

622. **1862**, 312.
623. **1862**, 318, 379; **1863**, 325.
624. **1862**, 345; **1863**, 209.
625. **1864**, 265; **1898**, 196.
626. **1862**, 458; **1864**, 265.
627. **1862**, 447, 469.
628. **1863**, 54.
629. **1862**, 462.
630. **1862**, 455.
631. **1872**, 83.
632. **1863**, 49, 51.

1863 (II_2).

633. **1863**, 240, 336.
634. **1863**, 105.
635. **1863**, 420.
636. **1863**, 97, 100.
637. **1863**, 146, 181, 184.
638. **1863**, 152.
639. **1863**, 149, 154.
640. **1863**. 419.
641. **1863**, 275, 456.
642. **1863**, 337.
643.
644. **1863**, 415, 418.
645. **1863**, 277.
646. **1863**, 151.
647. **1863**, 387.
648. **1864**, 62, 189.
649. **1866**, 40.
650. **1863**, 502; **1864**, 77.
651. **1864**, 134.
652. **1863**, 368.
653. **1863**, 457.
654. **1863**, 285, 286, 302, 510.
655. **1863**, 454.
656. **1866**, 226.
657. **1864**, 37, 136; **1868**, 511.
658. **1863**, 494, 547.
659. **1863**, 497, 548.
660. **1863**, 498, 549.
661. **1863**, 501, 549.
662. **1896**, 284.
663. **1864**, 225, 367; **1866**, 317.
664. **1864**, 175; 415.
665. **1864**, 170, 171.
666. **1864**, 80; **1871**, 467.
667. **1864**, 260, 263.
668. **1863**, 519; **1864**, 66, 70.
669. **1864**, 322.
670. **1864**, 264.
671. **1863**, 540.
672. **1864**, 74, 76.
673. **1867**, 124.
674. **1864**, 79.
675. **1866**, 461.
676. **1863**, 523; **1864**, 66, 70.
677. **1864**, 30, 33.
678. **1864**, 30, 33.
679. **1864**, 30, 33.
680. **1864**, 235.
681. **1864**, 72, 143, 371.
682. **1865**, 554.
683. **1867**, 473.

1864 (III_2).

684. **1864**, 324, 460.
685. **1864**, 327.
686. **1864**, 328.
687. **1864**, 328.
688. **1864**, 329.
689. **1864**, 391.
690. **1864**, 386.
691. **1865**, 365.
692. **1864**, 260.
693.
694. **1864**, 395, 397.
695. **1864**, 399.
696. **1864**, 373, 377.
697. **1865**, 121, 124.
698. **1864**, 200; **1865**, 518.
699. **1865**, 555; **1880**, 63.
700. **1864**, 532; **1865**, 125; **1868**, 118.
701. **1868**, 285.
702. **1864**, 388.
703.
704. **1864**, 391.
705. **1867**, 177.
706. **1865**, 41.
707. **1865**, 41; **1867**, 278.
708. **1865**, 177; **1869**, 530.
709. **1865**, 112.
710. **1865**, 178.
711. **1865**, 78, 79; **1868**, 443; **1880**, 57; **1881**, 142.
712. **1865**, 80, 84.
713. **1865**, 85.
714. **1865**, 116.
715. **1865**, 39, 41.
716. **1865**, 231, 557.
717. **1865**, 320; **1874**, 266.

1865 (IV_2).

718.
719. **1865**, 125.
720. **1865**, 369, 371.
721. **1867**, 515.
722. **1865**, 322.
723. **1865**, 323.
724.
725. **1866**, 279, 429.
726 (1). **1865**, 125.
727. **1865**, 326, 328.
728. **1866**, 281.
729.
730.
731.
732.
733. **1865**, 372.
734. **1865**, 474.
735. **1865**, 469.
736. **1866**, 168.
737. **1866**, 153, 170, 172.
738. **1866**, 153, 170, 172.
739. **1866**, 170, 172, 178.
740. **1866**, 180.
741 (2). **1866**, 563.
742. **1866**, 227; **1867**, 442.
743. **1866**, 227.
744. **1866**, 151.
745. **1868**, 181.
746. **1866**, 229.
747. **1866**, 139.
748. **1878**, 190.

1866 (V_2).

749. **1866**, 366.
750. **1866**, 230.
751. **1867**, 73.
752. **1866**, 420; **1867**, 510; **1868**, 46.
753. **1866**, 329.
754. **1866**, 426.
755. **1866**, 361, 362.
756. **1866**, 362.
757. **1866**, 333.
758. **1871**, 223.
759. **1871**, 227.
760. **1867**, 219, 520; **1868**, 184.
761. **1867**, 223; **1868**, 184.
762. **1867**, 225.
763. **1867**, 74.

---

(1) Double emploi avec 719.

(2) Énoncé faux; retiré.

(1) Reproduction de la question 461.

(1) Voir *N. C.*, **1876**, 379.

916. **1869**, 321, 541.
917. **1870**, 330.
918. **1870**, 317, 367.
919. **1870**, 317, 404.
920. **1870**, 317.
921. **1870**, 317.
922. **1869**, 542.
923. **1871**, 379.
924. **1869**, 323, **1870**, 32.
925. **1872**, 460.
926. **1871**, 278.
927. **1869**, 424.
928. **1869**, 515.
929. **1898**, 576 (1).
930. **1869**, 426.
931. **1869**, 516.
932. **1875**, 71; **1880**, 63.
933. **1869**, 427; **1870**, 92.
934. **1869**, 328.
935. **1869**, 518, 520.
936. **1894**, 49*.
937.
938.
939. **1869**, 544, 547.
940. **1870**, 332.
941. **1871**, 185.
942. **1869**, 453; **1871**, 95, 288.
943. **1869**, 548.
944. **1873**, 572.
945. **1869**, 374.
946. **1893**, 11*.
947.
948. **1871**, 424.
949. **1871**, 42; **1874**, 293, 483.
950. **1871**, 330.
951. **1869**, 533, 557; **1870**, 89.
952. **1869**, 384; **1870**, 12.
953. **1872**, 173.
954. **1893**, 54*.
955. **1869**, 523; **1870**, 34, 142.
956. **1869**, 524; **1870**, 34, 142.
957. **1869**, 558; **1870**, 41, 189.
958. **1871**, 425.
959. **1872**, 132 (2).
960. **1870**, 46.
961. **1869**, 312, 555.
962. **1871**, 427.

(1) Voir *N. C.*, **1876**, 272.
(2) Voir *N. C.*, **1876**, 377.

963 (1). **1864**, 187; **1863**, 226; **1881**, 473.
964. **1871**, 458.
965. **1870**, 142.
966. **1871**, 514.
967.
968. **1871**, 515.
969. **1871**, 515, 516.
970. **1873**, 577; **1874**, 153, 576; **1877**, 185; **1881**, 321.
971. **1871**, 44, 187.
972. **1873**, 440.
973. **1872**, 500.
974. **1872**, 461.
975. **1872**, 177.
976. **1872**, 181, 183.
977. **1872**, 284.

1870 (IX_2).

978. **1872**, 504.
979. **1872**, 39.
980. **1872**, 228.
981. **1871**, 331.
982. **1870**, 240; **1871**, 518, 560.
983. **1871**, 46.
984. **1876**, 474.
985. **1872**, 230.
986. **1873**, 446.
987. **1870**, 201; **1872**, 232.
988. **1872**, 507.
989.
990. **1872**, 86, 183.
991. **1870**, 424.
992. **1894**, 52*,
993. **1894**, 52*.
994. **1870**, 425; **1871**, 560.
995. **1873**, 455.
996. **1872**, 139.
997. **1872**, 508.
998. **1871**, 334.
999.
1000.
1001. **1873**, 450.
1002. **1871**, 460, 462.
1003. **1872**, 334.
1004.
1005. **1872**, 510.
1006. **1873**, 451; **1874**, 538; **1875**, 231.

(1) Double emploi avec 251.

1007.
1008.
1009. **1873**, 449.
1010. **1871**, 431.
1011. **1873**, 454.
1012. **1870**, 528; **1874**, 244.

1871 (X_2).

1013. **1871**, 184, 235, 237.
1014. **1871**, 520.
1015.
1016. **1871**, 521.
1017 (1).
1018. **1872**, 522; **1874**, 201, 293.
1019. **1872**, 233.
1020. **1871**, 527.
1021. **1874**, 436.
1022. **1873**, 461.
1023. **1872**, 187.
1024. **1874**, 438.
1025. **1872**, 236.
1026. **1871**, 453; **1872**, 78.
1027. **1871**, 456.
1028 (2). **1873**, 577; **1874**, 153, 576; **1881**, 321; **1884**, 144.
1029. **1873**, 459; **1874**, 446; **1885**, 145.
1030. **1872**, 465.
1031. **1873**, 474, 523; **1874**, 105.
1031*bis*. **1872**, 44, 216.
1032. **1896**, 288.
1033. **1874**, 294.
1034. **1873**, 464, 579.
1035.
1036. **1871**, 457.
1037. **1871**, 458.
1038. **1873**, 26.
1039. **1872**, 88.
1040. **1872**, 512.
1041. **1872**, 238.
1042 (3).
1043. **1872**, 81.
1044. **1871**, 555.
1045. **1872**, 78, 90.
1046. **1875**. 73.

(1) Double emploi avec 981. *Voir* **1871**, 331.
(2) *Voir* question 970.
(3) Rectification, **1871**, 561.

(¹) Retiré par l'auteur, **1873**, 131.
(²) *Voir* question 1071.

(¹) Voir *J. S.*, **1884**, 199.
(²) Voir *N. C.*, **1877**, 107.
(³) Voir *N. C.*, **1878**, 45.

1179. **1875**, 472.
1180. **1876**, 46, 528; **1877**, 429, **1881**, 204.
1181. **1876**, 135, 180; **1878**, 256.
1182. **1876**, 228.
1183. **1876**, 138.
1184. **1877**, 42.
1185. **1876**, 561.
1186. **1876**, 140, 142.
1187. **1876**, 186.

1876 (XV_2).

1188. **1876**, 229.
1189. **1876**, 231.
1190. **1876**, 189.
1191. **1876**, 232, 233.
1192. **1876**, 234, 326.
1193. **1876**, 239.
1194. **1878**, 464.
1195. **1881**, 330.
1196. **1876**, 545.
1197. **1876**, 282.
1198. **1876**, 284.
1199. **1876**, 358, 547.
1200. **1876**, 358, 549.
1201. **1876**, 330.
1202. **1876**, 286.
1203. **1876**, 331.
1204. **1876**, 333.
1205. **1876**, 334.
1206.
1207. **1876**, 550.
1208. **1876**, 376.
1209. **1876**, 555.
1210. **1877**, 523; **1881**, 276.
1211. **1876**, 379.
1212. **1876**, 381.
1213. **1876**, 383.
1214. **1876**, 556.
1215. **1876**, 558.
1216. **1876**, 559.
1217. **1877**, 45.

1877 (XVI_2).

1218. **1878**, 45.
1219. **1878**, 45.
1220. **1877**, 234.
1221. **1877**, 235.
1222. **1877**, 283.
1223. **1877**, 236, 238.
1224. **1877**, 326.
1225. **1877**, 478.
1226. **1877**, 285, 376.
1227. **1877**, 332.
1228. **1878**, 83.
1229. **1877**, 333, 425.
1230. **1878**, 46, 48.
1231. **1878**, 86.
1232. **1878**, 130, 225.
1233. **1878**, 325.
1234.
1235. **1878**, 328.
1236.
1237. **1878**, 132, 221.
1238. **1878**, 331.
1239. **1878**, 227.
1240. **1878**, 228.
1241. **1878**, 133.
1242. **1877**, 525.
1243. **1878**, 229.
1244. **1877**, 527.
1245. **1878**, 91.
1246.
1247. **1878**, 230.
1248. **1878**, 136, 252.
1249. **1878**, 138, 252.
1250. **1878**, 141.
1251. **1878**, 468.
1252. **1878**, 231.
1253 ([1]). **1878**, 234.
1254. **1878**, 236.

1878 ($XVII_2$).

1255. **1878**, 430, 516.
1256.
1257. **1895**, 1*.
1258. **1878**, 332.
1259. **1879**, 321.
1260. **1878**, 333.
1261. **1878**, 469.
1262. **1878**, 557.
1263. **1878**, 374.
1264. **1879**, 375.
1265. **1878**, 471.
1266. **1895**, 5*.
1267. **1895**, 8*.
1268. **1879**, 322; **1880**, 94.
1269. **1878**, 560.
1270. **1879**, 466.
1271. **1878**, 473.
1272. **1880**, 133, 403; **1881**, 515.
1273. **1878**, 475.
1274. **1878**, 476.
1275. **1881**, 175.

([1]) Voir *J. S.*, questions 166, 184.

1276. **1878**, 430, 477, 478, 516, 518.
1277. **1895**, 10*.
1278. **1879**, 376.
1279. **1878**, 463, 464; **1880**, 517.
1280. **1879**, 468.
1281. **1883**, 372.
1282. **1879**, 324.
1283. **1881**, 518.
1284. **1879**, 325.
1285. **1883**, 301.
1286. **1878**, 523.
1287. **1895**, 11*.
1288. **1879**, 326.
1289. **1879**, 77.
1290. **1878**, 524.
1291. **1879**, 328.
1292. **1878**, 524.
1293. **1879**, 329.
1294. **1879**, 330.
1295. **1879**, 378.
1296. **1880**, 458; **1881**, 173.
1297. **1880**, 430.
1298. **1880**, 91, 411; **1881**, 418; **1898**, 99.
1299. **1879**, 470.
1300. **1879**, 474.
1301. **1879**, 379.
1302. **1879**, 425.
1303. **1879**, 332.
1304. **1879**, 334.
1305.
1306. **1881**, 368, 480.
1307.
1308. **1881**, 281.

1879 ($XVIII_2$).

1309. **1895**, 13*.
1310.
1311. **1879**, 426.
1312. **1879**, 384; **1880**, 459.
1313. **1880**, 431; **1881**, 177.
1314. **1879**, 427.
1315. **1879**, 428.
1316. **1879**, 475; **1880**, 63.
1317. **1879**, 430.
1318. **1880**, 524.
1319. **1895**, 16*.
1320. **1880**, 460.
1321.
1322. **1882**, 419.
1323. **1879**, 525; **1882**, 46.

1324. **1880**, 461; **1881**, 173.
1325. **1879**, 529.
1326. **1880**, 462.
1327. **1880**, 464.
1328. **1881**, 333.
1329. **1880**, 467.
1330. **1881**, 335.
1331. **1881**, 372.
1332. **1880**, 468.
1333. **1880**, 526.
1334. **1880**, 470.
1335. **1881**, 425.
1336. **1880**, 556.
1337. **1882**, 473.
1338. **1881**, 373.
1339. **1880**, 472.
1340. **1880**, 473; **1881**, 143.

1880 (XIX$_2$).

1341. **1880**, 475.
1342. **1880**, 479, 528; **1881**, 178.
1343. **1881**, 520.
1344. **1881**, 179.
1345. **1881**, 427.
1346. **1880**, 557.
1347. **1881**, 428.
1348. **1881**, 180.
1349. **1881**, 431.
1350. **1881**, 375.
1351. **1895**, 22*.
1352. **1881**, 342, 344.
1353. **1881**, 143, 182, 340.
1354. **1881**, 376.
1355. **1881**, 340.

1881 (XX$_2$).

1356. **1881**, 184.
1357. **1881**, 282, 423.
1358. **1881**, 379.
1359.
1360. **1884**, 438.
1361.
1362. **1885**, 519.
1363.
1364. **1881**, 528.
1365.
1366.
1367. **1882**, 368.
1368. **1882**, 371.
1369. **1882**, 422.
1370. **1882**, 424.
1371.
1372. **1895**, 22*.
1373. **1881**, 523 (1).
1374. **1881**, 524.
1375. **1882**, 374.
1376. **1881**, 528.
1377. **1882**, 376.
1378. **1882**, 426.
1379. **1882**, 377.
1380. **1882**, 379.
1381. **1882**, 426.

1882 (I$_3$).

1382. **1895**, 24*.
1383. **1882**, 428.
1384. **1896**, 388; **1898**, 94.
1385. **1893**, 2*.
1386. **1882**, 380.
1387. **1883**, 133, 136.
1388. **1885**, 328.
1389. **1885**, 321.
1390.
1391. **1883**, 425.
1392.
1393.
1394.
1395. **1883**, 133, 138.
1396. **1883**, 426.
1397. **1882**, 382.
1398. **1891**, 6*.
1399. **1883**, 471.
1400. **1882**, 430.
1401. **1883**, 474.
1402.
1403.
1404. **1882**, 475.
1405. **1883**, 432; **1884**, 386.
1406. **1896**, 93.
1407. **1896**, 389.
1408. **1882**, 476; **1896**, 390.
1409. **1882**, 478.
1410. **1883**, 322.
1411. **1893**, 58*.
1412. **1882**, 521, 522.
1413. **1883**, 324.
1414. **1882**, 472, 523.
1415. **1882**, 526.
1416.
1417. **1883**, 427.
1418. **1883**, 325.
1419. **1893**, 55*.
1420. **1883**, 374.

(1) Voir *M.*, **1885**, 128.

1421. **1883**, 326.
1422. **1883**, 329.
1423. **1883**, 375.
1424. **1883**, 376.
1425. **1883**, 331.
1426 (1).
1427. **1883**, 378.
1428. **1883**, 380.
1429. **1883**, 429.

1883 (II$_3$).

1430 (2).
1431 (3). **1893**, 58*.
1432.
1433.
1434. **1883**, 332.
1435.
1436. **1884**, 388.
1437. **1884**, 533.
1438.
1439.
1440.
1441.
1442.
1443.
1444.
1445.
1446.
1447.
1448.
1449. **1885**, 473.
1450. **1884**, 483.
1451. **1885**, 379.
1452. **1891**, 7*.
1453. **1883**, 476.
1454. **1884**, 534.
1455. **1884**, 535.
1456. **1885**, 432.
1457. **1884**, 392.
1458. **1884**, 394.
1459. **1883**, 430.
1460. **1884**, 484.
1461. **1885**, 434.
1462. **1883**, 521.
1463. **1883**, 477, 515.
1464. **1884**, 487.
1465. **1883**, 522; **1884**, 441.
1466. **1883**, 478.

(1) Énoncé faux; retiré. *Voir* p. 528.
(2) Rectification. *Voir* **1883**, 96.
(3) Double emploi avec 1411.

1884 (III$_3$).

(1) Voir *J. E.*, **1883**, 247.
(2) Voir *N. C.*, **1879**, 8.

1885 (IV$_3$).

1886 (V$_3$).

1887 (VI$_3$).

1888 (VII$_3$)

1890 (IX$_3$) (1).

1891 (X$_3$).

(1) Aucune question n'a été posée en 1889.

1892 (XI$_3$).

1893 (XII$_3$).

1894 (XIII$_3$).

1895 (XIV$_3$).

1896 (XV$_3$).

1897 (XVI$_3$).

1761.
1762.
1763.
1764. **1897**, 482.
1765.
1766. **1899**, 383.
1767. **1898**, 285.
1768. **1899**, 383.
1769. **1899**, 384, 476.
1770.
1771. **1899**, 385.
1772. **1899**, 435.
1773. **1899**, 477.
1774. **1899**, 478.
1775.
1776.
1777.
1778. **1899**, 480.
1779.
1780. **1898**, 192.
1781. **1897**, 436; **1898**, 193.
1782.
1783.
1784.
1785.

1898 ($XVII_3$).

1786. **1899**, 481.
1787. **1899**, 483.
1788. **1900**, 93.
1789. **1900**, 237.
1790. **1899**, 532.
1791. **1900**, 238.
1792. **1900**, 239.
1793. **1900**, 335.
1794. **1900**, 335.
1795.
1796.
1797. **1900**, 376.
1798. **1900**, 377.
1799.
1800. **1900**, 378.
1801. **1900**, 379.
1802. **1900**, 380, 381.
1803.
1804.
1805.
1806.
1807.
1808.
1809.
1810.
1811.

1899 ($XVIII_3$).

1812.
1813.
1814.
1815.
1816
1817.
1818.
1819.
1820.
1821.
1822.
1823.
1824.
1825.
1826.
1827.
1828.
1829.
1830.
1831.
1832.

1900 (XIX_3).

1833.
1834.
1835.
1836.
1837.
1838.
1839.
1840
1841.
1842.
1843.
1844.
1845.
1846.
1847.
1848.
1849.
1850.
1851.
1852.
1853.
1854.
1855.
1856.
1857.
1858.
1859.
1860.
1861.
1862.
1863.
1864.
1865.
1866.
1867.
1868.
1869.
1870.
1871.
1872.
1873.
1874.
1875.
1876.
1877.
1878.
1879.
1880.
1881.
1882.
1883.
1884.
1885.
1886.
1887.
1888.
1889.
1890.
1891.
1892.
1893.
1894.
1895.
1896.
1897.
1898.
1899.
1900.

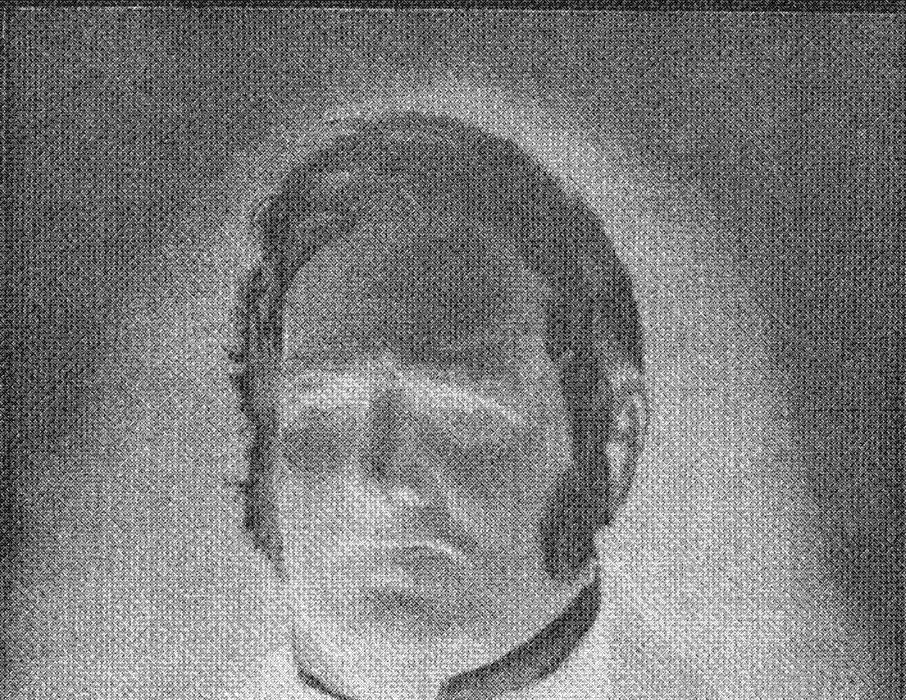
Toutes les rectifications ou Notes quelconques, précédemment publiées dans les *Nouvelles Annales*, et qui ne concorderaient pas avec le Tableau qui précède, devront être considérées par le lecteur comme non avenues.

Nous engageons nos collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur les questions dont aucune solution n'a été publiée.

29687 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

TABLE DES MATIÈRES.

29605 Paris, Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.



BELLAVITIS

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1900.

Résultat.

Examen fait des nombreux Mémoires envoyés, dont la plupart étaient excellents, les juges du Concours se fussent trouvés fort embarrassés, s'il n'était stipulé qu'à mérite égal, c'est l'œuvre la plus concise qui doit avoir la préférence. Ils n'ont donc pas hésité à se prononcer en faveur du Mémoire que nous publions dans le présent numéro. L'auteur ayant manifesté le désir formel de garder l'anonyme, nous devons nous y conformer scrupuleusement.

[M²3h]

DEUXIÈME CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1900;

PAR UN ANONYME.

Sujet.

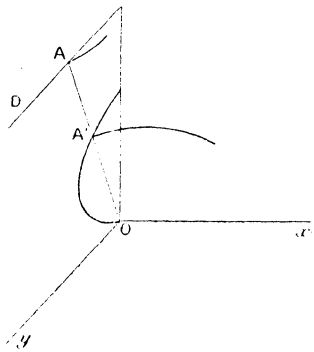
Les axes Ox, Oy, Oz *étant supposés rectangulaires, on donne dans le plan* yOz *le cercle* (C) *et la droite* (D) *définis par les équations*

$$(\mathrm{C})\qquad y^2+z^2-c'z=0,$$

$$(\mathrm{D})\qquad z-c=0,$$

puis on considère une hyperbole équilatère (H) *située dans un plan* (Π) (*fig.* 1) *passant par* Ox *et dont les*

Fig. 1.

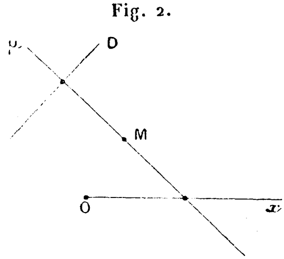


sommets réels A *et* A′ *sont situés, le premier sur la droite* (D), *le second sur le cercle* (C) (*le point* A′ *étant distinct du point* O).

1° *Lorsque le plan* Π *tourne autour de* Ox, *l'hyperbole* (H) *engendre une surface du troisième ordre* (S) *tangente au plan des* xy *tout le long de l'axe* Ox.

2° *On considère une droite variable* (Δ) *assujettie à s'appuyer sur* Ox *et sur la droite* (D), *et le point* M (*fig.* 2), *non situé sur* Ox *ou sur* (D), *intersection de*

Fig. 2.



la droite Δ *et de la surface cubique* (S).

Montrer que les coordonnées du point M *s'ex-*

priment rationnellement en fonction des deux coordonnées variables du point μ, trace de la droite Δ sur le plan $z = 2c$.

3° *Quand le point* M *décrit la section de la surface* (S) *par un plan* (P), *le point* μ *décrit une cubique* (Γ), *et quand le plan* (P) *varie, la cubique* (Γ) *passe par six points fixes qui sont les sommets d'un quadrilatère complet.*

4° *Trouver toutes les droites tracées sur la surface.*

5° *Quand le point* M *se déplace sur la surface* (S) *de façon que le plan tangent en* M *passe par un point fixe de l'espace,* Q, *le point* μ *décrit une conique.*

Où doit se trouver le point fixe pour que cette conique se décompose en deux droites ou se réduise à une droite double?

Que peut-on conclure de là pour le cône circonscrit à la surface (S) *et dont le sommet est le point* Q?

6° *Étudier le lieu du point* M *quand le point* μ *décrit une droite située dans le plan* $z = 2c$.

La surface dont l'étude constitue l'objet du problème proposé est, comme nous le verrons plus loin, une surface du troisième ordre à quatre points doubles. Nous allons donc étudier d'abord les propriétés d'une telle surface : la solution de la question en sera une conséquence. Nous aurons, pour cela, recours à une transformation qui peut être considérée comme une généralisation de la transformation plane du second ordre.

1. *Les transformations* (T). — Nous désignerons par *transformations* (T) les transformations ponctuelles involutives qui associent entre eux deux points m et m', dont les coordonnées homogènes

$$(x, y, z, t) \quad \text{et} \quad (x', y', z', t')$$

relatives à un même tétraèdre de référence sont unies par les relations

$$xx' = A, \qquad yy' = B, \qquad zz' = C, \qquad tt' = D.$$

On voit immédiatement qu'à un sommet du tétraèdre de référence correspondent tous les points de la face opposée; de même, à tout point d'une arête de ce tétraèdre correspondent tous ceux de l'arête opposée.

Il est facile de voir qu'une droite quelconque se transforme en une cubique gauche circonscrite au tétraèdre de référence. On en déduit qu'une surface d'ordre n se transforme généralement en une surface d'ordre $3n$: cette dernière admet les sommets du tétraèdre pour points multiples d'ordre $2n$, et ses arêtes pour génératrices d'ordre n.

Remarquons encore qu'à un plan issu d'une arête correspond un plan issu de la même arête. Ces plans, étant réciproques, se correspondent involutivement; par suite, par chaque arête il passe deux plans coïncidant avec leurs homologues. A une droite s'appuyant sur deux arêtes opposées, c'est-à-dire commune à deux plans issus de ces arêtes, correspondra donc une droite analogue.

Si les deux plans considérés sont doubles, il en sera de même de leur intersection; il y a donc quatre droites doubles s'appuyant sur chaque couple d'arêtes opposées du tétraèdre fondamental.

2. Soit Δ l'une de ces droites doubles, s'appuyant sur les arêtes opposées A et A' du tétraèdre fondamental, et soient M et M' deux droites homologues s'appuyant sur ces mêmes arêtes : nous aurons à envisager la transformation ponctuelle (m, m') qui associe les traces de ces droites M et M' sur un plan P issu de Δ. Nous allons

montrer que cette transformation est une homologie involutive.

Soient, en effet, α et α' les points où Δ coupe A et A'; puisque les plans AM et AM' se correspondent involutivement, il en est de même de leurs traces αm et $\alpha m'$; les droites $\alpha' m$ et $\alpha' m'$ décrivent également des faisceaux involutifs; d'ailleurs, dans ces deux involutions la droite $\alpha\alpha'$ se correspond à elle-même. Soient $\alpha\omega$ et $\alpha'\omega$ les deux autres rayons doubles de ces involutions, c'est-à-dire les conjuguées harmoniques de la droite $\alpha\alpha'$ par rapport aux angles $m\alpha m'$ et $m\alpha' m'$: il est bien évident que la droite mm' passe par ω, et que le segment mm' est divisé harmoniquement par le point ω et la droite $\alpha\alpha'$; l'homologie annoncée en résulte.

Si m coïncide avec la trace β ou γ d'une arête du tétraèdre, il est d'ailleurs évident que m' coïncidera avec la trace β' ou γ' de l'arête opposée. Le centre d'homologie, ω, est donc le point de concours des diagonales $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ du quadrilatère complet $\alpha\alpha'\beta\beta'\gamma\gamma'$ déterminé sur le plan P par les traces des arêtes du tétraèdre fondamental.

3. *Les surfaces du troisième ordre à quatre points doubles.* — D'après les remarques faites plus haut (n° 1), une transformation (T) associe à un plan une surface du troisième ordre passant par les arêtes du tétraèdre fondamental et admettant ses sommets pour points doubles. La réciproque est immédiate, car une telle surface, S, a nécessairement une équation de la forme

$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{t}=0.$$

On vérifiera sans peine que le plan

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=0,$$

touche S en tous les points d'une arête, et la coupe, par suite, suivant une autre génératrice, Δ, qui est aussi dans le plan

$$\frac{z}{\gamma} + \frac{\delta}{t} = 0.$$

Ainsi, S contient trois génératrices Δ, s'appuyant respectivement sur deux arêtes opposées du tétraèdre, et contenues toutes trois dans le plan

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + \frac{t}{\delta} = 0.$$

Nous allons voir que ces droites et les arêtes du tétraèdre des points doubles sont les seules génératrices de la surface S.

4. *Sections planes.* — Par une transformation (T), à tout point m de S correspond un point m' d'un plan P. Considérons de même un plan Q; la même transformation lui associe une surface Σ analogue à S, et à la courbe (Q, S) correspond la courbe (Σ, P), c'est-à-dire une cubique, Γ, qui passe par les traces sur le plan P des arêtes du tétraèdre fondamental; désignons par K le quadrilatère complet dont ces traces sont les sommets; nous voyons que :

Par une transformation (T), *aux sections planes de* S *correspondent dans un plan* P *des cubiques* Γ *circonscrites au quadrilatère complet* K *formé par la section du tétraèdre des points doubles.*

Si le plan Q passe par un des points doubles, a, la cubique Γ se décompose en la trace du plan des autres points doubles et en une conique qui passe par les traces des trois arêtes issues de a. Si le plan Q passait par une arête du tétraèdre, Γ se décomposerait en deux côtés du quadrilatère K et en une droite issue du point de concours des trois autres.

5. Il reste encore pour Γ un autre mode de décomposition : elle peut être formée par une diagonale, $\alpha\alpha'$, du quadrilatère K, et par une conique passant par les quatre sommets β, β', γ, γ'. Or, ainsi que nous l'avons remarqué (n° 1), à la droite $\alpha\alpha'$ correspond une droite s'appuyant sur A et A' : c'est une des trois génératrices Δ signalées tout à l'heure (n° 3); les deux autres correspondraient aux diagonales $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$.

Nous avons d'ailleurs obtenu toutes les génératrices de la surface, car nous avons examiné tous les modes de décomposition de Γ.

6. *Lignes asymptotiques.* — En dehors de ces cas de décomposition, la cubique Γ peut présenter un point double, lorsque le plan Q est tangent à S. Or, on sait que, si une cubique circonscrite à un quadrilatère complet présente un point double, les tangentes en ce point sont les rayons doubles de l'involution définie par les droites qui joignent le point double aux sommets du quadrilatère : par suite, ces tangentes touchent chacune une des coniques inscrites au quadrilatère et qui passent par le point double. De là résulte immédiatement que :

Par la transformation (T), *aux lignes asymptotiques de* S *correspondent dans le plan* P *les coniques inscrites au quadrilatère* K.

7. *Courbes de contact des cônes circonscrits.* — Cherchons maintenant la transformée de la courbe de contact du cône de sommet σ circonscrit à la surface S. Puisque aux droites issues de σ correspondent les cu-

biques gauches circonscrites au tétraèdre fondamental et passant par σ', la transformée en question est le lieu des points de contact de celles de ces cubiques qui touchent le plan P.

Or, on sait [1] que les cubiques gauches qui passent par cinq points fixes ont pour traces sur un plan fixe P les sommets d'un triangle conjugué à une conique fixe : si deux de ces sommets sont confondus, ils sont donc sur cette conique, qui constitue le lieu cherché. Elle est d'ailleurs, comme on sait, conjuguée aux traces de deux droites joignant deux couples de points arbitrairement choisis parmi les cinq points fixes. Toutes les coniques qu'on obtiendra diviseront donc harmoniquement les segments $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$. Ainsi :

Par la transformation (T), *à la courbe de contact d'un cône circonscrit à* S *correspond dans le plan* P *une conique qui divise harmoniquement les diagonales du quadrilatère* K.

On voit aisément que, si l'on considère trois de ces coniques, leur hessienne est la cubique Γ qui représente la section de S par le plan des sommets des trois cônes considérés.

8. Les coniques que nous venons d'obtenir, n'étant assujetties qu'à deux conditions linéaires, peuvent se décomposer en deux droites, dont l'une arbitraire. Mais, dans ce cas, la courbe de contact présente un point double, et, par suite, σ est sur S. D'ailleurs, nous avons indiqué (n° 1) qu'à toute droite la transformation (T)

---

(1) *Voir*, par exemple, E. Duporcq, *Premiers Principes de Géométrie moderne*, p. 109.

associe une cubique gauche circonscrite au tétraèdre des points doubles. Par suite :

Le cône circonscrit à S, *issu d'un point de cette surface, se décompose en deux cônes du troisième ordre qui touchent* S *en tous les points de deux cubiques gauches, passant par les quatre points doubles.*

9. *Autre représentation plane de* S. — Soit P un plan issu de celle des trois génératrices Δ qui s'appuie sur les arêtes A et A'. Toute droite M s'appuyant sur ces arêtes coupe S et P en deux points μ et m, et il est facile de voir que les coordonnées de μ s'expriment rationnellement en fonction de celles de m. On peut donc envisager ce nouveau mode de représentation plane.

Or, il existe une transformation (T) qui associe entre eux le plan P et la surface S; car, si leurs équations sont

$$ax + by + cz + dt = 0, \qquad \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{t} = 0,$$

il suffit de prendre

$$A = \frac{\alpha}{a}, \qquad B = \frac{\beta}{b}, \qquad C = \frac{\gamma}{c}, \qquad D = \frac{\delta}{d}.$$

La génératrice Δ se correspondra d'ailleurs évidemment à elle-même. Soit M' la droite que cette transformation associe à M, et μ', m' les points où elle coupe S et P. Nous avons vu précédemment (n° 2) que la transformation (m, m') est une homologie. La transformation (μ, m), égale au produit des transformations (μ, m') et (m', m), c'est-à-dire de la transformation (T) et d'une homologie, jouit donc des propriétés projectives énoncées pour la transformation (T) : il suffit de se rappeler que (n° 2) le quadrilatère complet (K) se transforme en lui-même par l'homologie (m, m').

10. *Application au cas particulier de l'énoncé.* — On trouve sans difficulté que la surface envisagée dans l'énoncé a pour équation

$$x^2 z = (z - c)(y^2 + z^2 - c'z).$$

Remarquons que si le plan Π passe par l'un ou l'autre des points communs à la droite (D) et au cercle (C), l'hyperbole (H) se réduit à deux droites, et il est bien évident que les deux couples de droites ainsi obtenus coupent Ox aux mêmes points. Ces quatre droites forment donc avec Ox et (D) six arêtes d'un tétraèdre, contenues sur la surface.

Observons enfin que la surface passe par la droite à l'infini du plan $z = 2c$; cette droite joue donc le rôle de la droite Δ envisagée dans le numéro précédent, et tous les résultats énoncés deviennent ainsi une conséquence immédiate de ceux que nous venons d'exposer.

[L^2 15c]

SUR LA QUESTION DU PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1900;

Par M. G. FONTENÉ.

I. On connaît les faits suivants. Étant données deux tangentes à une quadrique, *les tangentes à la quadrique qui rencontrent les deux tangentes données forment deux systèmes distincts;* le lieu des points de contact se compose de deux coniques dont les plans passent par la corde des contacts des deux tangentes données, et forment un faisceau harmonique avec les plans qui passent par cette corde et par les deux tangentes fixes. Si l'on prend deux tangentes du même système, elles forment, avec les deux premières, un *contour quadrangulaire circonscrit de première espèce,* les quatre points de contact étant dans un même plan; deux tangentes de systèmes différents donnent des *contours de seconde espèce,* le plan de trois quelconques des points de contact rencontrant le dernier côté en un point dont le conjugué harmonique par rapport aux extrémités de ce côté est le point de contact situé sur ce côté; le théorème de Carnot donne naturellement ces deux espèces de quadrilatères (Cf. PAINVIN, *Géométrie analytique de l'espace,* IIe Partie, p. 149; MANNHEIM, *Bull. de la Soc. math.,* géométriquement, p. 78; 1897).

Il faut ajouter un fait, qui n'a peut-être pas été remarqué, et pour lequel nous désignerons un contour quadrangulaire par la notation (M, N) (M′, N′) qui indique les deux couples de sommets opposés : *Lorsqu'un contour quadrangulaire* (M, N) (M′, N′) *est circonscrit à une quadrique, si l'on considère, par exemple, les deux cônes de sommets* M *et* N *circonscrits à la quadrique et les deux coniques suivant lesquelles se coupent ces deux cônes, les points* M′ *et* N′ *sont sur une même de ces deux coniques quand le contour est de première espèce, tandis que le point* M′ *est sur l'une de ces coniques et le point* N′ *sur l'autre quand le contour est de seconde espèce;* on le voit en rapportant la quadrique au tétraèdre MNM′N′.

Cela posé, si l'on se donne une quadrique S et un terne de points A, B, C, on peut chercher un terne de points A′, B′, C′ tels que les *neuf* droites joignant un point non accentué à un point accentué soient tangentes à la quadrique. Les cônes de sommets A, B, C circonscrits à la quadrique se coupent en huit points dont trois seront les point A′, B′, C′; les équations des trois cônes

$$S + \alpha^2 = 0, \qquad S + \beta^2 = 0, \qquad S + \gamma^2 = 0$$

montrent que les huit points d'intersection sont deux à deux sur quatre droites Oa, Ob, Oc, Od données par les équations

$$-\alpha = \beta = \gamma, \qquad \alpha = -\beta = \gamma, \qquad \alpha = \beta = -\gamma, \qquad \alpha = \beta = \gamma,$$

et le point O, intersection des plans polaires des points A, B, C, est le pôle du plan ABC. Il y a lieu de rechercher l'influence du choix des trois points A′, B′, C′ sur la nature des contours quadrangulaires de la figure; ces contours sont au nombre de neuf, deux sommets opposés pouvant être (B, C), (C, A), (A, B), en même temps que les deux autres peuvent être (B′, C′), (C′, A′), (A′, B′).

1° Si l'on suppose d'abord que deux des trois points A′, B′, C′ ne sont pas sur une même droite issue de O, on peut prendre ces points respectivement sur les trois premières droites; alors, des deux coniques d'intersection des cônes B et C, par exemple, coniques situées dans les plans $\beta = -\gamma$, $\beta = \gamma$, ou bOc et dOa, la première passe par les points B′ et C′, la seconde passe en A′, de sorte que le contour désigné par la notation (B, C) (B′, C′) est de première espèce, tandis que les contours (B, C) (B′, A′) et (B, C) (C′, A′) sont de seconde espèce; les trois points A′, B′, C′ correspondent donc un à un aux points A, B, C, *les trois tangentes* AA′, BB′, CC′ *jouent un rôle à part*, et chacun des trois contours (B, C) (B′, C′), (C, A) (C′, A′), (A, B) (A′, B′) est de première espèce, les six autres étant de seconde espèce.

2° Si l'on suppose, en second lieu, que les deux points A' et B' sont sur Od, le point C' étant sur Oc, il arrive ceci : des deux coniques d'intersection des cônes A et B, celle qui est dans le plan $\alpha = \beta$ ou dOc contient les trois points A', B', C'; des deux coniques d'intersection des cônes C et A, ou C et B, celle qui est dans le plan dOb ou dOa contient les points A' et B', l'autre contenant le point C'. Dans ces conditions, les cinq contours dont deux sommets opposés sont (A, B) ou (A', B') sont de première espèce, les quatre autres étant de seconde espèce, c'est-à-dire que *les sommets* C et C' *jouent un rôle à part;* en somme, les points de contact 1, 2, 3, 4 des côtés du contour $(A, B)(A', B')$ sont dans un même plan, et, de plus, les droites 12 et 34 coupant AB en S, les droites 14 et 23 coupant $A'B'$ en S', la corde des contacts pour $C'A$ et $C'B$ coupe AB en S, ce qui donne encore deux contours $(A, B)(C', A')$ et $(A, B)(C', B')$ de première espèce, la corde des contacts pour CA' et CB' coupe $A'B'$ en S', ce qui donne les deux derniers contours $(A', B')(C, A)$ et $(A', B')(C, B)$ de première espèce.

II. La figure dépend de 18 paramètres. Si l'on se donne, pour le premier des deux cas indiqués, la quadrique S et les trois tangentes AA', BB', CC' qui jouent un rôle à part, on cherche à obtenir un contour hexagonal $AB'CA'BC'A$ ayant ses six côtés tangents à la quadrique, et tel que les deux tangentes AB' et $A'B$, par exemple, appartiennent à un même système; *ce problème, qui semble déterminé, est en réalité impossible ou indéterminé.*

Soit A un point quelconque sur AA'; on en déduit un seul point B', un seul point C, un seul point A', en choisissant chaque fois l'une des deux correspondances homographiques qui se présentent; comme, d'après l'hypothèse faite, les trois correspondances suivantes (A', B), (B, C'), (C', A_1) sont identiques aux trois premières, la relation entre A' et A_1 est identique à celle qui a lieu entre A et A'; pour que A_1 puisse se confondre avec A, sans que A' se confonde avec A, ce qui donnerait une solution parasite, il faut que cette relation homographique entre A et A' admette un couple de points distincts échangeables, auquel cas la relation est involutive et le contour hexagonal se ferme de lui-même, quel que soit le point de départ A. Il en est ainsi, par exemple, quand les trois tangentes AA', BB', CC' concourent en un point R; car, en désignant par α, β, γ les points de contact de ces tangentes, si l'on met A en α, on a le contour hexagonal $\alpha R \gamma R \beta R \alpha$; mais les trois tangentes vérifient ici trois conditions, alors qu'une condition suffit.

Pour le second des deux cas indiqués, on peut se donner la quadrique et le contour $(A, B)(A', B')$ de première espèce; on prend le point C' sur celle des deux coniques d'intersection des cônes circonscrits A et B qui contient les points A' et B', et l'on détermine le point C sur celle des deux coniques d'intersection des cônes circonscrits A' et B' qui contient les points A et B; pour cela, on coupe cette conique par le cône circonscrit C', et comme A et B sont deux points de l'intersection, on a le choix entre deux positions du point C.

Si l'on se donne arbitrairement les six points A, B, C, A', B', C', les seules quadriques tangentes aux neuf droites sont-elles des quadriques évanouissantes réduites à des coniques passant par les points A, B, C ou par les points A', B', C'? Ou bien existe-t-il généralement des quadriques véritables tangentes aux neuf droites, les contacts remplissant les conditions du premier cas? En existe-t-il avec les conditions du second cas? Ces questions dépendent du *problème général des quadriques tangentes à neuf droites,* problème sur lequel la question posée avait pour but d'attirer l'attention; j'avoue n'avoir pu les résoudre.

Le cas où les trois droites AA', BB', CC' sont concourantes est facile à traiter. Si l'on considère une quadrique tangente à ces trois droites et aux cinq premiers côtés du contour hexagonal AB'CA'BC'A, cette quadrique touche le sixième côté du contour : elle donne lieu, en effet, à une infinité simple de contours hexagonaux $A_1B'_1C_1\ldots C'_1A_1$, dont les six côtés lui sont tangents, et celui de ces contours qui commence en A se confond avec le contour AB'C...C'A, puisque ces deux contours ont cinq côtés communs.

Note. — J'indique en terminant les faits suivants, dont le premier concerne une quadrique tangente à neuf droites :

Étant donnés cinq plans a, b, c, d, e, qui se coupent deux à deux suivant dix droites, si l'on néglige la droite (d, e), il existe une seule quadrique tangente aux neuf droites restantes; le plan polaire du point (a, b, c) par rapport à cette quadrique est le plan polaire du même point par rapport au système des deux plans d et e.

Il est impossible que les dix droites d'intersection de cinq plans (ou les dix droites de jonction de cinq points) soient tangentes à une quadrique de discriminant non nul.

[B12c]

SUR LA SIMILITUDE DIRECTE DANS LE PLAN, APPLICATION DE LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES;

PAR M. R. BRICARD.

1. Considérons un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy. On sait que la *méthode des équipollences* (Cauchy, Bellavitis) est un procédé de calcul géométrique dont voici le principe : Tout vecteur AB est représenté par la quantité complexe $x+yi$, x et y étant les projections de ce vecteur, respectivement sur Ox et sur Oy. Réciproquement, à toute imaginaire $x+yi$ correspond un vecteur défini en grandeur et en direction, mais non en position.

On a

$$\mathrm{AB} = -\mathrm{BA}.$$

Trois points quelconques A, B, C donnent lieu à l'identité entre vecteurs

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=0.$$

Enfin, la similitude *directe* de deux triangles $\mathrm{AA'A''}$, $\mathrm{BB'B''}$ s'exprime par l'égalité

$$\frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{AA''}}=\frac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{BB''}}.$$

2. Ces principes étant rappelés, considérons deux triangles directement semblables $\mathrm{AA'A''}$, $\mathrm{BB'B''}$ et posons

$$\begin{array}{lll}
\text{vecteur} & \mathrm{OA}=x, & \mathrm{OB}=y, \\
\quad » & \mathrm{OA'}=x', & \mathrm{OB'}=y', \\
\quad » & \mathrm{OA''}=x'', & \mathrm{OB''}=y''.
\end{array}$$

On a la relation

$$\frac{\mathrm{AA}'}{\mathrm{AA}''} = \frac{\mathrm{BB}'}{\mathrm{BB}''},$$

qui peut s'écrire

$$(1) \qquad \frac{x'-x}{x''-x} = \frac{y'-y}{y''-y}.$$

Si l'on considère (x, y), (x', y'), (x'', y'') comme les coordonnées cartésiennes de trois points (imaginaires), l'égalité précédente exprime que ces trois points sont en ligne droite.

Ainsi, *à tout système de deux triangles directement semblables, on peut faire correspondre un système de trois points en ligne droite, et réciproquement.*

Ce principe extrêmement simple permet de transformer les propriétés relatives à des systèmes de points (imaginaires) en ligne droite, en propriétés relatives à des figures semblables *réelles*. Nous donnerons deux exemples de cette méthode de transformation.

Remarquons auparavant que la valeur commune des rapports figurant dans l'égalité (1) est le rapport de division du segment joignant les points (x', y') et (x'', y''), par le point (x, y). Interprété au point de vue des équipollences, ce rapport de division devient le *rapport géométrique* des vecteurs $\frac{\mathrm{AA}'}{\mathrm{AA}''}$.

Si donc, dans l'énoncé de la propriété à transformer, figurent des relations entre rapports de division de segments par des points, on en déduira des relations entre rapports géométriques de vecteurs.

3. Considérons en premier lieu un triangle imaginaire $\alpha\alpha'\alpha''$, et soient, sur les côtés de ce triangle, trois

points λ, λ', λ'', tels que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{\lambda\alpha'}{\lambda\alpha''}\,\frac{\lambda'\alpha''}{\lambda'\alpha}\,\frac{\lambda''\alpha}{\lambda''\alpha'} = 1.$$

On sait, par le théorème classique de Ménélaüs, que les trois points λ, λ', λ'' sont en ligne droite.

Pour transformer ce théorème, traçons à partir d'un point O deux vecteurs, dont l'un représente l'abscisse, l'autre l'ordonnée, imaginaires, du point α. Nous obtenons ainsi deux points réels A et B. Chaque point de la figure primitive donne ainsi naissance à deux points réels, d'après le tableau

α,	A	et	B;	λ,	L	et	M;
α',	A′	et	B′;	λ',	L′	et	M′;
α'',	A″	et	B″;	λ'',	L″	et	M″.

Les points λ, α' et α'' étant en ligne droite, les triangles LA′A″ et MB′B″ sont directement semblables. On a de même les couples de triangles semblables

L′A″A et M′B″B, L″AA′ et M″BB′.

En outre, la relation (2) donne l'équipollence

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{LA'}}{\mathrm{LA''}}\,\frac{\mathrm{L'A''}}{\mathrm{L'A}}\,\frac{\mathrm{L''A}}{\mathrm{L''A'}} = 1,$$

dont voici la signification géométrique : Menons du point O deux vecteurs OC′ et OC″, équipollents respectivement à LA′ et LA″, et un troisième vecteur OC, déterminé par la condition

$$\frac{\mathrm{OC''}}{\mathrm{OC}} = \frac{\mathrm{L'A''}}{\mathrm{L''A'}}.$$

L'équipollence (3) peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{OC'}}{\mathrm{OC''}}\,\frac{\mathrm{OC''}}{\mathrm{OC}}\,\frac{\mathrm{L''A}}{\mathrm{L''A'}} = 1,$$

d'où

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{L''A}{L''A'}.$$

Autrement dit : Les triangles $LA'A''$, $L'A''A$, $L''AA'$ sont respectivement semblables aux triangles $OC'C''$, $OC''C$, OCC', formés en joignant le point O aux sommets du triangle $CC'C''$.

Réciproquement, le triangle $CC'C''$ étant quelconque, et les points L, L', L'' étant déterminés par les relations de similitude que nous venons d'indiquer, l'équipollence (3) est satisfaite.

Enfin, la conclusion du théorème de Ménélaüs se transforme en la suivante : *les triangles* $LL'L''$ *et* $MM'M''$ *sont directement semblables.*

Nous parvenons finalement à l'énoncé suivant :

Soient donnés dans un plan deux triangles quelconques $AA'A''$, $BB'B''$, *et d'autre part, un triangle* $CC'C''$ *et un point* O. *Sur les côtés du triangle* $AA'A''$ *construisons trois triangles* $LA'A''$, $L'A''A$, $L''AA'$ *directement semblables aux triangles* $OC'C''$, $OC''C$, OCC', *respectivement, on obtient ainsi trois points* L, L', L''; *au moyen du triangle* $BB'B''$ *déterminons de la même manière trois points* M, M', M''; *les triangles* $LL'L''$ *et* $MM'M''$ *sont directement semblables.*

Ou, plus brièvement :

Soient donnés, dans un plan, un triangle $CC'C''$ *et un point* O. *Sur les côtés d'un triangle quelconque* $AA'A''$, *construisons trois triangles* $LA'A''$, $L'A''A$, $L''AA'$, *directement semblables aux triangles* $OC'C''$, $OC''C$, OCC', *respectivement. La forme du triangle* $LL'L''$ *est indépendante de celle du triangle* $AA'A''$ *et dépend seulement de la forme de la figure* $OCC'C''$.

4. La seconde application est relative à un problème posé autrefois par Laguerre (¹), et dont la solution n'a pas été donnée, à ma connaissance. Voici l'énoncé de ce problème :

Déterminer dans un plan deux systèmes de neuf points conjugués

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_8, \quad a_9;$$
$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_8, \quad b_9,$$

jouissant de la propriété qu'étant pris au hasard deux couples de points correspondants a_i et b_i, a_j et b_j, il existe toujours un autre couple de points correspondants a_k et b_k et un seul, tel que les deux triangles $a_i a_j a_k$ et $b_i b_j b_k$ soient semblables.

Nous admettrons que toutes les similitudes dont il est question dans cet énoncé sont *directes :* autrement, il pourrait se présenter un très grand nombre de cas dont l'examen successif serait interminable.

En appliquant à la figure qu'il s'agit de former notre méthode de transformation, on obtiendra une figure composée de neuf points, telle que toute droite contenant deux de ces points en contient un troisième.

Or, cette dernière configuration est bien connue : c'est celle que forment les neuf points d'inflexion d'une cubique sans point double. Rappelons brièvement les relations auxquelles ces points donnent lieu.

Ils sont disposés trois par trois sur douze lignes droites (il y aura donc douze couples de triangles semblables dans la figure que nous cherchons à former) et on les construit de la façon suivante : Soit *abc* un triangle quelconque; marquons sur *bc* trois points 1, 2, 3, sur *ca*

(¹) *Nouv. Ann.*, 1865, question 793.

trois points 4, 5, 6 et sur ab trois points 7, 8, 9, les rapports de division des côtés du triangle abc par ces divers points étant indiqués dans le tableau suivant :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1b}{1c} = k, & \dfrac{2b}{2c} = \omega k, & \dfrac{3b}{3c} = \omega^2 k, \\[2ex] \dfrac{4c}{4a} = k', & \dfrac{5c}{5a} = \omega k', & \dfrac{6c}{6a} = \omega^2 k', \\[2ex] \dfrac{7a}{7b} = k'', & \dfrac{8a}{8b} = \omega k'', & \dfrac{9a}{9b} = \omega^2 k''; \end{array}\right.$$

k, k' et k'' étant trois nombres quelconques (réels ou non) satisfaisant à la relation

$$kk'k'' = 1,$$

et ω désignant une racine cubique imaginaire de l'unité. On voit immédiatement que chacune des douze triades suivantes

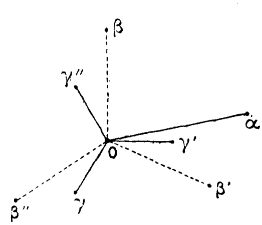
$$(5)\quad \left\{\begin{array}{llll} 1\,2\,3, & 1\,4\,7, & 1\,5\,9, & 1\,6\,8, \\ 4\,5\,6, & 2\,5\,8, & 2\,6\,7, & 2\,4\,9, \\ 7\,8\,9, & 3\,6\,9, & 3\,4\,8, & 3\,5\,7 \end{array}\right.$$

est constituée de points en ligne droite.

Cette construction est aussi générale que possible.

5. Il est aisé de transformer cette figure et de résoudre ainsi le problème de Laguerre. Pour plus de commodité, j'énoncerai tout d'abord la construction à laquelle on parvient.

On commence par construire la figure suivante :



$O\beta$, $O\beta'$, $O\beta''$ sont trois vecteurs de même longueur, faisant entre eux des angles de 120°; de même $O\gamma$, $O\gamma'$ et $O\gamma''$. De plus les sens de rotation $\beta\beta'\beta''$ et $\gamma\gamma'\gamma''$ sont opposés, ce dernier étant pris pour sens positif. Enfin le vecteur $O\alpha$ est quelconque de longueur et de direction, par rapport aux premiers.

Cela fait, on se donne arbitrairement deux triangles ABC, A'B'C', et sur leurs côtés on construit neuf couples de triangles, conformément aux indications du tableau suivant :

Ba_1C	et	$B'b_1C'$	directement semblables à	$\beta O\gamma$,
Ba_2C	et	$B'b_2C'$	»	$\beta' O\gamma'$,
Ba_3C	et	$B'b_3C'$	»	$\beta'' O\gamma''$,
Ca_4A	et	$C'b_4A'$	»	$\gamma O\alpha$,
Ca_5A	et	$C'b_5A'$	»	$\gamma' O\alpha$,
Ca_6A	et	$C'b_6A'$	»	$\gamma'' O\alpha$,
Aa_7B	et	$A'b_7B'$	»	$\alpha O\beta$,
Aa_8B	et	$A'b_8B'$	»	$\alpha O\beta'$,
Aa_9B	et	$A'b_9B'$	»	$\alpha O\beta''$.

Les systèmes $a_1a_2\ldots a_9$ et $b_1b_2\ldots b_9$ satisfont aux conditions du problème; les douze couples de triangles semblables s'obtiennent par les combinaisons d'indices portées dans le tableau (5); *enfin la construction est aussi générale que possible.*

Il suffit de quelques mots pour légitimer cette construction.

Aux couples de points (A, A'), (B, B'), (C, C') faisons correspondre, par notre transformation, trois points a, b, c. Soit de même i le point qui correspond au couple (a_i, b_i).

Il résulte de la construction que les points 1, 2, ..., 9 sont répartis trois par trois sur les côtés du triangle abc, les rapports de division étant donnés par le tableau suivant :

$$(6)\quad\left\{\begin{array}{lll}\dfrac{1b}{1c}=\dfrac{a_1B}{a_1C}=\dfrac{O\beta}{O\gamma}, & \dfrac{2b}{2c}=\dfrac{O\beta'}{O\gamma'}, & \dfrac{3b}{3c}=\dfrac{O\beta''}{O\gamma''},\\[2ex] \dfrac{4c}{4a}=\dfrac{O\gamma}{O\alpha}, & \dfrac{5c}{5a}=\dfrac{O\gamma'}{O\alpha}, & \dfrac{6c}{6a}=\dfrac{O\gamma''}{O\alpha},\\[2ex] \dfrac{7a}{7b}=\dfrac{O\alpha}{O\beta}, & \dfrac{8a}{8b}=\dfrac{O\alpha}{O\beta'}, & \dfrac{9a}{9b}=\dfrac{O\alpha}{O\beta''}.\end{array}\right.$$

Mais si l'on pose

$$\frac{O\beta}{O\gamma}=k,\qquad \frac{O\gamma}{O\alpha}=k',\qquad \frac{O\alpha}{O\beta}=k'',$$

on a d'abord

$$kk'k''=1;$$

on a de plus, en se reportant à la figure,

$$\frac{O\beta'}{O\gamma'}=\frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}O\beta}{e^{\frac{2\pi i}{3}}O\gamma}=e^{\frac{2\pi i}{3}}\frac{O\beta}{O\gamma}=\omega k,\qquad \frac{O\beta''}{O\gamma''}=\omega^2 k,$$

$$\frac{O\gamma'}{O\alpha}=\omega k',\qquad \frac{O\gamma''}{O\alpha}=\omega^2 k',$$

$$\frac{O\alpha}{O\beta'}=\omega k'',\qquad \frac{O\alpha}{O\beta''}=\omega^2 k''.$$

Ainsi, les seconds membres des neuf égalités figurant dans le tableau (6) sont identiques à ceux des égalités figurant dans le tableau (4); les points 1, 2, ..., 9 sont donc répartis par triades sur douze lignes droites, et leur système est, on le voit, aussi général que possible.

L'exactitude et la généralité de notre construction se trouvent donc établies.

Note. — J'avais rédigé l'article précédent quand j'ai appris, par le *Tableau de correspondance des questions et des solutions* annexé au numéro de février des *Nouvelles Annales*, que la question n° 793 de Laguerre avait déjà reçu une réponse (1893, p. 10*). M. Juel, auteur de cette réponse, indique en quelques mots le principe de la solution développée ci-dessus, mais sans entrer dans le détail de la construction. Il n'est d'ailleurs pas douteux que ce même principe (*à deux triangles semblables on peut faire correspondre trois points en ligne droite, et inversement*) n'ait été connu de Laguerre et ne lui ait inspiré la question 793.

C'est dire que mon article ne saurait prétendre à une complète originalité. J'ai cru cependant devoir le publier, d'abord parce que j'y ai poussé jusqu'au bout, si je ne me trompe, la solution du curieux problème de Laguerre, ensuite parce que les détails où je suis entré peuvent attirer l'attention du géomètre sur une méthode de transformation qui doit conduire à d'intéressants résultats.

R. B.

[O2qβ]

SUR LES CAUSTIQUES PAR RÉFLEXION;

PAR M. GEORGES MONNET,
Élève à l'École Centrale.

Dans ce qui suit nous ne considérerons que des rayons lumineux situés dans un même plan.

THÉORÈME DE MALUS.

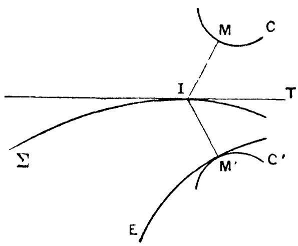
Les rayons normaux à une courbe C *et réfléchis par une courbe* Σ *ont pour anticaustique la courbe* E *telle que* $IM' = IM$.

En effet : Si une droite réfléchissante tourne autour d'un de ses points l'image d'une courbe donnée C tourne aussi autour de ce point : c'est une conséquence immédiate de la symétrie de C et de son image.

Soit donc une pareille droite roulant sur une courbe Σ, l'image réfléchie se déplace aussi et son centre instantané de rotation est à chaque instant le même que celui de la droite, c'est-à-dire le point de contact I.

Un rayon incident normal à C de M (*fig.* 1) se réflé-

Fig. 1.



chit suivant IM' normal à C' en M', par symétrie ; I étant le centre instantané il en résulte, d'après un théorème connu, que M' est un point de l'enveloppe de C'. Or IM' normale à C' est aussi normale à son enveloppe E qui devient ainsi l'anticaustique cherchée, et l'on a bien

$$IM = IM'.$$

Roulette correspondant au déplacement de l'image C'.

Le lieu du centre instantané étant la courbe Σ cette courbe est la base.

Cherchons la roulette : Soient R' son rayon de courbure en I, R celui de Σ. Lorsque le miroir tourne de l'angle $d\alpha$ on sait que l'image tourne de $2\,d\alpha$. Le miroir roulant sur Σ, on peut lui appliquer la formule de Savary et écrire

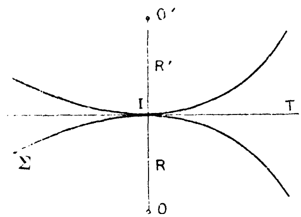
$$d\alpha = ds\,\frac{1}{R},$$

de même pour l'image

$$2\,d\alpha = ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right),$$

donc $R = R'$, et d'après le sens dans lequel doivent être comptés ces rayons de courbure (*fig.* 2), cette égalité

Fig. 2.



montre que la roulette est la symétrique de la base relativement à une tangente quelconque.

On peut arriver au même résultat sans formules de la façon suivante : Soient B la base, R la roulette ; le mouvement de l'image peut être regardé comme produit par B roulant sur sa tangente qui elle-même roulerait sur la base de façon que les deux points de contact coïncident toujours ; dans ces conditions si nous rendons mobile le plan de la figure de façon que la tangente reste fixe, les mouvements relatifs n'étant pas changés, R et B rouleront simultanément sur la tangente ; or les courbes C et C' entraînées par B et R étant toujours symétriques par rapport à la tangente il faut aussi que R et B le soient.

Centre de courbure de l'anticaustique.

Soit ω le centre de courbure de la courbe C en M ; son symétrique ω' est le centre en M' de la courbe C'.

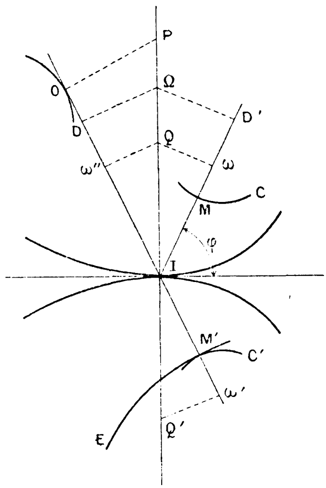
En désignant par O le centre de courbure de l'anticaustique E, on a d'après la formule de Savary

$$\frac{1}{I\omega'} + \frac{1}{\omega'O - \omega'I} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) \qquad (R = I\Omega),$$

$$(1) \qquad \frac{1}{I\omega'} + \frac{1}{IO} = \frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{2}{R}.$$

Cette formule suppose les segments $I'\omega$ et IO comptés positivement à partir de I et dans deux sens opposés (*fig.* 3); de même pour R, mais les deux centres de B

Fig. 3.



et R étant toujours symétriques le deuxième membre est toujours positif.

Conservant l'origine I, prenons un sens unique sur la droite $O\omega$; il vient, en supposant IO positif,

$$\frac{1}{IO} - \frac{1}{I\omega'} = \frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{2}{R},$$

et si nous projetons le segment $I\Omega = R$ en ID

$$\frac{1}{\overline{IO}} - \frac{1}{\overline{I\omega'}} = \frac{2}{\overline{ID}}.$$

Envisagée au point de vue métrique cette formule nous donne, en posant

$$I\omega' = I\omega = a, \qquad IO = b, \qquad ID' = ID = \frac{p}{2},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{p}.$$

Soit $I\omega'' = I\omega' = I\omega$ en valeur absolue, on a

$$\overline{I\omega''} = -\overline{I\omega'},$$

donc

$$(3) \qquad \frac{1}{\overline{IO}} + \frac{1}{\overline{I\omega''}} = \frac{2}{\overline{ID}},$$

et qui montre que I et D sont conjugués harmoniques par rapport à O et ω''.

Considérons les points P et Q de la normale NN′ qui se projetteraient en O et ω'', on a

$$\overline{IO} = \overline{IP}\sin\varphi,$$
$$\overline{I\omega'} = -\overline{I\omega''} = -\overline{IQ}\sin\varphi,$$

en portant dans la formule de Savary

$$(4) \qquad \frac{1}{\overline{IP}} + \frac{1}{\overline{IQ}} = \frac{2}{\overline{I\Omega}}.$$

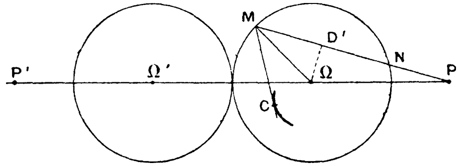
Donc P et Q sont conjugués harmoniques par rapport au point d'incidence I et au centre de courbure Ω.

Application aux miroirs sphériques.

Rayons issus d'un point lumineux. — Dans ce cas la surface caustique étant de révolution il suffit de considérer une section plane.

Point lumineux à distance finie. — Les courbes C et C′ se réduisent à des points PP′ et l'anticaustique sera engendrée par le point P′ (*fig.* 4) entraîné par le

Fig. 4.



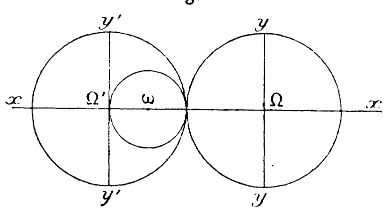
cercle Ω′ roulant sur son égal Ω.

Les points P et P′ étant toujours symétriques par rapport à la tangente commune aux deux cercles on en conclut d'après un théorème connu que P′ décrit un limaçon de Pascal. Enfin la formule (2) donne la relation classique

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{MC} = \frac{1}{MN}.$$

Point lumineux à l'infini. — Supposons le point à l'infini sur l'axe xx (*fig.* 5) les rayons peuvent être

Fig. 5.



considérés comme normaux à la droite y perpendiculaire à l'axe et l'anticaustique correspondante sera l'enveloppe de la droite y' quand le cercle Ω′ roulera sur Ω.

On sait que cette enveloppe est l'épicycloïde décrite par un cercle ω de rayon moitié de celui de Ω et roulant sur l'extérieur de ce cercle.

D'après un théorème connu la caustique qui est la développée de cette épicycloïde est une courbe du même genre. Ce théorème peut s'établir géométriquement de la façon suivante :

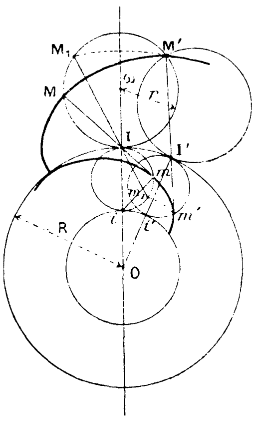
Soit le cercle ω *de rayon* r *roulant sur le cercle* O *de rayon* R, *le point* M *du cercle* ω *décrit une épicycloïde ayant pour normale en* M *la droite* MI. *Considérons sur* OI *le point* i *tel qu'on ait*

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{O}i}{\mathrm{OI}} = \frac{\mathrm{I}i}{2r} = \lambda,$$

et soient les cercles de diamètre Ii *et de rayon* Oi; *la droite* MI *rencontre le cercle* Ii *au point* m; *nous allons démontrer que si ce cercle roule sur le cercle* Oi *en entraînant* m *les trois points* M, I, m *sont toujours en ligne droite.*

En effet, soit le rayon Ii venu en I$'i'$ (*fig.* 6), M vient

Fig. 6.



en M$'$, m en m'; ramenons la figure à sa position initiale par une simple rotation autour de O, M$'$ vient en M$_1$

et m' en m_1 et l'on a

$$\text{arc}\,\text{MM}_1 = \text{arc}\,\text{II}', \qquad \text{arc}\,mm_1 = \text{arc}\,ii'.$$

Mais comme

$$\text{arc}\,\text{II}' = \lambda\,\text{arc}\,ii',$$

il en résulte

$$\text{arc}\,\text{MM}_1 = \lambda\,\text{arc}\,mm_1.$$

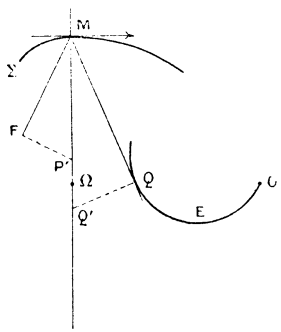
Or, les cercles ω et Ii d'après la condition (1) sont homothétiques et de rapport λ par rapport au point I; il en résulte que m' est bien sur la droite MI; ceci étant vrai pour la position Ii est vrai pour la position I$'i'$. D'autre part Im et im dans le cercle Ii sont perpendiculaires, mi étant normale à l'épicycloïde décrite par m, MmI lui est tangente, ce qui démontre le théorème.

Application des formules à la détermination de certains rayons de courbure.

Les formules précédentes qui lient les trois rayons de courbure de la courbe C, de la courbe Σ et de l'anticaustique E permettent de déterminer l'un d'eux connaissant les autres.

Soient un point F et une courbe E (*fig.* 7); consi-

Fig. 7.



dérons la courbe Σ telle qu'on ait

$$\text{MF} \mp \text{MQ} = \text{arc}\,\text{OQ} + \text{const.}$$

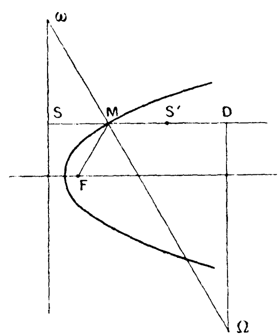
La méthode des tangentes de Roberval permet de voir immédiatement que la tangente est bissectrice des rayons vecteurs et que par conséquent un rayon issu de F, par exemple FM, se réfléchira suivant MQ. La courbe E est donc la caustique et si nous menons la perpendiculaire à FM en F, à MQ en Q, elles rencontrent la normale en I en deux points P′ et Q′ tels que le centre de courbure Ω de Σ est conjugué harmonique de M par rapport à ces points.

Ellipse ou hyperbole. — L'ellipse est un cas particulier du précédent où E se réduit à un point; P′ et Q′ se projettent au foyer et le centre de courbure est conjugué harmonique de M par rapport à ces points. Ce cas a été étudié par M. Mannheim.

Parabole. — L'anticaustique du foyer est la directrice.

Soit SM un rayon réfléchi; soit S′ le symétrique de S relativement à M; soit D la projection du rayon de courbure de la parabole (*fig.* 8).

Fig. 8.



Le rayon de courbure de l'anticaustique qui est ici une droite est infini; or la formule (3) nous apprend que S′ est conjugué harmonique de ce point par rapport à M et D; donc S′ est milieu de MD et l'on a

$$MD = 2MS.$$

Prolongeons $M\Omega$ jusqu'à sa rencontre ω avec la directrice; puisque

$$MD = 2MS$$

on a

$$M\Omega = 2M\omega,$$

qui est un théorème connu.

[O5a]

SUR LES SOLIDES DONT LE VOLUME S'EXPRIME AU MOYEN DE DEUX FORMULES ÉLÉMENTAIRES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Quand l'aire de section faite dans un solide S par un plan quelconque parallèle à un plan fixe P est une fonction entière du second ou du troisième degré de sa distance z au plan P, on connaît la formule simple qui donne le volume d'un segment de S compris entre deux plans parallèles à P : existe-t-il d'autres solides pour lesquels la formule soit applicable quand on prend arbitrairement les distances des bases du segment au plan P? J'ai répondu négativement dans le numéro de juillet 1895, mais en particularisant la forme de la fonction $\varphi(z)$ qui exprime l'aire d'une section : il est facile de lever toute restriction sur la forme de $\varphi(z)$. On doit avoir, quels que soient x et y,

$$(1) \quad \int_{x-y}^{x+y} \varphi(z)\,dz = \frac{y}{3}[\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+4\varphi(x)];$$

différentiant deux fois par rapport à x, on a

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi'(x+y)-\varphi'(x-y) \\ \quad = \frac{y}{3}[\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+4\varphi''(x)]. \end{cases}$$

Différentiant au contraire (1) deux fois par rapport à y, après avoir d'abord multiplié par 3, on trouve, avec de simples réductions,

$$\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)=y[\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)].$$

La comparaison avec (2) donne l'équation fonctionnelle de forme connue

$$\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)=2\varphi''(x);$$

d'ailleurs, si on la différentie par rapport à y, on voit que $\varphi'''(x+y)$ doit être égal à $\varphi'''(x-y)$: c'est dire que $\varphi'''(z)$ doit être constant et $\varphi(z)$ un polynome du troisième degré.

Si l'on fait varier seulement la hauteur du segment considéré, en laissant fixe la section moyenne dont on peut supposer le z nul, on trouve que $\varphi(z)$ doit être un trinome du second degré augmenté d'une fonction impaire quelconque de z.

Lorsque S est un cône, le volume du segment ou tronc est donné par une formule encore plus élémentaire; cette formule est-elle applicable à des segments de solides pour lesquels $\varphi(z)$ n'aurait pas la forme simple $A^2(z-c)^2$ qui convient au cône? Non encore. Remplaçant $\varphi(z)$ par $F^2(z)$, on devrait avoir, quels que soient x et y,

$$\int_x^y F^2(z)\,dz = \frac{y-x}{3}[F^2(x)+F^2(y)+F(x)F(y)].$$

Multiplions par 3 et différentions par rapport à y : le résultat peut s'écrire

$$2F^2(y) - F(x)F(y) - F^2(x)$$
$$= (y-x)[2F(y) + F(x)]F'(y);$$

on peut diviser par $2F(y) + F(x)$, et il reste

$$F(y) - F(x) = (y-x)F'(y).$$

La différentiation relative à x eût donné de même

$$F(x) - F(y) = (x-y)F'(x).$$

$F'(x)$ et $F'(y)$ doivent donc être égaux, donc constants; $F(z)$ est de la forme $A(z-c)$ et $\varphi(z)$, $A^2(z-c)^2$, comme dans le cône.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1900. — COMPOSITIONS.

Nancy.

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une sphère homogène et pesante, de diamètre égal à* 1^m, *se meut dans un fluide incompressible, homogène, pesant, indéfini, en repos à l'infini. La densité de la sphère est égale à* 2, *celle du fluide est égale à* 1. *A l'instant initial, le centre* A *de la sphère est animé d'une vitesse horizontale* A_0V_0 *de* 2^m *par seconde, et la sphère est animée d'un mouvement de rotation qui lui fait faire* 30 *tours par minute dans le sens direct autour de la zénithale passant par* A_0; *il n'y a pas de tourbillon dans le fluide.*

A quel instant le centre A *de la sphère se sera-t-il abaissé de* $10^m,2$? *Quelle est la position de* A *par rapport à* A_0 *à cet instant ? Quel est l'état des vitesses du solide et du fluide à cet instant ?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Sur l'une des bases d'un cylindre droit à base circulaire est soudé par sa grande base un tronc de cône ; sur l'autre base du cylindre est soudé par sa section équatoriale un demi-ellipsoïde de révolution, les trois corps sont homogènes. La hauteur du cylindre est égale au diamètre de ses bases ; sa masse est de* 25^{kg} *et sa densité de* 7,7 ; *la hauteur du tronc de cône est égale aux* $\frac{3}{8}$ *du diamètre de sa grande base, sa masse est de* $3^{kg},9$ *et sa densité de* 5,5 ; *le demi-axe de l'ellipsoïde de révolution dirigé suivant le prolongement de l'axe du cylindre est égal à la hauteur du tronc de cône et sa masse est de* 5^{kg}.

Évaluer le moment d'inertie du solide total par rapport à une génératrice du tronc de cône.

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on considère dans le plan* xOy *la parabole* (P) *définie par l'équation*

$$y^2 = 2p(x-h).$$

1° *Former l'équation de la surface* (E) *enveloppe d'une sphère variable* (Σ) *passant par l'origine et dont le centre décrit la parabole* (P). *Étudier la section de* (E) *par le plan* xOy, *et la surface inverse de* (E) *en prenant pour centre d'inversion l'origine et pour module le carré du paramètre de* (P).

2° *Soit* (S) *une sphère tangente à l'origine au plan* xOy ; *démontrer que le cercle suivant lequel* (Σ)

touche (E) *est orthogonal à* (S), *et que* (E) *et* (S) *se coupent orthogonalement en tous les points de leur intersection. Lignes de courbure de la surface* (E).

3° *Dans quel cas les deux familles de lignes de courbure de* (E) *se composent-elles de cercles? Déterminer la deuxième famille de sphères dont* (E) *est l'enveloppe, et trouver le lieu des centres de ces sphères.*

II. *On considère la surface engendrée par une droite* G *s'appuyant sur deux droites rectangulaires non concourantes et faisant un angle constant avec l'une d'elles; déterminer les trajectoires orthogonales des génératrices* G.

Épreuve pratique. — III. *On donne une parabole* (P) *dans un plan horizontal; un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est de* 45° *se déplace de façon que son axe reste vertical et que son sommet décrive la parabole* (P). *Déterminer l'enveloppe de ce cône, ainsi que l'arête de rebroussement et les lignes de courbure de cette enveloppe. Construire la projection horizontale de la section de la surface enveloppe ainsi définie par un plan parallèle au plan de la parabole* (P) *et dont la distance à ce plan est égale au double du paramètre de la parabole.*

I. La surface (E) a pour équation

$$x(x^2+y^2+z^2)+py^2-2hx^2=0;$$

elle est anallagmatique; son inverse est un cylindre et sa section par le plan des xy est la podaire de la parabole (P); ses lignes de courbure sont les cercles caractéristiques et les courbes suivant lesquelles elle est coupée par les sphères (S); elle est une cyclide de Dupin si l'origine est foyer de la parabole (P); le lieu des centres des sphères de la deuxième famille inscrites dans la surface est la parabole focale de la première.

II. Si l'on prend comme axe des z la droite avec laquelle G fait un angle constant, et si $z = 0$, $x = 0$ sont les équations de l'autre droite, la projection d'une trajectoire orthogonale des droites G sur le plan des xy a pour équation

$$\rho = \frac{a \cos^2 \alpha}{\cos \theta} + c,$$

ρ et θ étant les coordonnées polaires d'un point, α l'angle constant donné, c une constante arbitraire.

III. L'enveloppe est une surface développable dont les génératrices font 45° avec le plan horizontal et se projettent suivant les normales à la parabole (P). Les lignes de courbure sont les génératrices et les lignes de niveau.

Astronomie.

Épreuve écrite. — I. *Expliquer comment on détermine les quatre éléments qui définissent le plan, la forme et l'orientation de l'ellipse décrite par la Lune autour de la Terre.*

II. *Soient* O, A, A′ *trois points matériels de masses* 1, m, m', *s'attirant suivant la loi de Newton; les données initiales sont telles que les mouvements non troublés de* A *et de* A′ *par rapport à* O *soient les mouvements elliptiques; on désignera par* a, a', e, e', ϖ, ϖ', n, n' *les demi-grands axes, les excentricités, les longitudes des périhélies et les moyens mouvements de* A *et de* A′ *dans ces mouvements non troublés, à* $t = 0$.

On sait que, en négligeant les carrés des masses m,

m' et les produits de ces masses par les carrés des excentricités e et e' et des inclinaisons, l'excentricité e_t du mouvement elliptique auquel le mouvement troublé de A *est tangent à l'instant t peut être représentée, pour des valeurs suffisamment petites de t, par la formule*

$$e_t = e + ane'm\mathrm{C}t\sin(\varpi - \varpi'),$$

où C *désigne une fonction symétrique de a et a'.*

Ceci posé, on demande d'évaluer une limite supérieure que ne peut atteindre e_t pendant le temps dans lequel on peut envisager la formule précédente comme exacte, et d'effectuer les calculs numériques en prenant pour les constantes relatives à A *et* A', *pour $t = 0$, les valeurs fournies par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes *pour Jupiter et Mars.*

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES PROPOSÉE EN 1900 AU CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES;

PAR M. ERNEST DUPORCQ.

1° On sait que, pour qu'il existe au moins une quadrique indécomposable passant par une droite et une conique, il faut et suffit que la droite coupe la conique sans être dans son plan; corrélativement, pour qu'il existe au moins une quadrique indécomposable passant par une droite D et inscrite à un cône C, il faut et il suffit que D touche C sans passer par son sommet. Par suite, dans le cas actuel, D devra être contenue dans l'un des plans xOy ou xOz, sans passer par O.

2° D étant ainsi choisie, par exemple, dans le plan xOy, toutes les quadriques S qui répondent à la question forment un réseau tangentiel, et le lieu de leurs centres doit bien être un plan P. Il est facile à déterminer : soit, en effet, R le plan tangent au cône C, qu'on peut, outre xOy, mener parallèlement à D; toutes les quadriques S touchent ce plan, et aussi, bien évidemment, le plan parallèle issu de D : leurs centres sont donc dans le plan P, parallèle à R et équidistant de ce plan et de la droite D.

3° Le plan P étant ainsi parallèle à un plan R tangent au cône C, s'il est assujetti à contenir un point fixe A, il enveloppera évidemment le cône homothétique à C et dont A est le sommet. Quant à la droite D, soit D' sa symétrique par rapport au point A; elle est dans le plan U, symétrique de xOy relativement à A, et elle est aussi, d'après la seconde partie, dans le plan R tangent à C : l'enveloppe de D' est donc la section de C par le plan U, c'est-à-dire une parabole Q', dont la symétrique Q, par rapport à A, constitue l'enveloppe de D.

4° Il n'existe qu'un plan U, parallèle à xOy, et tel que la parabole Q', suivant laquelle il coupe C, ait un paramètre donné : il en résulte que, pour que Q admette ce paramètre fixe, A doit se trouver dans le plan équidistant des plans U et xOy.

5° Soit Π un plan tangent à une quadrique S inscrite à C et contenant D; ce plan contient une génératrice Δ de S, qui s'appuie sur D; or, cette génératrice doit aussi toucher C : c'est donc la trace sur le plan Π du plan tangent à C, autre que xOy, qu'on peut mener par le point où D perce le plan Π. Cette droite Δ est donc commune à toutes les quadriques S qui touchent le plan Π.

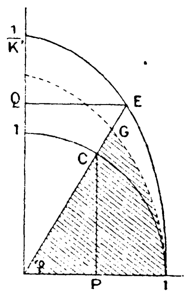
Si Π se déplace arbitrairement, la congruence des droites Δ est formée des tangentes au cône C qui s'appuient sur D. Il en passe évidemment deux par tout point de l'espace : elles rencontrent D dans les plans tangents à C issus de ce point.

Enfin si Δ reste dans un plan fixe issu de D, elle touche la section de C par ce plan, et c'est évidemment cette conique qui constitue alors l'enveloppe du plan Π.

CORRESPONDANCE.

M. **E.-M. Lémeray.** — *Au sujet des fonctions* $\sin_e$, $\cos_e$ *de M. Iaggi.* — Voici une remarque, qui paraît intéressante et utile, sur les fonctions de M. Iaggi :

Soient un cercle C de rayon 1, et une ellipse concentrique E d'axes 1 et $\frac{1}{k'}$ $(k^2+k'^2=1)$. Soit G la courbe dont le rayon



vecteur est moyen proportionnel entre ceux du cercle et de l'ellipse; si j'appelle x le double de l'aire ombrée, on aura :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ordonnées de C} = \operatorname{sn} x\\ \text{Abscisses de E} = \cos_e x\end{array}\right\}\ \text{Fonctions Iaggi.}$$

En effet G a pour équation $\rho = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-k^2\sin^2\varphi}}$, l'aire ombrée est la moitié de $x = \displaystyle\int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$. Donc

$$CP = \sin\varphi = \sin \operatorname{am} x = \operatorname{sn} x,$$

on trouve ensuite

$$EQ = \frac{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

donc

$$\text{EQ} = \sqrt{\frac{1 - \text{sn}^2 x}{1 - k^2 \text{sn}^2 x}} = \cos_e x,$$

on voit immédiatement les dégénérescences pour $k' = 1$.

M. **E. Iaggi.** — *Au sujet des fonctions* $\sin_e$, $\cos_e$. — La remarque de M. Lémeray sur les fonctions

$$u_x = \sin_e x = \text{sn}\,x, \qquad v_x = \cos_e x = \text{sn}\,(k + x),$$

que vous avez bien voulu me communiquer, est intéressante par elle-même, et pourrait devenir utile pour l'édification d'une théorie *élémentaire* des fonctions elliptiques; car, non seulement elle donne une représentation géométrique simple de ces fonctions, mais encore elle fournit, au moins dans le cas des variables réelles, une démonstration simple de ce fait que les fonctions u_n, v_n, sont uniformes. Cette démonstration n'obligerait pas, comme celles qui reposent sur l'équation différentielle

$$u'_x = \sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)},$$

à recourir aux notions les plus élevées de la Science.

M. **H. Brocard.** — Comme addition à la référence bibliographique donnée page 93 (**1901**) par M. d'Ocagne, je signalerai, dans le Volume cité de **1884**, p. 438-440, la solution complète, par M. E. Fauquembergue, de la question 1360 proposée en 1881, par M. P. Barbarin :

Trouver les trajectoires orthogonales d'une droite de longueur constante mobile entre deux axes rectangulaires.

C'est précisément le problème étudié par M. E. Collignon (**1900**, p. 433-442).

Les courbes considérées dans cette Note sont des épicycloïdes ou des hypocycloïdes et leurs courbes parallèles.

J'ai indiqué (**1885**, p. 144-147) plusieurs articles à leur sujet, et aujourd'hui il y a lieu d'y ajouter :

E. Collignon. — *Sur la cubature des solides de révolution* (A.F.A.S. Congrès d'Alger, 1881, p. 196-225; *voir* p. 219).

E. Cesàro. — *Remarques sur un article de M. d'Ocagne* (**1885**, p. 256-264) (cité par M. d'Ocagne, p. 93; **1901**).

M. **Ph. du Plessis.** — « ... Un signe mal interprété à côté d'un croquis grossier jeté sur le brouillon de la solution du problème d'admission à l'École Polytechnique en 1900 m'a fait commettre dans la mise au net que je vous ai communiquée pour l'insertion dans les *Nouvelles Annales* (3^e série, t. XIX, p. 320) un lapsus qui s'est traduit par une erreur sur la *fig.* 2 *bis*.

A la page 332, septième ligne, *au lieu de* « nécessairement parallèles aux asymptotes », *il faut* « nécessairement distinctes des parallèles aux asymptotes », ce qui est d'ailleurs évident pour une raison donnée à la page précédente, et la *fig.* 2 *bis* doit être modifiée en conséquence... »

BIBLIOGRAPHIE.

Histoire abrégée de l'Astronomie; par M. *Ernest Lebon,* Agrégé de l'Université, Professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne. Un volume petit in-8, caractères elzévirs, avec 16 portraits et une Carte céleste; titre en deux couleurs. Gauthier-Villars, 1899. Prix : 8 fr.

En signalant, l'un des premiers, l'*Histoire abrégée de l'Astronomie,* par M. E. Lebon, dans notre *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires* (Paris, 15 juillet 1899), nous avons fait remarquer que « ce Livre, écrit dans un style simple, toujours clair, même dans l'exposition des travaux d'Astronomie mathématique, est le résultat de recherches minutieuses faites dans les Ouvrages originaux, qu'il sera lu avec plaisir par tous ceux qui s'intéressent aux progrès des Sciences et sera un très utile complément du Cours de Cosmographie (ou d'Astronomie élémentaire) dans les classes de Rhétorique, de Mathématiques élémentaires, de Seconde et de Première modernes ». Après notre article, plus de trente analyses élogieuses, parues dans des journaux français et étrangers, ont aussi contribué à faire connaître le consciencieux travail de M. E. Lebon. Aussi pensons-nous qu'au lieu de donner dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* une appréciation personnelle de cette *Histoire*, il sera plus intéressant pour le lecteur et plus avantageux pour le Livre de présenter des extraits des principales analyses parues jusqu'ici.

Puisons d'abord dans deux des articles qui indiquent le plus complètement le plan, le but et l'utilité du Livre de M. E. Lebon :

« Cet ouvrage est construit d'après un plan original qui le distingue des ouvrages précédents sur la matière, publiés en France tout au moins....

« Dans son livre, au contraire, M. E. Lebon s'est proposé surtout de donner les biographies des principaux astronomes et géodésiens, depuis l'antiquité jusqu'à nos jours. Les biographies sont assez complètes et énumèrent les principaux détails de leur vie, les circonstances qui les ont engagés dans leurs recherches scientifiques, et enfin un résumé succinct de leurs travaux les plus importants....

» L'ordre chronologique des naissances règle la succession des biographies. Cependant cet ordre suivi strictement aurait entraîné la confusion, surtout pour les astronomes de notre époque, qui en général, dans cette science spéciale qui est l'Astronomie, ont une spécialité, c'est-à-dire une branche particulière à laquelle ils s'adonnent exclusivement. Très sagement l'auteur a divisé son domaine en trois grandes parties : période ancienne, période moderne, période contemporaine, et ensuite chaque période en plusieurs Chapitres qui correspondent aux diverses branches de l'Astronomie, le nombre des Chapitres étant le plus grand dans la période contemporaine. Or l'ordre chronologique des naissances est suivi seulement dans chaque Chapitre. Le lecteur, pour chaque branche de l'Astronomie, peut donc mesurer la part exacte de chaque astronome dans le résultat et en même temps suivre les progrès successifs plus ou moins rapides de cette branche, pendant un long espace de temps. D'ailleurs, au commencement de plusieurs Chapitres, l'auteur ajoute un résumé bref de la question et de ses préliminaires, et prépare le lecteur à la nomenclature des résultats obtenus par les astronomes successifs qui l'ont étudiée.

» Ce livre peut donc, à juste titre, être appelé une Histoire de l'Astronomie. Il est heureusement complété par une Table alphabétique des auteurs cités dans l'Ouvrage, avec l'indication des pages qui les concernent, et avec l'addition de nombreux détails non insérés dans la biographie elle-même.

» ... Il fournit des renseignements fort utiles et très commodes à trouver. Il doit être recommandé à tous ceux qui veulent faire un voyage, complet ou restreint, dans le domaine de l'Astronomie. » (H. Deslandres, Astronome titulaire à l'Observatoire physique de Meudon. *Bulletin astronomique*, publié par l'Observatoire de Paris, décembre 1900.)

... « La période ancienne se trouve rapidement traitée et l'exposition s'attache davantage à la découverte de la vitesse de la lumière, à la théorie des tourbillons, à la forme de la Terre, à l'attraction universelle, à la Mécanique céleste, à l'Astronomie physique, à la Géodésie et à la Météorologie. Tous les grands problèmes de l'univers sont exposés d'une façon lumineuse, en citant les diverses étapes créées par les différents savants; ceux qui vivent ont, comme les autres, leur biographie, et l'on peut se renseigner immédiatement dans le livre, bien illustré, et dans des Tables, fort bien faites, sur les préoccupations astronomiques passées, les perfectionnements et les besoins de la Science actuelle. » (Jean Mascart, Aide-Astronome à l'Observatoire de Paris. *Revue encyclopédique*, 29 décembre 1900.)

Citons encore quelques lignes tirées d'autres articles écrits dans le même ordre d'idées :

... « Son livre donne l'exposé méthodique, siècle par siècle, génération par génération, des progrès de l'Astronomie depuis sa naissance....

» Le livre de M. E. Lebon suit ce progrès pas à pas. Il ne peut tout dire dans la forme résumée qu'il a choisie, mais il dit tout l'essentiel. » (E. Durand-Gréville, *Journal de Saint-Pétersbourg*, 12 août 1899.)

... « L'ouvrage s'adresse donc aux professeurs et aux élèves des Cours d'Astronomie, et aux personnes qui s'intéressent aux progrès de la plus belle et de la plus attrayante des Sciences.

» ... L'auteur s'attache surtout à la Période moderne, qu'il fait dater de Copernic et qu'il prolonge jusqu'au milieu du XIX^e siècle, et à la Période contemporaine : Ces deux parties, qui occupent l'ouvrage presque tout entier, sont intéressantes et généralement bien renseignées. » (I. T., *Revue bibliographique belge*, 31 août 1899.)

... « Non seulement les personnes versées dans l'Astronomie devraient accueillir ce livre avec empressement dans leur bibliothèque, mais aussi ceux qui s'intéressent au progrès de cette Science, la plus ancienne des Sciences, parcourront ces pages avec profit. » (*Nature*, London, 5 octobre 1899.)

« Cet ouvrage est le résumé d'une dizaine d'années de recherches. Il rendra service à tous ceux qui ont à enseigner la Cosmographie ou à perfectionner leurs connaissances astronomiques....

» On ne peut que savoir gré à l'Auteur d'avoir mis entre les mains de tous un livre utile dont la lecture ne présente pas plus de difficultés que celle d'une histoire quelconque. » (*Le Cosmos*, 14 octobre 1899.)

« En ce livre dégagé de tout calcul et de toutes théories, l'auteur, en un langage accessible à tous, donne un exposé des plus complets des grandes découvertes et des travaux importants accomplis en Astronomie depuis les temps anciens jusqu'à nos jours.

» ... Cette Histoire constitue donc un livre du plus haut intérêt et qui a sa place indiquée dans toutes les bibliothèques. » (GEORGES VITOUX, *Le Rappel* et *le XIXe Siècle*, 26 novembre 1899.)

« L'Astronomie moderne, la Mécanique céleste, la Géodésie et la Météorologie sont traitées abondamment en 200 pages.... L'exposition est précise et intéressante. Des Tables de matières détaillées, faites à divers points de vue, augmentent l'utilité de l'Ouvrage. » (L. *Litterarisches Centralblatt*, n° 31, Leipzig, août 1900.)

Les extraits suivants de trois autres analyses montrent que l'Ouvrage de M. E. Lebon a de solides qualités de style et qu'il est remarquable au point de vue typographique :

« Voici un livre qui n'est pas banal et auquel son intérêt, mis encore en relief par une forme littéraire élégante, vaudra, nous n'en doutons pas, un légitime succès. Il est composé avec compétence. » (R. GUIMARÃES. Membre de l'Académie Royale des Sciences de Lisbonne. *Enseignement mathématique*, Paris, 15 juillet 1900.)

« D'abord ce livre est beau. Non seulement il ne fatigue pas les yeux, mais encore il les régale, grâce au papier, aux illustrations, aux ornements typographiques distribués avec goût....

» Le livre de M. E. Lebon, malgré son titre modeste, est aussi un bon livre ; il est clair, sobre et précis. C'est le fruit de recherches minutieuses, faites aux sources. » (A. REBIÈRE, Agrégé de Mathématiques. *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, Paris, 31 décembre 1899.)

« C'est un excellent petit Ouvrage qui unit à son impression soignée en caractères elzéviriens beaucoup d'attrait et d'intérêt, non seulement pour les personnes qui s'occupent spécialement de la belle Science dont il traite, mais aussi pour beaucoup d'autres, grâce au style agréable et clair avec lequel il est écrit. » (*Memorias y Revista de la Societad cientifica* ANTONIO ALZATE; nos 11 et 12, 1898-1899.)

On voit donc que cette *Histoire* a été l'objet de bien des appréciations flatteuses et qu'elle a été chaudement recommandée par des astronomes, des professeurs et des publicistes aux jeunes étudiants et aux gens du monde. Nous ne voudrions pas terminer notre compte rendu sans dire que ce Livre a attiré l'attention de plusieurs corps savants : ainsi, il a été présenté à l'Académie des Sciences de Paris par un de ses membres, M. C. WOLF; apprécié devant la Société Astronomique de France par son Secrétaire général, M. C. FLAMMARION; signalé à la Société Royale Astronomique de Londres par son Président, M. G.-H. DARWIN; et sans faire remarquer qu'il a été inscrit sur les Catalogues des livres de bibliothèques et de prix et honoré de souscriptions du Ministère de l'Instruction publique et de la Ville de Paris.

L. GÉRARD,
Docteur ès Sciences,
Professeur au Lycée Charlemagne.

LA RECENTE GEOMETRIA DEL TRIANGOLO, per il Prof. *Cristoforo Alasia*. Lapi, Citta di Castello; 1900. Prix : 3 lire.

Ce Livre est le premier Ouvrage qui soit consacré uniquement à la Géométrie du triangle; il répond à un véritable besoin, car il était difficile d'arriver à connaître l'ensemble des résultats acquis depuis la création de ce nouveau rameau de la Mathématique, puisque depuis 1873, époque où il a pris naissance, et notamment depuis que son autonomie s'est affirmée, ces résultats étaient éparpillés dans les périodiques mathématiques de tous les pays, à part quelques résumés fort intéressants, mais nécessairement incomplets.

L'exposition, faite d'une façon élémentaire, est claire; ce texte est compris aisément même par un lecteur qui n'est nullement familiarisé avec la langue italienne. Le titre du Livre suffit pour que les mathématiciens sachent les sujets qu'ils y trouveront développés dans (l'analyse desquels il est impossible d'entrer ici); nous approuvons l'auteur d'y avoir introduit des notions de Géométrographie; si cette science n'est pas à proprement parler du domaine spécial de la Géométrie du triangle, elle y trouve tant d'applications qu'on doit l'exposer en même temps.

Il est curieux que l'Italie, pays où la Géométrie du triangle a donné lieu à moins de travaux créateurs que les autres, soit précisément celui qui en présente le premier Traité didactique. L'éditeur nous l'explique un peu en mettant en tête du Livre une carte du regretté Beltrami dans laquelle ce dernier l'engage à publier un Ouvrage sur cette nouvelle et intéressante matière. C.-A. L.

QUESTIONS.

1911. Étant donnés un tétraèdre $P_1 P_2 P_3 P_4$ et un point P dans l'espace, on mène par ce point un rayon g que l'on projette orthogonalement sur les faces du tétraèdre. Montrer que le lieu de la droite g, telle que ses quatre projections appartiennent à une congruence linéaire singulière, c'est-à-dire admettent une transversale unique, à savoir le rayon g lui-même, est un cône du quatrième ordre contenant les vingt droites suivantes :

1° Les rayons qui vont du point P aux sommets du tétraèdre;

2° Les perpendiculaires abaissées du point P sur les faces;

3° Les perpendiculaires abaissées du point P sur les arêtes;

4° Les intersections des plans menés par le point P, d'une part perpendiculairement à une arête et d'autre part par l'arête opposée.

Quand le point P se déplace dans l'espace, les génératrices du cône correspondant engendrent un complexe du quatrième ordre qu'on pourrait, suivant la proposition de M. Neuberg, appeler *complexe de Simson*. (J. Franel.)

ERRATA AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 6; log 10475, *au lieu de* 1540, *lisez* *1540.

AVIS RELATIF AUX CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES ». CONCOURS DE 1901.

L'expérience des concours, que les *Nouvelles Annales* ont tentée depuis 1896, a donné d'heureux résultats. Mais elle a en même temps révélé la nécessité d'une modification que nous résumons d'un mot, en disant que désormais il y aura chaque année UN concours au lieu de deux. La cause essentielle de cette modification est l'abondance des matériaux que reçoit la Rédaction. L'obligation de publier presque à date fixe deux Mémoires chaque année, Mémoires souvent assez longs, nous oblige à faire attendre trop longtemps l'insertion d'articles intéressants. Cela nous empêche aussi de donner aux questions et solutions la place que normalement elles devraient occuper.

D'autre part, les collaborateurs des *Nouvelles Annales* sont pour la plupart absorbés par des obligations professionnelles; et plusieurs nous ont souvent exprimé le désir d'avoir un plus long délai, en ce qui concerne les concours.

M. Gauthier-Villars, notre éditeur, a partagé l'avis de la Rédaction. Mais il a tenu à reporter sur le concours unique l'avantage qu'il consentait pour les deux concours réunis. Le Mémoire récompensé donnera donc droit à un crédit de DEUX CENTS FRANCS d'Ouvrages (au lieu de 100 francs) à choisir dans le catalogue de M. Gauthier-Villars.

Les autres conditions du concours restent d'ailleurs les mêmes.

En ce qui concerne le premier concours pour 1901, dont le sujet a été publié (**1900**, p. 481), il devient applicable à l'année 1901 entière. En conséquence, la date limite d'envoi des manuscrits, fixée au 15 mai prochain, est prorogée, et reportée au 1^er^ NOVEMBRE 1901.

D'ici quelques mois, nous espérons pouvoir publier le sujet du concours de 1902.

[D5d]

SUR LES NOTIONS DE FONCTION COMPLÈTE ET DE FONCTION PÉRIODIQUE;

PAR M. E. IAGGI.

---

1. Pour étudier une fonction Y d'une variable X, on a coutume de choisir, parmi les valeurs de Y déterminées par une valeur x de X, une certaine valeur y dont on suit les variations lorsque x varie; on obtient ainsi des fonctions uniformes que l'on peut classer immédiatement en deux catégories distinctes :

1° Les fonctions uniformes *sans points critiques*, qui n'ont pas d'autres singularités que des singularités essentielles (il n'y a pas lieu de distinguer ici les pôles d'une manière spéciale); c'est le cas où la fonction Y est *univoque*.

2° Les fonctions uniformes qui ont des points critiques, c'est-à-dire qui ne sont réellement *uniformes* que sur une surface de Riemann convenablement choisie; car si l'on fait varier x dans un même plan, d'un point x_0 quelconque à un point x_1 quelconque (non singuliers essentiels), la variation correspondante de y n'est pas univoque, mais dépend du chemin suivi, de x_0 à x_1, par la variable x; c'est le cas où la fonction Y a plusieurs valeurs.

Riemann n'a d'ailleurs inventé ses surfaces à feuillets que dans le but d'appliquer aux différentes valeurs d'une fonction multiforme les procédés d'étude employés à l'égard des fonctions uniformes sans points critiques.

Or, il est quelquefois utile, nécessaire même, d'envisager, non pas l'une des valeurs d'une fonction multiforme Y de x, répondant à une valeur de x, mais l'*ensemble de toutes ces valeurs*.

2. Soit

$$D_x(Y)$$

l'ensemble des points y correspondant à une valeur donnée x de la variable. Nous dirons que $D_x(Y)$ est la *détermination*, pour la valeur donnée x de la variable, de la fonction *complète* Y de X.

Les différents points y, variables avec x, dont l'ensemble constitue la détermination $D_x(Y)$, sont fonctions de x; mais chacune de ces fonctions n'est *qu'une partie* de la fonction *complète* Y : nous désignerons ces fonctions par le nom de *fonctions partielles*.

Plusieurs de ces fonctions partielles y, parties d'une même fonction complète Y, deviennent égales en certains points x; ces points sont, à l'égard des fonctions partielles qui y deviennent égales, des points *critiques :* si x passe par un de ces points, l'une des fonctions partielles, y_1 par exemple, pourra être continuée par l'une quelconque des fonctions partielles y_2, y_3, ..., qui deviennent égales à y_1 en ce point; si x décrit un contour fermé enfermant un de ces points, les fonctions partielles qui sont égales en ce point *se permutent entre elles,* mais l'ensemble n'a pas changé : la détermination $D_x(Y)$ de la fonction *complète* Y n'a pas varié.

Les points critiques des fonctions partielles y ne sont donc pas des points critiques à l'égard de la fonction complète : ce sont des points *multiples*, en ce sens que le nombre des valeurs distinctes y de Y est moindre en ces points qu'en des points ordinaires, points doubles si deux des valeurs de Y y sont égales, points triples si trois des valeurs de Y y sont égales, etc.

Ces points sont encore remarquables à d'autres égards : supposons que n des fonctions partielles y dont se compose Y prennent la valeur β lorsque x est en un point critique α de ces n fonctions : si x est infiniment voisin de α, les valeurs correspondantes

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

des n fonctions partielles considérées seront *infiniment voisines* de β, et, par suite, infiniment voisines entre elles. (Nous supposons, bien entendu, que la fonction complète Y, c'est-à-dire chacune des fonctions partielles dont elle se compose, est continue.)

Ajoutons enfin qu'on pourra considérer n des fonctions partielles qui composent la fonction complète Y comme formant *une fonction partielle multiforme*. Cette considération est particulièrement utile lorsque ces n fonctions, *à l'exclusion* des autres, deviennent égales en α.

Éclaircissons tout ceci par des exemples.

Considérons d'abord la fonction complète

$$\sqrt[3]{x},$$

qui a trois valeurs et que nous écrirons ainsi

$$Y = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\sqrt[3]{x},$$

où λ_1, λ_2, λ_3 sont les racines cubiques de l'unité, et $\sqrt[3]{x}$ l'une quelconque des trois valeurs de Y.

En dehors du point multiple zéro, Y se décompose en trois fonctions partielles uniformes

$$y_1 = \lambda_1 \sqrt[3]{x}, \qquad y_2 = \lambda_2 \sqrt[3]{x}, \qquad y_3 = \lambda_3 \sqrt[3]{x},$$

pour lesquelles le point zéro est un point critique.

Considérons maintenant la fonction complète

$$\sqrt[3]{x-a} + \sqrt[5]{x-b},$$

que nous écrirons ainsi

$$Y = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\sqrt[3]{x-a} + (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)\sqrt[5]{x-b},$$

où les λ sont les racines cubiques de l'unité et les μ les racines cinquièmes de l'unité. Cette fonction complète, dont la détermination comprend quinze points, se décompose, en dehors de ses points multiples a et b, en quinze fonctions partielles uniformes

$$y_{i,j} = \lambda_i \sqrt[3]{x-a} + \mu_j \sqrt[5]{x-b}$$
$$(i = 1, 2, 3, \; j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Le point multiple a est, pour Y, un point triple; le point multiple b est un point quintuple.

La fonction Y peut également être décomposée en trois fonctions partielles multiformes ayant chacune cinq valeurs

$$u_j = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\sqrt[3]{x-a} + \mu_j \sqrt[5]{x-b} \qquad (j = 1, 2, 3, 4, 5),$$

ou en cinq fonctions partielles multiformes ayant chacune trois valeurs

$$v_i = \lambda_i \sqrt[3]{x-a} + (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)\sqrt[5]{x-b} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Le point a est un point multiple (triple) pour les fonctions partielles u_j et un point critique pour les fonctions partielles v_i; le point b est un point critique pour les fonctions partielles u_j et un point multiple (quintuple) pour les fonctions partielles v_i : les fonctions u_j

se permutent entre elles lorsque x décrit un contour fermé autour du point b et reprennent la même détermination lorsque x décrit un contour fermé autour du point a; les fonctions v_i se permutent entre elles lorsque x décrit un contour fermé autour de a et reprennent la même détermination lorsque x décrit un contour fermé autour de b.

3. Nous devons encore faire la remarque suivante, qui précisera la nature d'une fonction *complète :*

Soit y_1 une fonction partielle uniforme, partie d'une fonction complète Y.

En faisant suivre à x différents contours fermés, y_1 prend différentes valeurs

$$y_2, \quad y_3, \quad \ldots$$

lorsque x est revenu à son point de départ. Si l'on considère *tous les contours fermés possibles dont le point de départ est un point ordinaire* x_0, et si

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n, \quad \ldots$$

sont toutes les fonctions partielles obtenues, l'ensemble de ces fonctions formera une fonction *complète* Y_1, car cette fonction Y_1 reprendra la *même détermination* lorsque x reviendra en x_0 après avoir parcouru un chemin quelconque.

Si alors cette fonction complète Y_1 n'est pas identique à la fonction complète Y, d'où nous avons tiré y_1, la fonction Y *est décomposable en au moins deux fonctions complètes dont l'une est* Y_1.

Il est d'ailleurs évident qu'on pourra considérer, dans quelques problèmes, l'ensemble de *plusieurs fonctions complètes;* mais, dans ce cas, nous dirons que la fonction considérée est *une fonction composée,* et nous réserverons le nom de fonctions *complètes* aux fonctions indécomposables en d'autres fonctions n'ayant pas de points critiques ou n'ayant que des points multiples.

Ainsi, par exemple, la fonction

$$\sqrt[6]{(x-a)^2}$$

est une fonction *composée;* elle se décompose (dans tout le plan) en deux fonctions

$$+\sqrt[3]{x-a}, \quad -\sqrt[3]{x-a}.$$

Chacune de ces deux fonctions est une fonction *complète* qui ne se décompose qu'en fonctions *partielles* (au nombre de trois) qui ont un point critique $x = a$.

En résumé :

Une fonction partielle a toujours des points critiques; elle a aussi des points multiples si elle est multiforme, c'est-à-dire si elle a plusieurs valeurs.

Une fonction complète n'a pas de points critiques; si elle a plus d'une valeur, elle a des points multiples, c'est-à-dire des points où certaines des fonctions partielles en lesquelles elle se décompose deviennent égales. Lorsque x décrit un contour fermé autour d'un de ces points, les fonctions partielles se permutent entre elles et la fonction complète reprend la même valeur. Une fonction complète est indécomposable en deux ou plusieurs fonctions complètes.

Une fonction composée est un ensemble de fonctions complètes.

En particulier, une fonction uniforme qui a des points critiques est une fonction *partielle* uniforme et une fonction uniforme qui n'a pas de points critiques est une fonction *complète* uniforme : les polynomes, les fractions rationnelles sont des fonctions complètes uniformes. Nous avons ainsi caractérisé la distinction que nous avons établie, au commencement de cette Note, entre deux catégories de fonctions uniformes.

4. Les considérations qui précèdent permettent d'aborder l'étude générale des fonctions qui restent invariables lorsqu'on fait à x certaines substitutions.

Considérons une fonction complète multiforme Y de X se décomposant, en dehors de ses points multiples, en fonctions partielles uniformes, et soient

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots$$

les valeurs de ces fonctions partielles en un point ordinaire x_1. Considérons maintenant la fonction X de Y, inverse de la précédente, et supposons que cette fonction soit multiforme. Si nous donnons à la variable indépendante Y la valeur y_1, prise dans les précédentes, nous obtenons pour X une détermination

$$\mathrm{D}_{y_1}(\mathrm{X})$$

formée de points x parmi lesquels se trouve la valeur x_1, précédemment choisie.

De même, les valeurs y_2, y_3, ... précédentes donnent pour X les déterminations respectives

$$\mathrm{D}_{y_2}(\mathrm{X}), \quad \mathrm{D}_{y_3}(\mathrm{X}), \quad \ldots,$$

qui comprennent chacune le point x_1. Or il peut arriver que toutes ces déterminations de X aient encore d'autres points communs x_2, x_3, ... (nous en verrons des exemples) : il s'ensuit que, pour tous ces points communs x_1, x_2, x_3, ..., la détermination de Y est la même :

$$\mathrm{D}_{x_1}(\mathrm{Y}) = \mathrm{D}_{x_2}(\mathrm{Y}) = \mathrm{D}_{x_3}(\mathrm{Y}) = y_1, y_2, y_3, \ldots.$$

Or, lorsqu'on se donne x_1, les points x_2, x_3, ... sont déterminés d'après ce qui précède; x_2, x_3, x_4, ... sont donc des fonctions de x_1 :

$$x_2 = s_2(x_1), \qquad x_3 = s_3(x_1), \qquad \ldots,$$

et ces fonctions sont telles que, substituées à la variable x_1, *la fonction* Y *reste identiquement la même,* ou, si l'on veut, posant $Y = F(x)$, on aura

$$F(x) = F[s_2(x)] = F[s_3(x)] = \ldots .$$

Pour abréger le langage, nous appellerons *substitutions d'invariabilité de* Y, ou simplement *substitutions de* Y, les fonctions $s_2(x)$, $s_3(x)$, ... elles-mêmes.

Posons

$$s_i(x) = x + p_i(x).$$

Il arrive quelquefois que la quantité $p_i(x)$, déterminée par cette égalité, est constante : dans ce cas particulier, on l'a désignée par le nom de *période*.

Ayant ici à envisager des quantités analogues, mais en général variables, nous désignerons par le nom de *période* toute quantité telle que

$$p_i(x) = s_i(x) - x,$$

c'est-à-dire *toute quantité, constante ou fonction de* x, *qui, ajoutée à* x, *ne change pas la valeur de la fonction* $Y = F(x)$. Cette fonction sera alors appelée une fonction *périodique*.

Ainsi, dans la fonction $\sin x$ nous envisagerons les *périodes constantes*

$$2m\pi \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

et les *périodes variables*

$$(2m+1)\pi - 2x \quad (^1),$$

---

(1) On a coutume, dans la théorie des fonctions elliptiques, de n'attacher d'importance qu'aux deux périodes constantes ou aux substitutions de la forme $2m\omega + 2n\omega' + x$. Les périodes variables, ou les substitutions de la forme

$$2m\omega + 2n\omega' - x \qquad \text{ou} \qquad (2m+1)\omega + 2n\omega' - x,$$

ont autant d'importance que les premières pour l'existence des foncqui ont autant d'importance que les premières pour l'existence de $\sin x$.

Nous étudierons d'ailleurs des fonctions *périodiques* qui n'ont aucune période constante.

De l'étude précédente il résulte :

1° Qu'une fonction multiforme n'admet pas généralement de substitutions d'invariabilité, ou, selon notre définition, n'est pas généralement périodique; car, pour qu'elle soit périodique, il est nécessaire et d'ailleurs suffisant que les déterminations $D_{y_1}(X)$, $D_{y_2}(X)$, ... de la fonction inverse, comprennent *plusieurs* points communs

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots,$$

$y_1, y_2, y_3, \ldots$ étant tous les points de la détermination de Y :

$$D_{x_1}(Y).$$

En particulier, toute fonction complète multiforme Y de X, inverse d'une fonction complète *uniforme* X de Y *n'est pas périodique,* car la détermination de X, lorsqu'on se donne une valeur de Y, ne comprend qu'*un point.*

---

tions elliptiques, car on peut démontrer qu'il n'y a que la fonction exponentielle qui ait *seulement* des substitutions de la forme

$$x + \text{const.},$$

c'est-à-dire qui ait *seulement* des périodes constantes.

Quant à l'usage que nous faisons ici des expressions de *périodes* et de *fonctions périodiques,* il n'est destiné qu'à abréger le langage et non à soulever une question de doctrine. Il est d'ailleurs justifié en ce sens que, dans le langage ordinaire et même dans les théories astronomiques, on appelle *phénomènes périodiques* des phénomènes qui, on l'a reconnu depuis longtemps, n'ont pas de *périodes constantes,* de sorte que les fonctions qui représenteraient *exactement* ces phénomènes ne pourraient être que des fonctions *périodiques* à *périodes variables,* fonctions évidemment de la variable indépendante.

2° Toute fonction complète uniforme Y de X, autre qu'une fonction linéaire, est une fonction *périodique* de X, car tous les points

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots$$

de la détermination de X obtenue par un point y_1 sont tels que

$$D_{x_1}(Y) = D_{x_2}(Y) = D_{x_3}(Y) = \ldots = y_1.$$

En particulier, un polynome ou une fraction rationnelle de degré n est une fonction *périodique* qui a $n-1$ substitutions, car la fonction inverse a n valeurs.

Il est facile de construire des fonctions multiformes périodiques de la manière suivante : Soit $P(x)$ une fonction complète uniforme, par exemple une fonction rationnelle de degré n et soit $\Phi(x)$ la fonction inverse d'une autre fonction complète uniforme, par exemple $\arcsin x$; la fonction

$$F(x) = \Phi[P(x)] = \arcsin P(x)$$

admet les $n-1$ substitutions de $P(x)$ et n'admet que celles-là, car la fonction $\Phi(x) = \arcsin x$ n'est pas périodique. La fonction $\Phi[P(x)]$ est donc une fonction complète multiforme périodique.

Les fonctions multiformes périodiques, obtenues par ce procédé, sont telles que les fonctions partielles y_1, $y_2, y_3, \ldots$, en lesquelles elles se décomposent, sont *elles-mêmes périodiques* et ont, toutes, les mêmes substitutions.

Mais il est évident que d'autres cas peuvent se présenter, où certaines substitutions, au moins, de la fonction complète Y ne laissent pas invariables les fonctions partielles $y_1, y_2, y_3, \ldots$, mais les permutent.

3. Nous appellerons *groupe de substitutions* d'une

fonction complète périodique $Y = F(x)$, multiforme ou uniforme, l'ensemble des substitutions $s(x)$ qui laissent invariable cette fonction complète, et parmi les fonctions multiformes périodiques nous considérerons particulièrement celles pour lesquelles les déterminations $s(x)$ forment, avec x, *tous* les points de la substitution $D_y(X)$ de la fonction inverse [ce qui arrive toujours dans le cas des fonctions $F(x)$ complètes uniformes]. Pour toutes ces fonctions, on pourra dire que le groupe des substitutions, auxquelles on adjoint x, n'est autre que la *détermination* $D_y(X)$ de la *fonction inverse dont tous les points sont considérés comme fonction de l'un quelconque d'entre eux*.

Les points multiples de la fonction multiforme X de Y, inverse de la fonction Y de X, sont des points y où plusieurs des fonctions partielles X deviennent égales. Soit $y = \beta$ un de ces points, et soit $x = \alpha$ la valeur commune, en ce point, des fonctions partielles qui y deviennent égales; si ces fonctions partielles, considérées comme fonctions de la première, sont

$$s_1(x),\quad s_2(x),\quad s_3(x),\quad \ldots,$$

on aura

$$s_1(\alpha) = s_2(\alpha) = s_3(\alpha) = \ldots = \alpha.$$

Les points α ainsi déterminés sont donc tels que plusieurs substitutions du groupe y deviennent égales; ces valeurs de x seront appelées les *points multiples* du groupe; ce qui précède montre que ces points sont les valeurs α de la fonction multiforme X de Y qui sont déterminées par les points multiples β de la fonction X de Y, inverse de la fonction périodique Y considérée.

Les fonctions multiformes que l'on a étudiées jusqu'ici en Mathématiques sont telles que leur détermination $D_x(Y)$, pour un point x de la variable, ne comprend, sauf pour des points x particuliers, que des points isolés séparés les uns des autres par des intervalles non infiniment petits. Si donc nous considérons une fonction périodique Y de X, dont l'inverse jouit de la propriété précédente, les points

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots$$

de la détermination $D_y(X)$ formeront un ensemble *discontinu,* sauf pour certaines valeurs particulières de Y qui sont, comme nous l'avons vu précédemment, les points multiples de la fonction X de Y. Mais ces points x ne sont autres que

$$x, \quad s_1(x), \quad s_2(x), \quad \ldots.$$

Dans le cas considéré, le groupe de la fonction périodique Y sera donc *discontinu,* sauf en certains points que l'étude précédente fait connaître : lorsque x sera infiniment voisin d'un point multiple α du groupe, les points $s_1(x)$, $s_2(x)$, ... seront également infiniment voisins de α, et par conséquent infiniment voisins de x (nous supposons, bien entendu, que la fonction X de Y est continue dans le domaine de ces points). Il s'ensuit que les périodes

$$s_i(x) - x = p_i(x),$$

relatives aux substitutions s_i qui s'égalent en un point multiple α, sont *infinitésimales* dans le domaine de ce point. Si l'on remarque que toute fonction complète multiforme X de Y a nécessairement des points multiples α (ce qui revient à dire que toute fonction partielle a nécessairement des points critiques), on voit que *tout groupe a des points multiples, et, par conséquent, que tout groupe discontinu pour des points x quelconques cesse d'être discontinu dans le domaine de certains points x* qui ne sont autres que des points multiples. Le raisonnement précédent suppose que le point multiple α est à distance finie, et tombe lorsque ce point est rejeté à l'infini. Les substitutions, en groupe discontinu de la fonction $\sin x$, donnent un exemple simple de l'un et l'autre cas : la substitution

$$(2m+1)\pi - x \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

est infiniment voisine de x, lorsque x diffère infiniment peu de $\frac{(2m+1)\pi}{2}$ ou, si l'on veut, la période

$$(2m+1)\pi - 2x$$

est infinitésimale dans le voisinage du point $\frac{(2m+1)\pi}{2}$, qui est un point multiple où les deux substitutions

$$[2(m+p)+1]\pi - x, \quad 2p\pi + x \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

deviennent égales. Les substitutions

$$2m\pi + x,$$

qui, d'ailleurs, forment le groupe des substitutions de la fonction $e^{x\sqrt{-1}}$, n'ont pas de points multiples à distance finie, et l'on voit qu'aucune des périodes de ce groupe n'est infinitésimale pour aucune valeur de x.

Dans certains des cas particuliers étudiés jusqu'ici, on a appelé (¹) *groupe proprement discontinu* un groupe discontinu dans lequel aucune période n'est infinitésimale pour une valeur de x, et *groupe improprement discontinu* un groupe discontinu dans lequel certaines périodes au moins sont infinitésimales dans le domaine de certains points particuliers. Ce qui précède montre que tout groupe proprement discontinu n'a pas

(¹) M. Poincaré, *Théorie des groupes fuchsiens et kleinéens.*

de point multiple à distance finie, c'est-à-dire que l'équation

$$s_i(x) = x \qquad \text{ou} \qquad p_i(x) = 0$$

n'a aucune solution finie, quelle que soit la substitution $s_i(x)$ du groupe; toutes les substitutions du groupe sont alors de la forme

$$x + \text{const.};$$

il n'y a donc pas d'autre groupe proprement discontinu que celui de la fonction exponentielle $e^{\alpha x}$; il n'y a donc pas lieu de faire la distinction précédente entre les divers groupes discontinus, puisque l'une des deux catégories qu'elle distingue se réduit à un groupe particulier.

6. Mais, à l'égard des groupes continus, il y a lieu de faire une distinction analogue beaucoup plus importante. On appelle *groupe continu* tout groupe qui contient des périodes qui sont infinitésimales quel que soit x. Nous allons d'abord montrer qu'il existe des fonctions périodiques ayant des *groupes continus* de substitutions.

Considérons la fonction complète multiforme

$$y = x^m,$$

où m est un nombre réel et incommensurable. On reconnaît facilement que cette fonction complète a pour détermination $D_x(y)$ une infinité de points infiniment voisins les uns des autres sur une circonférence ayant l'origine pour centre, et qu'il n'existe aucun arc fini de cette circonférence sur lequel ne se trouvent une infinité de points y. Cependant il y a des points de la circonférence qui n'appartiennent pas à la détermination $D_x(y)$, car s'il n'en existait pas, la détermination de x^m et celle de $x^{\frac{m}{2}}$ seraient identiques pour $|x| = 1$, car elles se composeraient toutes deux de tous les points de la circonférence de rayon *un*, et alors les racines $\frac{1}{m^{\text{ièmes}}}$ et $\frac{2}{m^{\text{ièmes}}}$ de l'unité seraient identiques; cela est impossible, car l'équation $\lambda^{\frac{2}{m}} = 1$ admet, outre les racines de l'équation $\lambda^{\frac{1}{m}} = 1$, toutes celles de l'équation $\lambda^{\frac{1}{m}} = -1$. On ne peut donc pas dire que la détermination $D_x(y)$ se compose d'une suite *continue* de points, au sens propre du mot; toutefois, nous pouvons dire que cet ensemble de points est *improprement continu sur la circonférence de rayon* $|x^m|$, entendant par cette expression que sur cette circonférence existent une infinité de points y infiniment voisins les uns des autres, que sur tout arc fini, si petit soit-il, se trouvent des points y, sans d'ailleurs que les points y constituent la ligne *continue* qu'est la circonférence, ni même aucun arc continu au sens géométrique, de *lieu d'un point en mouvement continu.*

Nous ne connaissons aucune fonction dont la détermination $D_x(y)$ se compose, quel que soit x, de lignes au sens géométrique du mot; s'il en existait, on pourrait les appeler des fonctions *proprement linéales,* leur détermination étant *proprement continue,* c'est-à-dire une ligne géométrique. Dans tous les cas, on pourra appeler *fonctions improprement linéales* des fonctions, telles que la précédente, dont la détermination est, quel que soit x (sauf aux points multiples), *improprement continue sur une ligne continue.*

Les fonctions

$$y_1 = \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^m, \qquad y_2 = [(x-a)^n + b]^m + c,$$

où m est incommensurable et n commensurable, sont, comme la précédente, des fonctions *improprement linéales*. La détermination $D_x(y_1)$ de la première se compose d'une infinité de points infiniment voisins sur une circonférence, pour toute valeur de x autre que a ou b. Si $n = \frac{p}{q}$, la détermination $D_x(y_2)$ de la seconde se compose d'une infinité de points infiniment voisins sur q circonférences de centre c. Si, dans cette dernière, on suppose n incommensurable et m commensurable $= \frac{p}{q}$, la fonction est encore *improprement linéale;* les points y en suite improprement continue, sont situés sur une courbe sinueuse qui oscille entre les deux circonférences de centre c et de rayons

$$\operatorname{mod}[\operatorname{mod}(x-a)^n \pm \operatorname{mod} b]^m,$$

lorsque $\operatorname{mod}(x-a)^n > \operatorname{mod} b$.

Lorsque

$$\operatorname{mod}(x-a)^n < \operatorname{mod} b,$$

la courbe précédente est remplacée par q ovales égaux disposés régulièrement dans la couronne précédente.

Les inverses des trois fonctions considérées sont également des fonctions *improprement linéales*. On voit facilement que chacune des fonctions y, y_1, y_2 admet des substitutions; leurs groupes seront donc *improprement continus;* en particulier, le groupe de la fonction y_1 est un groupe linéaire continu (improprement).

Nous appellerons fonctions *ponctales* les fonctions, telles qu'on les a considérées jusqu'ici, dont la détermination est un ensemble *discontinu* de points (sauf dans le domaine d'un point multiple). On voit que les fonctions ponctales X de Y donnent lieu à des fonctions périodiques Y de X dont les groupes sont discontinus, et que les fonctions improprement linéales X de Y donnent lieu à des fonctions périodiques Y de X dont les groupes sont improprement continus (sur une ligne).

7. Considérons la fonction y_2 de l'exemple précédent, mais en supposant maintenant que m et n soient tous deux incommensurables. On voit facilement que la détermination $D_x(y_2)$ de cette fonction se compose, quel que soit x (sauf les points multiples), d'une double infinité de points y_2 situés dans la couronne du centre c dont il a été question tout à l'heure, tels que tout point y_2 est entouré, dans une infinité de directions, d'une infinité de points analogues infiniment voisins, et que toute aire finie, si petite soit-elle, prise dans la couronne, contient une infinité de ces points y_2, sans que cependant *tous* les points que l'on peut prendre dans la couronne fassent partie de $D_x(y_2)$.

Sans préjuger l'existence de fonctions dont la détermination $D_x(y_2)$ serait, quel que soit x (sauf certains points), une *aire* au sens géométrique du mot, et qu'on pourrait appeler, pour cette raison, des fonctions *proprement aréales*, nous dirons que la fonction précédente, dont la détermination $D_x(y_2)$ est un ensemble de points doublement continu (improprement) dans une aire, *est une fonction improprement aréale*.

La fonction inverse de y_2 est encore une fonction aréale; on voit que des fonctions X de Y, improprement aréales, donnent lieu à des fonctions *périodiques* Y de X dont les groupes sont improprement continus (dans une aire). On peut dire, si l'on veut, que la continuité de ces groupes est double, tandis que la continuité des groupes engendrés par les fonctions improprement linéales est simple.

Si l'on considère une fonction périodique quelconque

$F(x)$, toutes les substitutions $s(x)$ de son groupe satisfont à l'équation

$$F(s) = F(x).$$

De cette équation on peut tirer toutes les propriétés générales des groupes quelconques, discontinus ou improprement continus.

Cette étude sera sans doute l'objet d'une nouvelle Note.

[H11] [I11]

SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES ET LA SYMÉTRIE ABÉLIENNE;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

Étant donnés une fonction f et un entier

$$m = p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma} \ldots,$$

on sait que, si l'on définit une fonction $F(m)$ *par la relation*

$$F(m) = \sum f(d),$$

où la somme s'étend à tous les diviseurs de m, *on a inversement*

$$(1)\quad \begin{cases} f(m) = F(m) + \sum f\left(\dfrac{m}{pq}\right) + \ldots \\ \qquad\qquad - \left[\sum f\left(\dfrac{m}{p}\right) + \sum f\left(\dfrac{m}{pqr}\right) + \ldots\right]. \end{cases}$$

Il est possible de généraliser ce théorème quand on définit $F(m)$ non plus par une somme, mais par une fonction des $f(d)$ possédant la symétrie abélienne. Par définition, une fonction $\Psi_2(a_1, a_2)$ possède la symétrie abélienne lorsque :

(A) Elle ne change pas quand on permute a_1 et a_2;

(B) $\Psi_2[a_1, \Psi_2(a_2, a_3)]$, que nous désignerons par $\Psi_3(a_1, a_2, a_3)$, ne change pas quand on permute a_1, a_2 et a_3.

En continuant ainsi l'on forme une suite de fonctions par la loi

$$\begin{aligned}&\Psi_\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_{\lambda-2}, a_{\lambda-1}, a_\lambda)\\&\quad = \Psi_{\lambda-1}[a_1, a_2, \ldots, a_{\lambda-2}, \Psi_2(a_{\lambda-1}, a_\lambda)].\end{aligned}$$

Chacune des fonctions est symétrique par rapport aux $2, 3, \ldots, \lambda$ variables dont elle dépend. D'autre part, représentons par

$$v = \Omega(y, u)$$

la résolution de l'équation

$$y = \Psi_2(u, v),$$

par rapport à v. Le théorème que nous nous proposons de démontrer peut alors s'énoncer ainsi :

Si $d_1, d_2, \ldots, d_\lambda$ sont les diviseurs de m, et si l'on définit $F(m)$ par la relation

$$F(m) = \Psi_\lambda[f(d_1), f(d_2), \ldots, f(d_\lambda)], \tag{2}$$

on aura inversement

$$f(m) = \Omega(G, H), \tag{3}$$

où

$$\left\{\begin{aligned}G &= \Psi_\mu\left[F(m),\ F\left(\frac{m}{pq}\right), \ldots\ldots\ldots, F\left(\frac{m}{pqrs}\right)\right],\\ H &= \Psi_\nu\left[F\left(\frac{m}{p}\right), \ldots\ldots, F\left(\frac{m}{pqr}\right), \ldots\ldots\ldots\right].\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Les indices μ et ν, qui indiquent le nombre des variables dont dépendent respectivement G *et* H, *sont* *égaux : le premier à l'unité augmentée du nombre des diviseurs de m qui contiennent un nombre pair de facteurs premiers* DISTINCTS ; *le second au nombre des diviseurs de m qui en contiennent un nombre impair; μ et ν seront égaux, comme on sait.*

Pour démontrer cette proposition, rappelons que, d'après Abel, les conditions (A) et (B) sont nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction Φ admettant Ψ_2 pour théorème d'addition, c'est-à-dire telle que, si l'on pose

$$a_i = \Phi(x_i), \tag{5}$$

on a

$$\Phi(x_1 + x_2) = \Psi_2(a_1, a_2).$$

Alors, en général, on aura

$$\Phi(x_1 + x_2 + \ldots + x_\lambda) = \Psi_\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_\lambda).$$

De plus, si l'on pose

$$y = \Psi_2(u, v) = \Phi(x_j), \qquad u = \Phi(x_k),$$

la fonction

$$v = \Omega(y, u)$$

n'est autre que

$$\Phi(x_j - x_k).$$

Enfin, si l'on représente par Φ_{-1} la fonction inverse de Φ, de l'équation (5), on tire

$$x_i = \Phi_{-1}(a_i).$$

Il résulte de là que, en faisant $a_i = f(d_i)$, en introduisant dans (2) et (4) la fonction Φ au lieu des fonctions Ψ et en substituant dans (3), on est ramené à démontrer que, si l'on définit $F(m)$ par la relation

$$F(m) = \Phi\left\{\sum \Phi_{-1}[f(d)]\right\}, \tag{6}$$

on aura inversement

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} f(m) = \Phi\Big\{ & \sum \Phi_{-1}[\mathrm{F}(m)] + \sum \Phi_{-1}\left[\mathrm{F}\left(\frac{m}{pq}\right)\right] + \ldots \\ & - \sum \Phi_{-1}\left[\mathrm{F}\left(\frac{m}{p}\right)\right] - \sum \Phi_{-1}\left[\mathrm{F}\left(\frac{m}{pqr}\right)\right] - \ldots\Big\}. \end{aligned}\right.$$

La démonstration est maintenant immédiate, car les équations (6) et (7) peuvent s'écrire

$$(6')\qquad \Phi_{-1}[\mathrm{F}(m)] = \sum \Phi_{-1}[f(d)],$$

$$(7')\quad \left\{\begin{aligned} \Phi_{-1}[f(m)] = & \sum \Phi_{-1}[\mathrm{F}(m)] + \ldots \\ & - \sum \Phi_{-1}\left[\mathrm{F}\left(\frac{m}{p}\right)\right] - \ldots, \end{aligned}\right.$$

de sorte que, si l'on pose

$$\Phi_{-1}[\mathrm{F}(m)] = \mathrm{F}'(m), \qquad \Phi_{-1}[f(m)] = f'(m),$$

on est ramené à une relation de même forme que (1).

Il faut remarquer que Ψ_2 et Ω peuvent avoir plusieurs déterminations; nous supposons, bien entendu, que lorsqu'on a choisi une détermination de Ψ_2, celle qu'il convient de prendre pour Ω est par là même déterminée.

Exemple. — Soit la fonction symétrique

$$\Psi_2(a_1, a_2) = a_1\sqrt{1 + a_2^2} + a_2\sqrt{1 + a_1^2} \quad [1];$$

on trouve

$$\Psi_3(a_1, a_2, a_3) = a_1 a_2 a_3 + \sum a_1\sqrt{1 + a_2^2}\sqrt{1 + a_3^2},$$

symétrique en a_1, a_2, a_3; Ψ_2 possède donc la symétrie

---

[1] Elle représente le théorème d'addition de la fonction hyperbolique Sh x, qui n'intervient pas d'ailleurs dans le calcul.

abélienne; on trouve ensuite

$$\Psi_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum a_1 a_2 a_3 \sqrt{1+a_4^2} + \sum a_1 \sqrt{1+a_2^2}\sqrt{1+a_3^2}\sqrt{1+a_4^2},$$

. . . .

Prenons pour $f(m)$ la fonction numérique fondamentale $\varphi(m)$ et supposons $m = 6 = 2.3$. Ses diviseurs sont 1, 2, 3, 6 et l'on a

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(2) = 1, \qquad \varphi(3) = 2, \qquad \varphi(6) = 2.$$

En remplaçant les a par les $\varphi(d)$ et tenant compte de (2), on a

$$F(6) = \Psi_4(1, 1, 2, 2) = 12\sqrt{5} + 18\sqrt{2}, \qquad F\left(\frac{6}{2.3}\right) = 1,$$

$$F\left(\frac{6}{2}\right) = \Psi_2(1, 2) = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}, \qquad F\left(\frac{6}{3}\right) = \Psi_2(1, 1) = 2\sqrt{2}.$$

En tenant compte des équations (4), on a ensuite

$$G = \Psi_2\left[F(6),\ F\left(\frac{6}{2.3}\right)\right] = 63 + 20\sqrt{10},$$

$$H = \Psi_2\left[F\left(\frac{6}{3}\right),\ F\left(\frac{6}{2}\right)\right] = 7\sqrt{5} + 10\sqrt{2}.$$

D'autre part, de

$$y = \Psi_2(u, v) = u\sqrt{1+v^2} + v\sqrt{1+u^2},$$

on tire

$$v = \Omega(y, u) = y\sqrt{1+u^2} - u\sqrt{1+y^2},$$

et l'on vérifie que

$$\varphi(6) = \Omega(G, H) = G\sqrt{1+H^2} - H\sqrt{1+G^2} = 2.$$

[M¹5b]

SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. ERNEST DUPORCQ.

1. On sait que *toute courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques est une hypocycloïde à trois rebroussements*.

Je me propose, dans cette Note, de donner de cette propriété une démonstration des plus simples par la transformation du second ordre. Les transformations quadratiques étant l'objet d'une des leçons indiquées par le programme d'Agrégation, cette démonstration pourra fournir un intéressant exemple de leur application. J'indiquerai ensuite quelques conséquences.

2. Nous considérerons ici la transformation du second ordre qui associe entre eux les foyers des coniques inscrites à un triangle fixe *abc*, transformation qu'on désigne souvent sous le nom d'*inversion* par rapport au triangle.

Comme on le sait (¹), à la droite de l'infini correspond le cercle circonscrit au triangle *abc*, et les points cycliques se transforment l'un en l'autre; enfin une quartique admettant pour points doubles les sommets du triangle *abc* correspond à une conique, qui est inscrite à ce triangle lorsque les points doubles sont de rebroussement. En particulier, si le triangle *abc* est un triangle équilatéral formé par les points de rebrous-

(¹) *Voir*, par exemple, mes *Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 133-142.

sement d'une hypocycloïde triangulaire, celle-ci correspond au cercle inscrit au triangle *abc*.

Ces résultats rappelés, considérons une courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques : puisqu'elle a une tangente double, elle est nécessairement du quatrième ordre et admet trois points de rebroussement, *a*, *b* et *c*. Faisons maintenant une inversion par rapport au triangle *abc*; la courbe considérée a pour transformée une conique inscrite au triangle *abc*, mais cette conique doit toucher aux points cycliques la transformée de la droite de l'infini, c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle *abc* : elle doit donc être un cercle concentrique. Le centre du cercle circonscrit au triangle *abc* devant ainsi être équidistant des côtés, ce triangle est donc équilatéral, et la courbe considérée est l'inverse par rapport à ce triangle de son cercle inscrit, c'est-à-dire une hypocycloïde à trois rebroussements. Le théorème est donc démontré.

3. Comme application, transformons par dualité la propriété suivante, bien connue : le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe à des coniques homofocales est une strophoïde ayant pour point double le point fixe, et dont les tangentes en ce point sont conjuguées au faisceau des coniques homofocales.

Faisons une transformation corrélative qui, à ces tangentes au point double, fasse correspondre les points cycliques; au faisceau des coniques homofocales correspond un faisceau ponctuel de coniques conjuguées aux points cycliques, c'est-à-dire un faisceau d'hyperboles équilatères, et, comme la droite de l'infini est la transformée du point fixe d'où l'on menait les tangentes aux coniques homofocales, la transformée de la strophoïde constitue l'enveloppe des asymptotes de ces hyperboles équilatères; or, cette transformée est de troisième classe, et elle touche la droite de l'infini aux points cycliques. Par suite :

L'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est une hypocycloïde triangulaire.

4. Désignons ce triangle par *abc*, et considérons le triangle dégénéré T dont deux côtés sont formés par la droite de l'infini, le troisième côté étant une asymptote (A) d'une des hyperboles envisagées, et le sommet opposé à ce côté étant le point à l'infini de l'autre asymptote. Ce triangle et le triangle *abc* sont inscrits à une même conique : ils sont donc également circonscrits et conjugués à une même conique. Or, une conique circonscrite au triangle dégénéré T est évidemment une parabole ayant A pour tangente au sommet; une conique conjuguée à ce même triangle est, au contraire, une parabole d'axe A. Par suite :

Les asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle, les tangentes au sommet des paraboles inscrites et les axes des paraboles conjuguées à ce même triangle ont pour enveloppe commune une hypocycloïde triangulaire.

Les paraboles conjuguées à un triangle sont d'ailleurs évidemment inscrites au triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du premier; par suite :

L'axe d'une parabole inscrite à un triangle abc est une droite de Simson relative au triangle formé par les parallèles aux côtés du triangle abc issues de ses sommets.

5. Revenons au triangle dégénéré T, de tout à l'heure; le triangle $\alpha\beta\gamma$ formé par les pieds des hauteurs de *abc* est conjugué à toutes les hyperboles équilatères circonscrites à ce triangle, et une de ces hyperboles est circonscrite au triangle T. Puisqu'il existe ainsi une conique conjuguée au triangle $\alpha\beta\gamma$ et inscrite au triangle T, il y en a une autre ([1]), circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$ et conjuguée au triangle T; autrement dit, la droite A est axe d'une parabole circonscrite au triangle $\alpha\beta\gamma$. On voit donc que :

L'enveloppe des axes des paraboles circonscrites à un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1900. — COMPOSITIONS.

Besançon.

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Établir analytiquement l'existence de l'axe instantané de rotation dans le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.*

II. *Un disque circulaire tourne autour d'un axe*

([1]) Soient, en effet, T et T′ deux triangles, le premier circonscrit, le second conjugué à une même conique Γ. Considérons la conique conjuguée à T et touchant deux côtés de T′ : elle est harmoniquement inscrite à Γ; par suite, elle touche le troisième côté de T′.

horizontal sous l'action d'un poids fixé à une corde qui s'enroule sur un cylindre de même axe. Le disque est plongé dans un milieu où chaque élément de sa surface éprouve une résistance de la forme $Av + Bv^2$, *v étant la vitesse de l'élément.*

Déterminer le mouvement du disque.

La dérivée, par rapport au temps, du moment des quantités de mouvement, par rapport à l'axe, est égale à la somme des moments, par rapport à cet axe, des forces qui sollicitent le disque. Soient M la masse du disque, MK^2 son moment d'inertie, m la masse du poids moteur, ω la vitesse angulaire du disque, a son rayon. On a :

$$MK^2 \frac{d\omega}{dt} = mga - \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2\, dr\, d\theta (A r\omega + B r^2 \omega^2).$$

On a entre t et ω une relation de la forme

$$dt = \frac{d\omega}{\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2}.$$

Les circonstances du mouvement dépendent du signe de $\beta^2 - 4\alpha\gamma$.

Épreuve pratique. — *Engrenage à développante. Crémaillère et pignon.*

Caen.

Éléments généraux de Mathématiques.

Épreuve écrite. — I. *Enveloppe et trajectoires orthogonales des paraboles qui ont* OX *pour axe,* OY *pour directrice.*

$$x^2 - y^2 = 0, \qquad \left(x \pm \sqrt{x^2 - y^2}\right)\left(2x \mp \sqrt{x^2 - y^2}\right)^2 = C^3.$$

II. *Mouvement d'un disque très mince, pesant, homogène, pouvant tourner autour d'un axe hori-*

zontal OX *qui le traverse suivant une corde* AB *et glisse sans frottement le long de* OX. *Durée des petites oscillations; position de* AB *pour laquelle cette durée est minima.*

ξ *abscisse du centre;* θ *angle du disque avec la verticale :* $\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0$, $\left(a^2 + \frac{R^2}{4}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} = -ga\sin\theta$.

Épreuve pratique. — *Calculer la longitude* L *du Soleil au moment où, en négligeant la réfraction, il se couche pour un lieu de latitude* λ; *l'heure moyenne du lieu est* H *et l'on est en un jour d'été pour lequel l'équation du temps est* E. *On connaît l'obliquité de l'écliptique* ω.

$$\operatorname{tang}Ⓓ = \cot\lambda\cos(H - E), \qquad \sin L = \frac{\sin Ⓓ}{\sin\omega}.$$

Dijon.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Recherche des surfaces trajectoires orthogonales des lignes dont les équations en coordonnées rectangulaires sont*

$$x = \varphi(t, a, b), \qquad y = \chi(t, a, b), \qquad z = \psi(t, a, b),$$

où t, a, b, *représentent la variable auxiliaire et deux paramètres indéterminés, où* φ, χ, ψ *désignent des fractions données de ces trois quantités.*

II. *Appliquer la théorie précédente aux lignes*

$$x = ae^{-pt}, \qquad y = be^{-qt}, \qquad z = t,$$

où p, q *représentent deux constantes données.*

Mécanique.

I. *Forme d'équilibre d'un fil homogène pesant dont les extrémités sont attachées à deux points fixes.*

II. *Dans le cas où les points sont donnés, ainsi que la longueur du fil, déterminer complètement la courbe qu'affecte le fil.*

ASTRONOMIE.

I. *Formules différentielles de la Trigonométrie sphérique.*

II. *Détermination du temps sidéral, connaissant la latitude, au moyen de plusieurs mesures de hauteur d'une étoile connue.*

Grenoble.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Recherche générale des surfaces dont les normales rencontrent une courbe plane donnée* S. *Lignes de courbure d'une surface intégrale générale et directions principales en un point de cette surface.*

Cas particulier où la surface intégrale considérée touche le long d'une ligne, un plan parallèle à celui de la courbe S. *Calculer, dans ce cas, la longueur des rayons principaux en un point de la surface.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégration générale des équations*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ax + by + c, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a'x + b'y + c',$$

dans lesquelles a, b, c, a', b', c' *désignent des constantes.*

Cas particulier où l'on a

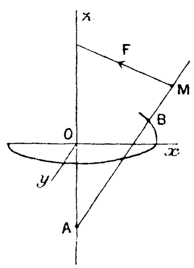
$$a = \alpha(\beta - \alpha), \qquad b = \alpha\beta, \qquad c = 0,$$
$$a' = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2, \qquad b' = -\beta(\alpha + \beta), \qquad c' = 0.$$

Dans ce cas particulier, quelle relation faut-il établir entre α et β, supposés différents de zéro, pour que, les constantes d'intégration étant convenablement déterminées, les valeurs de x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ soient nulles pour $t = 0$? Quel est alors le lieu du point dont les coordonnées sont x et y?

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère la surface hélicoïde réglée à cône directeur dont les coordonnées d'un point*

Fig. 1.



quelconque sont données par les formules

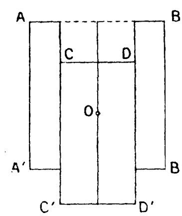
$$x = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \cos\theta, \qquad y = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sin\theta, \qquad z = a\theta - a + \frac{\rho}{\sqrt{2}},$$

où θ et ρ sont deux variables dont la première détermine la génératrice AB du point et la seconde la distance de ce point M au point A de cette génératrice qui est sur l'axe. L'angle MAz et l'angle de l'hélice avec l'axe sont du reste tous deux égaux à 45°.

Un point matériel non pesant, assujetti à glisser sans frottement sur la surface, est sollicité par une force perpendiculaire à l'axe, attractive et proportionnelle à la distance de cet axe. Mouvement du point en général. Étudier plus particulièrement le cas où, à *l'origine, le point* M *serait sur l'hélice et où sa vitesse* v_0 *serait tangente à cette hélice.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cylindre plein* CDC'D' *glisse dans un cylindre creux de même axe et de rayon*

Fig. 2.



double AB A'B' *dont il peut remplir exactement le vide. On demande dans quelle position il faut le placer pour que l'ellipsoïde d'inertie, relatif au point* O *de l'axe commun qui est à égale distance des deux bases* AB *et* C'D' (*supérieure de l'un et inférieure de l'autre*), *soit une sphère. Les cylindres sont homogènes et de même densité.*

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Développement de la longitude du Soleil suivant les puissances de l'excentricité. — Équation du centre.*

Temps moyen. — Équation du temps. Discussion.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Dans un triangle, on donne*

$$a = 135^\circ.\ 5'.28'',8,$$
$$b = 50.30.\ 8,4,$$
$$C = 69.34.55,9;$$

1° *Calculer* C *et* A *isolément;*

2° *Résoudre complètement le triangle;*

3° *Déterminer l'influence qu'aurait sur la détermination de* C *et de* A *une erreur de* $\pm 1'$ *affectant la valeur de* C.

Lyon.

Analyse.

I. 1° *Intégrer le système* (p, q = const.)

$$(o)\qquad z\frac{dy}{dx}=f(y)=(y-p)(y-q),\qquad \frac{dz}{dx}=f'(y).$$

2° *Montrer que le système* (o) *possède l'invariance vis-à-vis des trois transformations* (a, b, c = const.)

$$\begin{vmatrix} x & x+a \\ y & y \\ z & z \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} x & bx \\ y & y \\ z & bz \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} x & x(1-cx)^{-1} \\ y & y+cz(1-cx)^{-1} \\ z & z(1-cx)^{-2} \end{vmatrix}=\Gamma.$$

3° *Montrer que le système* (o) *possède au moins une solution* y = const. *Combiner cette remarque avec l'invariance ci-dessus indiquée pour construire* a priori *l'intégrale générale.*

L'intégrale générale est (A, B, C = param. arbitr.)

$$z=\mathrm{B}f(y),\qquad x+\mathrm{A}=\mathrm{B}y.$$

Les courbes intégrales sont les génératrices rectilignes d'un certain faisceau de quadriques. La transformation Γ est birationnelle. Pour avoir Γ^{-1} il suffit de changer C en $-$ C.

II. *Deux variables complexes x et y sont liées par l'équation*

$$(\mathrm{H})\qquad x^m+y^n=1\qquad (m,\ n = \text{entiers positifs}).$$

Montrer que, pour $|x|<1$, H *définit n fonctions holomorphes distinctes y de x.*

Construire les n développements

$$y = \sum_l a_l x^l \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

et établir directement, pour $|x| < 1$, *la convergence absolue et uniforme des n séries.*

Pour quels points x (H) *possède-t-elle des racines égales?*

Cas particulier : $m = n = 2$. *En déduire le développement, en série de Mac-Laurin, de* $\operatorname{arc\,sin} x$, *pour* x *réel et compris entre* $+1$ *et* -1.

III. *Quand la variable complexe z est dans l'intérieur de la couronne comprise entre les deux circonférences qui ont l'origine pour centre avec* π *et* 2π *pour rayons respectifs, on a (théorème de Laurent)*

$$\frac{1}{\sin z} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n z^n.$$

Calculer A_0, A_1, A_2, A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}.

Mécanique.

On a une sphère creuse de rayon R *et une droite matérielle, de longueur fixe* $< 2R$, *infiniment mince, homogène, sans pesanteur. La droite se meut dans l'intérieur de la sphère, en s'y appuyant par les deux bouts, sans frottement.*

Poser les équations différentielles du mouvement de la droite, la sphère restant fixe.

Calculer, en fonction des paramètres qui définissent la position de la droite : la vitesse de chaque point; les réactions exercées sur la sphère.

MATHÉMATIQUES PRÉPARATOIRES.

I. *La droite* C (*coordonnées rectangulaires*)

$$y = 1, \qquad z = mx, \qquad m = \text{const.}$$

tourne autour de l'axe des z et engendre une surface S *de révolution.*

Montrer que S *est une quadrique et en trouver la conique méridienne.*

Discuter la conique section de S *par un plan passant par l'origine. Distinguer, par la considération du cône asymptote, les cas ellipse, parabole, hyperbole.*

Les sections $yz^{-1} = \text{const.}$ *se projettent sur le plan des* xy *suivant un faisceau de coniques* Λ

$$x^2 + \lambda y^2 = 1 \qquad (\lambda = \text{paramètre}).$$

Montrer que les trajectoires orthogonales des coniques Λ *ont pour équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{xy}.$$

Intégrer.

II. *Théorèmes généraux de la Dynamique.*

Marseille.

ANALYSE INFINITÉSIMALE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Quels sont les points singuliers des fonctions représentées par les intégrales définies* $\int \frac{dz}{(z-1)^2}$, $\int \frac{dz}{(z-1)^{\frac{1}{2}}}$, $\int \frac{dz}{z-1}$, *et quels sont leurs caractères distinctifs?*

(*Aucune démonstration n'est demandée.*)

II. *Étant donnée la surface représentée en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$cx = az\cos\varphi + ac\sin\varphi, \qquad cy = bz\sin\varphi - bc\cos\varphi,$$

où φ est un paramètre variable, on demande de déterminer l'équation générale du plan tangent en un point (x, y, z) quelconque de la surface, et celle du plan tangent au point à l'infini sur la génératrice correspondant à une valeur quelconque de φ. Déduire de là l'équation du plan central et les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point central de la génératrice considérée. Trouver les points de la ligne de striction les plus élevés au-dessus du plan des xy.

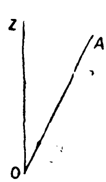
On trouve sans difficulté

$$z_1 = \frac{c^3(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{a^2(b^2 + c^2)\sin^2\varphi + b^2(a^2 + c^2)\cos^2\varphi}.$$

Le maximum de cette expression se calcule facilement. La question proposée consiste à déterminer sur une hyperboloïde la ligne de striction correspondant à un système choisi de génératrices rectilignes.

Mécanique.

Épreuve écrite. — *Dans un bloc homogène pesant est creusé un canal rectiligne* OA *qui rencontre un*



axe vertical fixe OZ *autour duquel le bloc peut tourner.*

Dans le canal se meut un point matériel pesant.

Étudier le mouvement du système.

En particulier, quelles doivent être les données initiales pour que le point reste fixe dans le canal?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Le tablier d'un pont suspendu pèse* 4000^{kg} *par mètre courant. Il a* 100^{m} *de longueur, et il est supporté par deux câbles qui passent sur deux piles d'égale hauteur placées aux deux extrémités du tablier.*

La flèche de la courbe décrite par chaque cable est égale à 8^{m}. *Calculer la section qu'il faut donner à chaque câble pour qu'il ne travaille pas à une tension supérieure à* 12^{kg} *par millimètre carré.*

Trouver la longueur de la courbe décrite par chaque câble. On négligera le poids des câbles.

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Description et théorie du sextant.*

Déterminer la longitude et la latitude d'un lieu à l'aide d'un sextant et d'un chronomètre réglé sur le temps moyen du premier méridien.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Connaissant un côté a d'un triangle géodésique ainsi que les angles adjacents* B, C, *trouver les autres éléments et la surface du triangle*

$$a = 55347^{m},82,$$
$$B = 55^{\circ}47'53''6,$$
$$C = 62^{\circ}58'47''6.$$

Calculer les accroissements des côtés b et c correspondant à un accroissement de $0^{m},65$ *du côté a.*

On supposera le rayon de la Terre égal à 6360000^{m}.

Excès sphérique en secondes

$$\varepsilon = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2R^2 \sin(B+C)\sin 1''} = \frac{N}{D},$$

$$B' = B - \frac{\varepsilon}{3}, \qquad C' = C - \frac{\varepsilon}{3},$$

$$b = a\frac{\sin B'}{\sin(B'+C')}, \qquad c = a\frac{\sin C'}{\sin(B'+C')},$$

$$A = 180 - (B+C) + \varepsilon,$$

$$s = s' = \frac{a^2 \sin B' \sin C'}{2\sin(B+C)}, \qquad \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a}.$$

$B = 55°.47'.53'',6$ $\qquad \varepsilon = 6,58$ $\qquad B' = 55°.47'.21'',4$

$C = 62.58.47,8$ $\qquad \frac{\varepsilon}{3} = 2,2$ $\qquad C' = 62.58.45,5$

$B + C = 118.46.41,4$ $\qquad A' = 180 - (B'+C') = 61.13.23,0$

	Log.		Log.
a^2	9,486	ε	0,301
$\sin B$	$\bar{1}$,918	R^2	13,606
$\sin C$	$\bar{1}$,950	$\sin(B+C)$	$\bar{1}$,943
N	9,354	$\sin 1''$	$\bar{6}$,686
const. = D	$\bar{9}$,464	D	8,536
ε	0,818		

	Log.
$\sin B'$	$\bar{1}$,9175355
a	4,7431005
const. = $\sin(B'+C')$	0,0572418
$\sin C'$	$\bar{1}$,9498010
b	4,7178838
c	4,7501493

	Log.		Log.
a^2	9,4862910	b	4,719
$\sin B'$	$\bar{1}$,9175355	const. = a	$\bar{5}$,257
$\sin C'$	$\bar{1}$,9498010	Δa	$\bar{1}$,817
const. = 2	$\bar{1}$,6989700	c	4,750
const. = $\sin(B'+C')$	0,0572478	Δb	$\bar{1}$,789
s	9,1097553	Δc	$\bar{1}$,820

81

132

Résultats :

b...	$52225^{\mathrm{m}},64$	$A = 61°.13'.25'',2$	Δb.....	$0^{\mathrm{m}},615$
c...	$56253,47$		Δc.....	$0,66$
s...	1287524000^{mq}			

Montpellier.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Les axes étant rectangulaires, déterminer l'équation générale des courbes planes telles que la projection orthogonale du rayon de courbure sur l'axe des y ait une longueur constante donnée. Parmi les courbes obtenues, déterminer celle qui est tangente à l'axe Ox au point O. Étudier la forme de cette courbe et calculer la longueur de l'arc compté à partir de l'origine.*

Épreuve pratique. — *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 2y = x(e^x + e^{-x}).$$

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Un paraboloïde de révolution est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe, qui est fixe et dirigé suivant la verticale ascendante. Un point pesant se déplace sans frottement sur la surface de ce paraboloïde. On propose d'étudier le mouvement relatif du point pesant sur le paraboloïde, en supposant que la vitesse initiale relative du point est dirigée suivant la tangente au parallèle. On se dispensera de calculer la réaction du paraboloïde sur le point.*

Épreuve pratique. — *Une figure plane, mobile dans son plan, est liée au mouvement d'un angle droit dont un côté enveloppe une parabole fixe tandis que l'autre passe constamment par le foyer de cette parabole.*

Trouver la base et la roulante; construire, pour une position quelconque de la figure, le cercle des inflexions.

Astronomie.

Épreuve écrite. — I. *Établir les formules fondamentales du mouvement parabolique des comètes; en déduire le théorème d'Euler ou de Lambert. Conclure, de la position à l'instant t d'une comète dans son orbite parabolique :*

1° *Ses coordonnées héliocentriques écliptiques;*

2° *Ses coordonnées héliocentriques équatoriales.*

II. *Définir les éléments des orbites des grosses planètes et exprimer par le développement en série usuel la longitude héliocentrique V_1 en fonction de la longitude dans l'orbite V.*

Épreuve pratique. — *On donne pour l'époque* 1900 *décembre* 10,0 : *l'anomalie moyenne*

$$M = 117^\circ 34' 23'',4,$$

l'excentricité

$$\varphi = 1^\circ 37' 40'',9,$$

le moyen mouvement

$$\mu = 881'',0985$$

de la planète (292) *Ludovica.*

On demande pour 1900 *décembre* 30,0 : 1° *la valeur de l'anomalie excentrique* E; 2° *la valeur de l'anomalie vraie.*

Nancy.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Définition et propriétés du déterminant fonctionnel de n fonctions de n variables. Condition pour qu'il existe entre ces fonctions une relation identique.*

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz *et, sur* Oz, *deux points* C *et* C′ *des cotes* $+c$ *et* $-c$; *on considère la sphère* (Σ) *lieu des points dont le rapport des distances à* C *et* C′ *est égal à* $\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, *puis la famille des sphères* (Σ) *obtenues en faisant varier la valeur de* λ :

1° *Déterminer les trajectoires orthogonales des sphères* (Σ);

2° *Trouver l'équation générale des surfaces* (S) *orthogonales en chacun de leurs points à la sphère* (Σ) *qui passe par ce point;*

3° *Déterminer en particulier l'équation de la surface* (S) *qui passe par la droite* $z=0$, $x=a$, *et celle de la surface* (S) *qui passe par le cercle*

$$z=0, \qquad x^2+y^2-2px-c^2=0,$$

a et p étant des constantes données et c la cote du point C.

Épreuve pratique. — *On considère la surface représentée par les équations*

$$x=\cos\varphi(z+1), \qquad y=\sin\varphi(1-z),$$

où φ est un paramètre variable.

Déterminer le volume intérieur à cette surface et compris entre les plans $z=+1$ *et* $z=-1$.

Déterminer le lieu des points de contact des plans tangents à la surface parallèles à Oz *et construire les projections de ce lieu sur les plans de coordonnées; trouver la longueur de la courbe ainsi définie sur la surface.*

Le volume est $\frac{4}{3}\pi$; les équations de la courbe sont

$$x = 2\cos^3\varphi, \qquad y = 2\sin^3\varphi, \qquad z = \cos 2\varphi,$$

et sa longueur est $\sqrt{13}$.

Géométrie supérieure.

Épreuve écrite. — I. *On considère deux axes rectangulaires* Ox, Oy; *sur le premier, un point fixe* A *d'abscisse* a, *sur le second un point fixe* B *d'ordonnée* b *et, dans le plan* xOy, *un point variable* M *de coordonnées* X *et* Y; *soient* A′ *et* B′ *ses projections sur* Ox *et* Oy. *Les circonférences déterminées, l'une par les points* O, A, B′, *l'autre par les points* O, A′, B, *se coupent en un point* m *de coordonnées* x *et* y.

1° *Montrer que* x *et* y *s'expriment rationnellement en fonction de* X *et* Y, *et réciproquement;*

2° *Si* M *décrit une droite* D, m *décrit une cubique* c *et, lorsque* D *varie,* c *admet* O *comme point double et passe par* A, *par* B, *ainsi que par les points cycliques* I *et* J *du plan;*

3° *Si* m *décrit une droite* d, M *décrit une cubique* C; *qu'arrive-t-il lorsque* d *varie en passant par l'un des points* O, A, B, I, J?

4° *Lorsque* d *varie d'une manière quelconque,* C *varie en faisant partie d'un réseau de cubiques; quel est le lieu des points doubles de ces cubiques?*

II. *On considère la surface représentée par les équa-*

tions

$$x + (1+u)\cos v, \qquad y = (1-u)\sin v, \qquad z = u;$$

déterminer ses lignes asymptotiques et former l'équation ayant pour racines les rayons de courbure principaux en un point quelconque.

I. La transformation birationnelle qui existe entre les coordonnées des points m et M est définie par les équations

$$x = \frac{(XY-ab)(Y-b)}{(X-a)^2+(Y-b)^2}, \qquad X = \frac{x^2+y^2-by}{x},$$
$$y = \frac{(XY-ab)(X-a)}{(X-a)^2+(Y-b)^2}, \qquad Y = \frac{x^2+y^2-ax}{y}.$$

Si M décrit une droite (U, V, W), m décrit la cubique

$$U(x^2+y^2-by)y + V(v^2+y^2-ax)x + Wxy = 0,$$

qui admet l'origine comme point double et passe par A, B, I et J; les points fondamentaux de la transformation sont ainsi mis en évidence.

Si m décrit une droite (u, v, w), M décrit la cubique

$$[u(Y-b)+v(X-a)](XY-ab)$$
$$+ w[(X-a)^2+(Y-b)^2] = 0,$$

qui a toujours le point (a, b) comme point double.

Si d passe par O, G se décompose dans l'hyperbole fixe $XY - ab = 0$ et dans une droite variable; si d passe par un des points A, B, I, J, C se décompose chaque fois dans une certaine droite fixe passant par le point (a, b) et dans une conique variable. La cubique C ne peut avoir d'autre point double que le point (a, b) que si elle se décompose; le lieu des points doubles se compose alors de l'hyperbole et des quatre droites fixes que l'on vient de trouver.

II. Les lignes asymptotiques sont données par

$$2\sin 2v\, du\, dv + (1 - u^2)\, dv^2 = 0;$$

elles se composent des génératrices de la surface correspondant à $v = \text{const.}$ et de courbes définies par l'équation

$$\frac{u-1}{u+1} = \sqrt{\tan g v}.$$

L'équation qui donne les rayons de courbure principaux est

$$R^2 \sin^2 2v + 2R(1 - u^2 + \sin^2 2v)\sqrt{2(u + \cos 2v)^2 + \sin^2 2v}$$
$$- [2(u - \cos 2v)^2 + \sin^2 2v]^2 = 0.$$

Mécanique.

Épreuve écrite. — *On imprime à un cône de révolution homogène, pesant, une rotation autour de son axe* Oz; *puis, fixant le sommet* O *du cône et plaçant son axe* Oz *horizontal, on abandonne le cône à son propre poids, sans imprimer aucune vitesse initiale à son axe.*

La hauteur h et le rayon r de la base du cône sont égaux à $\frac{3}{4}g$, g désignant l'accélération due à la pesanteur; la vitesse angulaire de rotation initiale du cône autour de son axe est $n = 5$; la densité du cône est quelconque.

On demande de décrire le mouvement du cône autour de son sommet O.

On a à étudier dans un cas particulier le mouvement d'un corps homogène, pesant, de révolution autour de son axe; la troisième équation d'Euler donne d'abord $r = r_0 = 5$, d'où

$$(1) \qquad \varphi' + \psi' \cos\theta = r_0 = 5;$$

le théorème des forces vives et celui des moments des quantités de mouvement par rapport à la verticale du sommet fournissent ensuite, avec les conditions initiales données, les relations

$$(2)\qquad \theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta = -\frac{2Mgl}{A}\cos\theta = -\frac{8}{3}\cos\theta.$$

$$(3)\qquad \psi' \sin^2\theta = -\frac{cr_0}{A}\cos\theta = -2\cos\theta.$$

En posant $\cos\theta = u$, on a

$$u'^2 = \frac{4}{3}u(u-2)(2u+1);$$

par conséquent θ oscille entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$ d'une manière périodique, et le problème s'achève de la manière connue.

Épreuve pratique. — *Déterminer le centre de masse d'un arc d'hélice homogène tracé sur un cylindre de révolution à axe vertical de rayon égal à* 2^{m}; *les rayons des extrémités de l'axe font un angle de* 45° *et leur distance verticale est égale à* 1^{m}.

Astronomie.

Épreuve écrite. — I. *Démontrer le théorème de Legendre relatif aux triangles sphériques dont les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère.*

II. *Définition et période de l'équation annuelle dans le mouvement troublé de la Lune.*

III. *Sachant qu'une étoile dans son mouvement diurne reste un temps sidéral* T *au-dessus de l'horizon d'un lieu, trouver sa déclinaison; on connaît la latitude* φ *du lieu.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

528.

(1860, p. 247.)

Le nombre figuré par 1121 *ne peut être un carré parfait dans aucun système de numération.* (Rouché.)

SOLUTION

Par M. N. Plakhowo.

Écrivons ce nombre dans la base x; il sera représenté par

$$x^3 + x^2 + 2x + 1 = x^3 + (x+1)^2;$$

et prouvons qu'il ne peut être égal à un carré parfait, ou que $x^3 + (x+1)^2 = y^2$ est une équation impossible. Elle peut s'écrire $x^3 = y^2 - (x+1)^2$. M. Fauquembergue [1], en résolvant l'équation $x^3 = y^2 - z^2$, a remarqué avec raison que, si $x = 3m+1$, y est un mult. 3, et si $x = 3m - 1$, z est mult. 3. Or nous avons

$$(3m+1)^3 = y^2 - (3m+2)^2,$$

et

$$y^2 = 3(9m^3 + 9m^2 + 3m + 3m^2 + bm) + 2,$$

ou

$$y^2 = 3k + 2.$$

Mais un carré ne saurait être un mult. $3 + 2$, et cette décomposition est impossible; quant à

$$(3m-1)^2 = y^2 - (3m)^2,$$

cette décomposition est également impossible, puisque

$$y^2 = 3k - 1.$$

Il nous reste à voir si une décomposition en une différence de deux carrés, d'un nombre mult. 3 est possible.

$$3m^2 = y^2 - (3m+1)^2 \qquad \text{d'où} \qquad y^2 = 3k + 1.$$

---

[1] Voir *Interm. des mathématiciens*, p. 309, question 461; 1895.

Cette décomposition serait possible, car

$$9^3 = 365^2 - 364^2 = 364^2 + 728 + 1 - 364^2 = 729,$$

dont ni 365, ni 364 n'est divisible par 3. Prenons

$$x^3 = \left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2.$$

Ce sera la différence de deux plus petits carrés

$$\frac{x^2 - x}{2} = x + 1 \qquad \text{ou} \qquad x^2 - 3x + 2 = 0,$$

équation qui ne donne pas de solution entière.

Or il n'existe pas de base x qui donne une décomposition de deux carrés les plus petits, pour que le nombre 1121 soit un carré parfait

$$x^3 = \left(\frac{x^3+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^3-1}{2}\right)^2.$$

Ce sont les carrés les plus grands,

$$\frac{x^3 - 1}{2} = x + 1 \qquad \text{ou} \qquad x^3 - 2x - 3 = 0,$$

Or on voit que cette équation ne donne pas de solutions entières, car si nous posons $x = 2$, le premier membre de l'équation devient positif, et, si nous prenons $x = 1$, le premier membre devient négatif, et cette fonction est toujours croissante de $x = 2$, jusqu'à $x = \infty$. Il ne peut pas y avoir de base x qui donne les carrés maximums, mais nous pouvons poser x égal à un multiple pair ainsi qu'à un multiple impair,

$$6^3 = 55^2 - 53^2 = 29^2 - 15^2, \qquad x^3 = \left(\frac{x^3+4}{4}\right)^2 - \left(\frac{x^3-4}{4}\right)^2.$$

Posons $\dfrac{x^3-4}{4} = x + 1$; cette équation ne donne pas de solutions entières, puisque cette fonction est négative pour $x = 2$, et positive pour $x = 3$, et devient croissante de $x = 3$ jusqu'à $x = \infty$. Nous pouvons poser

$$x^3 = \left(\frac{x^3+16}{8}\right)^2 - \left(\frac{x^3-16}{8}\right)^2, \qquad \frac{x^3-16}{8} = x + 1,$$

équation qui n'a pas de solution entière, qui devient négative pour $x = 3$ et positive pour $x = 4$. Après quoi elle est constamment croissante, et ainsi de suite.

On pourrait même former une équation générale et démontrer que, pour un exposant aussi grand que l'on veut, l'équation n'a pas de racines entières, et que, par conséquent, on ne trouvera pas de base x telle que le nombre figuré par 1121 soit un carré parfait.

QUESTIONS.

1912. Étant donnés trois points fixes A_1, A_2, A_3 et trois plans fixes P_1, P_2, P_3, trouver le lieu d'une droite G telle que les projections des points A_1, A_2, A_3 sur cette droite soient respectivement dans les plans P_1, P_2, P_3. (P. Appell.)

1913. Trouver en nombres entiers les solutions de l'équation

$$2x^3 = 3y^2 - 1. \qquad \text{(H.-J. Krantz.)}$$

1914. Si une ellipse de grandeur donnée roule sur deux droites rectangulaires :

1° Le lieu des foyers de cette ellipse se compose de quatre ovales dont chacun d'eux a une aire équivalente à celle d'un cercle ayant pour diamètre la distance focale;

2° Le lieu des sommets du grand axe se compose également de quatre ovales ayant chacun pour aire celle du cercle décrit sur le grand axe comme diamètre;

3° Le lieu des sommets du petit axe est aussi formé par quatre ovales ayant chacun une aire équivalente à celle du cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.

(E.-N. Barisien.)

ERRATA.

4ᵉ série, t. I, 1901, p. 48, ligne 13 en remontant (question 1908) :

au lieu de $$\frac{1}{\rho} = \frac{d}{dr}\left(r\sqrt{1 - 2k^2\frac{U(r)}{U'^2(r)}}\right),$$

lisez : $$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\sqrt{1 - 2k^2\frac{U(r)}{U'^2(r)}}\right).$$

[O51]

SUR LA THÉORIE DES LIGNES GÉODÉSIQUES (¹);

PAR M. PAUL STÄCKEL.

(Traduit par M. L. LAUGEL.)

1. Un théorème connu, de Liouville (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XI, p. 345; 1846), passé dans l'enseignement, dit que les lignes géodésiques des surfaces pour lesquelles le carré de l'élément linéaire ds peut être mis sous la forme

$$ds^2 = [U(u) - V(v)](du^2 + dv^2)$$

peuvent être déterminées par des quadratures. En effet, si un point matériel qui n'est soumis à l'influence d'aucune force extérieure se meut sur une surface pareille, son mouvement sera représenté pour un choix convenable de la vitesse (constante) par les équations

$$\int \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}} = t - \tau,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}} = \beta,$$

où t désigne le temps, et où α, β, τ sont des constantes dont les valeurs sont déterminées par les conditions initiales du mouvement.

En adoptant certaines hypothèses très générales sur la nature des fonctions $U(u)$ et $V(v)$, on peut, comme on va le démontrer dans ce qui suit, tirer des équations de Liouville des conclusions sur le cours des lignes géodésiques.

(¹) *Jahresbericht der D. M. V.*, t. IX, p. 121 (1901). Leipzig, Teubner.

2. Soient $\varphi(u)$, $\chi(u)$, $f(u)$; $\psi(v)$, $\omega(v)$, $g(v)$ des fonctions des arguments u et v, satisfaisant aux conditions suivantes :

Dans un domaine $\mathfrak{G}$ des variables u et v qui est défini par les inégalités

$$a \leqq u \leqq A, \qquad b \leqq v \leqq B,$$

premièrement, les fonctions devront être toutes les six uniformes, finies et continues; *deuxièmement*, dans le domaine $\mathfrak{G}$, y compris ses limites, les fonctions $f(u)$ et $g(v)$ devront avoir des valeurs essentiellement positives et différentes de zéro, tandis qu'en *troisième* lieu $\varphi(u)$, $\chi(u)$; $\psi(v)$, $\omega(v)$ devront également conserver le même signe dans $\mathfrak{G}$, mais pourront s'évanouir en certains points. Enfin, en *quatrième* lieu, le déterminant $\varphi\omega - \psi\chi$ devra, dans $\mathfrak{G}$, être toujours positif, ou bien être toujours négatif, sans être jamais nul.

Lorsque ces conditions sont remplies, on a ce théorème démontré par M. Staude (*Math. Annalen*, t. XXIX, p. 469; 1887, et *Journal für Mathem.*, t. CV, p. 303; 1890), d'après lequel les fonctions u et v sont définies dans le domaine $\mathfrak{G}$ par le problème d'inversion

$$\int_a^u \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}} + \int_b^v \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)g(v)}} = x,$$

$$\int_a^u \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}} + \int_b^v \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)g(v)}} = y,$$

comme fonctions paires uniformes, finies et continues des arguments à variabilité illimitée x et y, fonctions doublement périodiques au système de périodes

$$2\omega_{11} = 2\int_a^A \frac{\varphi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}},$$

$$2\omega_{12} = 2\int_b^B \frac{\psi(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)g(v)}},$$

et

$$2\omega_{21} = 2\int_a^A \frac{\chi(u)\,du}{\sqrt{(u-a)(A-u)f(u)}},$$

$$2\omega_{22} = 2\int_b^B \frac{\omega(v)\,dv}{\sqrt{(v-b)(B-v)g(v)}}.$$

On doit partout donner aux radicaux le signe positif. De plus, tous les couples de valeurs x, y, qui donnent le même couple de valeurs u_1, v_1 appartenant au domaine $\mathfrak{G}$, seront représentés par les formules

$$x = \pm x_1 + 2m_1\omega_{11} + 2m_2\omega_{21},$$
$$y = \pm y_1 + 2m_1\omega_{12} + 2m_2\omega_{22},$$

où m_1 et m_2 désignent des entiers quelconques, et où le couple de valeurs x_1, y_1 appartient au domaine

$$x = \rho\omega_{11} + \sigma\omega_{21}, \qquad y = \rho\omega_{21} + \sigma\omega_{22} \qquad [\rho, \sigma = (0 \ldots 1)],$$

et est le seul de l'espèce requise faisant partie de ce domaine.

3. Il a été déjà remarqué (Stäckel, *Math. Annalen*, t. XXV, p. 95; 1889. Staude, *Journal für Mathematik*, t. CV, p. 322; 1890) que le précédent théorème peut être avantageusement employé dans l'étude des lignes géodésiques sur les surfaces en question; mais cette remarque n'a pas été mise à profit depuis. C'est ce que nous allons faire ici, et nous démontrerons en particulier ce théorème :

Les lignes géodésiques, au cas où le théorème de M. Staude est applicable, ou bien sont fermées, ou bien recouvrent une certaine région de la surface d'une manière partout dense.

Pour arriver à identifier les deux systèmes d'équations dont il s'agit, on doit poser

$$\varphi(u) = \mathrm{U}(u), \qquad \psi(v) = -\mathrm{V}(v),$$
$$\chi(u) = 1, \qquad \omega(v) = -1,$$
$$(u-a)(\mathrm{A}-u)f(u) = \mathrm{U}(u) - \alpha, \quad (v-b)(\mathrm{B}-v)\,g(v) = \alpha - \mathrm{V}(v),$$

et chercher à voir quand seront remplies les quatre conditions requises pour que le théorème de M. Staude ait lieu.

Puisque l'expression

$$[\mathrm{U}(u) - \mathrm{V}(v)](du^2 + dv^2)$$

représente le carré de l'élément linéaire de la surface en question, il est clair que les fonctions $\mathrm{U}(u)$ et $\mathrm{V}(v)$ sont uniformes. Cependant, elles peuvent cesser d'être finies et continues en certains points et lignes singulières que l'on marquera sur la surface. On reconnaît aussi que, en général, $\mathrm{U}(u) - \mathrm{V}(v)$ doit être positif et ne peut s'évanouir qu'en certains points singuliers que l'on marquera de même sur la surface. On regardera enfin comme lignes singulières les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ pour lesquelles $\mathrm{U}(u)$ et $\mathrm{V}(v)$ s'évanouissent en changeant de signe. Alors, sur une portion de surface $\mathfrak{F}$, qui ne renferme aucun des points et lignes singulières précitées, les conditions 1, 3 et 4 (p. 194) seront remplies.

Maintenant, si l'on considère un point u_0, v_0 qui est situé à l'intérieur d'une telle portion de surface $\mathfrak{F}$, on reconnaît que de ce point sont issues une infinité de lignes géodésiques dont chacune est caractérisée par la direction de la tangente au point u_0, v_0 ou, ce qui revient au même, par la valeur du rapport

$$p = \frac{dv}{du}$$

en ce point. Si le point mobile se trouve au point u_0, v_0

au temps $t = 0$, les équations intégrales du mouvement seront les suivantes :

$$\int_a^u \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^v \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}} = t + \int_a^{u_0} \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

$$\int_a^u \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^v \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}} = \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}}.$$

Dans ces formules, la constante α est déterminée d'une manière univoque par la valeur initiale p_0 de p ; en effet, de l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{U(u_0)-\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha - V(v_0)}}\,p_0 = 0,$$

on tire

$$\alpha = \frac{V(v_0) + U(u_0)\,p_0^2}{1 + p_0^2}.$$

Par conséquent, lorsque p_0^2 parcourt l'intervalle $(0\ldots+\infty)$, α parcourt d'une manière continue les valeurs de $V(v_0)$ à $U(u_0)$.

Si l'on attribue à la constante α une valeur déterminée de l'intervalle $[V(v_0)\ldots U(u_0)]$, on devra faire la discussion des expressions

$$U(u) - \alpha = \frac{U(u) - V(v_0) + [U(u) - U(u_0)]\,p_0^2}{1 + p_0^2}$$

et

$$\alpha - V(v) = \frac{V(v_0) - V(v) + [U(u_0) - V(v)]\,p_0^2}{1 + p_0^2}.$$

Au point u_0, v_0, les deux expressions ont chacune une valeur essentiellement positive, et tout revient donc à voir si les équations $U(u) - \alpha = 0$ et $\alpha - V(v) = 0$ possèdent chacune deux racines simples rangées par ordre de grandeur a et A, b et B entre lesquelles soient respectivement situées u_0 et v_0. C'est lorsque ceci a lieu, et seulement alors, que la condition 2 est remplie (p. 194).

Mais, pour que les conditions 1, 3, 4 demeurent vérifiées, il faut que le domaine

$$a \leqq u \leqq A, \qquad b \leqq v \leqq B,$$

que l'on désignera par $\mathfrak{G}_a$, soit situé tout entier à l'intérieur d'une portion de surface $\mathfrak{F}$ de la propriété précitée. Quand ce fait aura lieu, nous nommerons α une valeur *admissible* et $\mathfrak{G}_a$ un domaine *admissible*.

Soit alors α_0 une valeur admissible de α, on aura, par suite,

$$\begin{aligned} U(u) - \alpha_0 &= (u - a_0)(A_0 - u) f_0(u), \\ \alpha_0 - V(v) &= (v - b_0)(B_0 - v) g_0(v), \end{aligned}$$

expressions où $f_0(u)$ et $g_0(v)$ seront essentiellement positifs dans le domaine $\mathfrak{G}_{\alpha_0}$. Si, maintenant, nous faisons varier α de α_0 à α_1, valeur suffisamment voisine de α_0, de la continuité de $U(u)$ et de $V(v)$ résulte qu'à α_1 correspondront des couples de racines a_1 et A_1, b_1 et B_1 de la propriété exigée et il résulte aussi que, pour une valeur suffisamment petite de la différence $\alpha_1 - \alpha_0$, le domaine $\mathfrak{G}_{\alpha_1}$ sera admissible. Par conséquent, lorsque le théorème de M. Staude est vérifié pour une valeur initiale p_0, il l'est également pour un intervalle tout entier $p = (p_1, \ldots, p_2)$ de valeurs initiales à l'intérieur duquel est situé p_0, ou, si l'on emploie le langage de la Géométrie, il existera un certain espace angulaire de directions initiales issues du point u_0, v_0. Il se peut que cet espace angulaire renferme toutes les directions initiales, comme il se peut, au contraire, qu'il n'en renferme qu'une partie et, dans ce cas, il peut aussi exister plusieurs espaces angulaires séparés de directions initiales qui, ou bien sont adjacents, ou bien sont séparés par des espaces angulaires de directions initiales inadmissibles.

4. Ces préliminaires posés, soit α une valeur initiale à laquelle correspond un domaine admissible $\mathfrak{G}_\alpha$. Si, dans les équations intégrales du mouvement, on suppose les seconds membres remplacés par x et par y, d'après le théorème de M. Staude, u et v seront alors définis comme fonctions uniformes, finies, continues et paires des arguments x et y, fonctions doublement périodiques admettant les systèmes de périodes

$$2\omega_{11} = 2\int_a^A \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}}, \qquad 2\omega_{12} = 2\int_b^B \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha-V}},$$

et

$$2\omega_{21} = 2\int_a^A \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}}, \qquad 2\omega_{22} = \int_b^B \frac{dv}{\sqrt{\alpha-V}}.$$

Dans ces fonctions u et v de x et y, on doit alors poser

$$x = t + \int_a^{u_0} \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha-V}},$$

$$y = \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\alpha-V}},$$

pour que u et v soient des fonctions uniformes, finies et continues de t. Comme u et v, regardées comme fonctions de x, y, sont développables en séries de Fourier à deux variables, procédant suivant les multiples des arguments

$$\xi = \pi\frac{x\omega_{22} - y\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}}, \qquad \eta = \pi\frac{-x\omega_{21} + y\omega_{11}}{\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}},$$

u et v peuvent être représentées comme fonctions de t par des séries trigonométriques doublement infinies, procédant suivant les sinus et cosinus de multiples de deux fonctions linéaires du temps t. (*Comp.* Staude, *Math. Annalen*, t. XXIX, p. 484; 1887.)

On peut démontrer que les courbes que l'on obtient quand on fait u et v égales aux fonctions de t ainsi définies *ou bien sont fermées, ou bien recouvrent le domaine* $\mathfrak{G}_\alpha$ *d'une manière partout dense*.

En effet, si u_1, v_1 est un point quelconque du domaine $\mathfrak{G}_\alpha$, pouvant aussi coïncider avec le point u_0, v_0, u et v regardés d'abord encore comme fonctions de x et y prendront les valeurs u_1, v_1 pour

$$x = x_1 + 2m_1\omega_{11} + 2m_2\omega_{21},$$
$$y = y_1 + 2m_1\omega_{12} + 2m_2\omega_{22},$$

m_1 et m_2 désignant encore des nombres entiers quelconques et x et y appartenant au domaine

$$x = \rho\omega_{11} + \sigma\omega_{21}, \qquad y = \rho\omega_{12} + \sigma\omega_{22} \qquad [\rho, \sigma = (0\ldots 1)].$$

En poursuivant la discussion on voit qu'il faut distinguer deux cas essentiellement différents.

Premièrement, si le rapport

$$\frac{\omega_{12}}{\omega_{22}} = q$$

n'a pas une valeur rationnelle on peut, en vertu d'un théorème connu (*Comp.*, par exemple, KRONECKER, *Berliner Sitzungsberichte*, p. 107; 1884; *Œuvres*, t. III, p. 31), déterminer une infinité de nombres entiers μ_1, μ_2, tels que

$$y_1 + 2\mu_1\omega_{12} + 2\mu_2\omega_{22}$$

prenne une valeur aussi rapprochée que l'on voudra d'une valeur donnée y_2. Mais de la continuité des fonctions u et v de x et y, il s'ensuit alors qu'aux valeurs

$$x = x_1 + 2\mu_1\omega_{11} + 2\mu_2\omega_{21},$$
$$y = y_2,$$

correspondent des valeurs u_2 et v_2 de u et v qui diffèrent aussi peu que l'on voudra de u_1 et v_1.

Revenant alors aux lignes géodésiques et faisant

$$y_2 = \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}},$$

il s'ensuit qu'au temps

$$t = x_1 + 2\mu_1\omega_{11} + 2\mu_2\omega_{21} - \int_a^{u_0} \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}}$$

le point mobile arrive en un point u_2, v_2, aussi rapproché que l'on voudra du point donné u_1, v_1 ; et cela arrive aussi souvent que l'on voudra parce qu'il y a une infinité de paires d'entiers μ_1 et μ_2 de la propriété requise. Il en résulte immédiatement que *la ligne géodésique considérée remplit le domaine* $\mathfrak{G}_\alpha$ *d'une manière partout dense.*

Deuxièmement, supposons que q ait une valeur rationnelle; soient alors g_1 et g_2 les deux nombres entiers premiers entre eux pour lesquels on a

$$2g_1\omega_{12} + 2g_2\omega_{22} = 0,$$

tandis que

$$2g_1\omega_{11} + 2g_2\omega_{21} = 2\Omega$$

a une valeur positive; comme

$$\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21} = \int_a^A \int_b^B \frac{(U-V)\,du\,dv}{\sqrt{U-\alpha}\sqrt{\alpha-V}}$$

a une valeur essentiellement positive, différente de zéro, Ω ne peut être jamais nul. Dans ce cas alors u et v prendront au temps

$$t = 2g_1\omega_{11} + 2g_2\omega_{21}$$

exactement les mêmes valeurs, u_0 et v_0, qu'ils avaient au temps $t = 0$, car le couple de valeurs u_0, v_0 pour g_1

et g_2 entiers correspond à

$$x = 2g_1\omega_{11} + 2g_2\omega_{21} + \int_a^{u_0} \frac{U\,du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{V\,dv}{\sqrt{\alpha - V}}$$

$$y = 2g_1\omega_{12} + 2g_2\omega_{22} + \int_a^{u_0} \frac{du}{\sqrt{U-\alpha}} - \int_b^{v_0} \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}}.$$

Par conséquent, nous sommes en présence *d'un mouvement périodique de période* 2Ω, *et les lignes géodésiques sont des courbes fermées qui ont leur cours à l'intérieur du domaine* $\mathfrak{G}_\alpha$.

Si l'on fait varier α de sorte que cette quantité varie d'une manière continue, depuis une valeur admissible α_0 jusqu'à une valeur admissible voisine α_1, on peut démontrer sans peine que les périodes $2\omega_{12}$ et $2\omega_{22}$ éprouveront alors des variations continues, et, puisque

$$\omega_{22} = \int_b^B \frac{dv}{\sqrt{\alpha - V}}$$

est différent de zéro, il en sera aussi de même du rapport

$$q = \frac{\omega_{12}}{\omega_{22}},$$

à moins que q ne soit indépendant de α et ne conserve toujours la même valeur. Pour nous débarrasser de suite de ce cas d'exception, faisons remarquer que dans ce cas, pour les valeurs admissibles de α qui sont voisines de la valeur α_0, les trajectoires du point mobile seront toutes, selon que q est rationnel ou irrationnel, des courbes fermées ou des courbes partout denses. Mais lorsque q dépend de α, q parcourra d'une manière continue un intervalle $(q_0 \ldots q_1)$. Comme les valeurs rationnelles de q y sont distribuées d'une manière partout dense il en est de même de ces valeurs de la grandeur α dans l'intervalle $(\alpha_0 \ldots \alpha_1)$ qui donnent des trajectoires fermées, c'est-à-dire en d'autres termes : exception faite du cas d'exception précité, *dans un espace angulaire de directions initiales admissibles, les directions initiales qui donnent des trajectoires fermées sont distribuées d'une manière partout dense; elles ont donc la puissance de l'ensemble des nombres entiers.*

5. Attirons ici l'attention sur cette circonstance, qu'il y a des surfaces de la nature de celles en question où la condition 2 n'est vérifiée en aucun point.

Il en est ainsi, par exemple, lorsque U ou V se réduit à une constante, c'est-à-dire par conséquent lorsque la surface est applicable sur une *surface de révolution.* Une discussion plus approfondie révèle un fait, relatif à ces surfaces, qui mérite d'être signalé. Si la surface est de révolution, dans certaines hypothèses que j'ai précisées dans ma *Dissertation Inaugurale* (Berlin, 1885), les lignes géodésiques ont la propriété suivante : en général, ou bien elles recouvrent d'une manière partout dense un domaine limité par deux parallèles, ou bien elles ont un cours fermé à l'intérieur de domaine. Mais si l'on considère les hélicoïdes déterminés par Bour (*Journal de l'École Polytechnique,* Cahier XXXIX, p. 82; 1862) qui proviennent par déformation de la surface de révolution, l'on verra que les lignes géodésiques correspondantes ne possèdent en général ni l'une ni l'autre de ces propriétés. Cela tient à ce qu'il faut regarder la surface de révolution comme formée d'une infinité de couches superposées qui sont déroulées pendant la déformation.

Déformons, par exemple, l'alysséide

$$x = \sqrt{u^2 + a^2}\cos v, \qquad y = \sqrt{u^2 + a^2}\sin v, \qquad z = \int \frac{a\,du}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

en l'hélicoïde réglé à plan directeur :

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = dv,$$

les parallèles se transformant en hélices, et les méridiens en lignes droites. Si l'on fait croître ici v depuis v_0 jusqu'à $v_0 + 2\pi$, il est clair que sur la surface de révolution un méridien tournant de 360° parcourt toute la surface, tandis que sur l'hélice une droite tourne de 360° et éprouve en même temps un déplacement en hauteur de a pour un tour de la surface. Une ligne géodésique, qui sur la surface de révolution coupe pour la seconde fois le même méridien, entre dans un nouveau tour de l'hélicoïde, et ne peut donc ni se fermer, ni revenir dans le voisinage du point initial du mouvement.

De là résulte que la considération seule de l'équation différentielle des lignes géodésiques commune à toutes les surfaces de déformation ne suffit pas toujours pour donner une idée de leurs rapports de forme et que la nature des surfaces de déformation particulières que l'on considère peut jouer sur ce point un rôle essentiel.

Une autre question serait celle de savoir ce qui se présente au lieu du théorème de M. Staude quand les conditions relatives aux fonctions $\varphi(u)$, $\chi(u)$, $f(u)$; $\psi(u)$, $\omega(v)$, $g(v)$ ne sont pas vérifiées. Une étude plus approfondie montre que le théorème reste vrai dans ses parties essentielles, lorsque le déterminant $\varphi\omega - \psi\chi$ s'évanouit en des points isolés, de façon qu'il n'est pas nécessaire de faire une exception pour les points de la surface où $ds = 0$. Au contraire, la condition qui exige que $\varphi(u)$, $\chi(u)$; $\psi(v)$, $\omega(v)$ ne changent pas de signe est tout à fait essentielle et ici s'ouvre alors un champ de nouvelles recherches qui fournirait de fructueux problèmes, d'abord sur des exemples simples, puis sur des types plus généraux.

[F2e]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA FONCTION ζ;

PAR M. E. FABRY.

Considérons la fonction ζ de Weierstrass, définie par la série

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right),$$

où $w = 2m\omega + 2n\omega'$, m et n prenant toutes les valeurs entières positives et négatives, y compris zéro, sauf le système $m = n = 0$.

Soit

$$\delta = \omega'\zeta(\omega) - \omega\zeta(\omega');$$

on sait que $\delta = \pm \frac{\pi i}{2}$, le signe étant celui du coefficient de i dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$. Cette relation peut se déduire des propriétés du développement de $\zeta(u) - \frac{u}{\omega}\zeta(\omega)$ en série trigonométrique. Je vais montrer qu'on peut l'obtenir directement par la sommation des séries qui définissent δ.

On a

$$\delta = \frac{\omega'}{\omega} - \frac{\omega}{\omega'} + \sum{}' \left(\frac{\omega'}{\omega - w} - \frac{\omega}{\omega' - w} + \frac{\omega' - \omega}{w} \right).$$

Supposons que m varie de $-M$ à $+M$, et n de $-N$ à $+N$. Dans l'expression

$$\omega - w = -2n\omega' + (1-2m)\omega,$$

$1-2m$ prend les valeurs impaires de $1-2M$ à $1+2M$ et $2n$ les valeurs paires de $-2N$ à $+2N$. Les termes sont deux à deux égaux et de signes contraires, sauf les termes $-2n\omega' + (1 + 2M)\omega$, et le terme $-\omega$, car pour $m = n = 0$, le terme $+\omega$ est supprimé; donc les termes de $\sum' \frac{\omega'}{\omega - w}$ se réduisent à

$$-\frac{\omega'}{\omega} + \sum_{n=-N}^{+N} \frac{\omega'}{(2M+1)\omega - 2n\omega'}.$$

De même, dans $\sum' \frac{-\omega}{\omega' - w}$, les termes se détruisent deux à deux, et il reste

$$\frac{\omega}{\omega'} - \sum_{m=-M}^{+M} \frac{\omega}{(2N+1)\omega' - 2m\omega}.$$

Les termes de $\sum' \frac{1}{w}$ disparaissent tous.

δ sera donc égal à la limite, lorsque M et N deviennent infinis, de l'expression

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{\omega'}{(2M+1)\omega - 2n\omega'} - \sum_{-M}^{+M} \frac{\omega}{(2N+1)\omega' - 2m\omega}.$$

Cette limite est la même que celle de l'expression

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{\omega'}{2(M\omega - n\omega')} - \sum_{-M}^{+M} \frac{\omega}{2(N\omega' - m\omega)},$$

car leur différence est

$$-\sum_{-N}^{+N} \frac{\omega\omega'}{[(2M+1)\omega - 2n\omega'](2M\omega - 2n\omega')}$$
$$+\sum_{-M}^{+M} \frac{\omega\omega'}{[(2N+1)\omega' - 2m\omega](2N\omega' - 2m\omega)}.$$

Soient ρ le module de ω, ρ' celui de ω', θ l'argument de $\frac{\omega'}{\omega}$. On a

$$\begin{aligned}|m\omega + n\omega'|^2 &= m^2\rho^2 + n^2\rho'^2 + 2mn\rho\rho'\cos\theta \\ &= (1-\cos\theta)(m^2\rho^2+n^2\rho'^2) + \cos\theta(m\rho+n\rho')^2 \\ &= (1+\cos\theta)(m^2\rho^2+n^2\rho'^2) - \cos\theta(m\rho-n\rho')^2,\end{aligned}$$

et, quel que soit le signe de $\cos\theta$,

$$|m\omega + n\omega'|^2 > (m^2\rho^2+n^2\rho'^2)[1-|\cos\theta|].$$

$\sum\limits_{-N}^{+N} \frac{\omega\omega'}{[(2M+1)\omega - 2n\omega')](2M\omega - 2n\omega')}$ a donc un module plus petit que

$$\frac{\rho\rho'}{1-|\cos\theta|}\sum_{-N}^{+N}\frac{1}{4(M^2\rho^2+n^2\rho'^2)};$$

or

$$\begin{aligned}&\sum_{-N}^{+N}\frac{1}{M^2\rho^2+n^2\rho'^2} \\ &= \frac{1}{M^2\rho^2} + 2\sum_{1}^{N}\frac{1}{M^2\rho^2+n^2\rho'^2} < \frac{1}{M^2\rho^2} + 2\int_0^\infty \frac{dx}{M^2\rho^2+x^2\rho'^2} \\ &= \frac{1}{M^2\rho^2} + \frac{\pi}{M\rho\rho'},\end{aligned}$$

qui tend vers zéro, lorsque M devient infini. Le même résultat s'applique au second terme, qui a une forme symétrique.

Donc 2δ est égal à la limite de

$$\sum_{-N}^{+N}\frac{\omega'}{M\omega - n\omega'} - \sum_{-M}^{+M}\frac{\omega}{N\omega' - m\omega}.$$

Ces sommes peuvent se remplacer par des intégrales définies. Considérons, en effet, la somme

$$\sum_{-N}^{+N}\frac{1}{n+a+bi} = \sum_{-N}^{+N}\frac{n+a-bi}{(n+a)^2+b^2},$$

et supposons $2b > 1$. $\frac{x}{x^2+b^2}$ croît avec x, si x est compris entre $-b$ et $+b$, et décroît dans les autres cas. On a donc

$$\frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} < \int_n^{n+1} \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\,dx,$$

si $n+a$ est compris entre $-b$ et $b-1$, et

$$\frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} < \int_{n-1}^{n} \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\,dx,$$

si $n+a$ est compris entre $-\infty$ et $-b$ ou entre $b+1$ et $+\infty$. En outre, si $n+a$ est compris entre $b-1$ et b, le plus petit des deux termes $\frac{n+a}{(n+a)^2+b^2}$, $\frac{n+a+1}{(n+a)^2+b^2}$ est plus petit que $\int_n^{n+1} \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\,dx$, si l'on suppose $b-1 > -b$, ou $b > \frac{1}{2}$.

Il en résulte que l'on a, quel que soit a,

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} < \frac{1}{b} + \int_{-N}^{+N} \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{b} + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{(N+a)^2+b^2}{(a-N)^2+b^2}.$$

On obtient, de la même manière, l'inégalité

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} > -\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{(N+a)^2+b^2}{(a-N)^2+b^2}.$$

Si b augmente indéfiniment, avec N

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{n+a}{(n+a)^2+b^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{(N+a)^2+b^2}{(a-N)^2+b^2}$$

tend vers zéro.

De même, $\frac{b}{x^2+b^2}$, où $b > 0$, a un seul maximum, pour $x = 0$. On en déduit, quel que soit a,

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{b}{(n+a)^2+b^2} < \frac{1}{b} + \int_{-N}^{+N} \frac{b\,dx}{(x+a)^2+b^2},$$

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{b}{(n+a)^2+b^2} > -\frac{1}{b} + \int_{-N}^{+N} \frac{b\,dx}{(x+a)^2+b^2}$$

$$= -\frac{1}{b} - \text{arc tang}\,\frac{b}{N+a} + \text{arc tang}\,\frac{b}{a-N},$$

où les arcs sont compris entre 0 et π, afin que arc tang $\frac{b}{x}$ varie d'une façon continue lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

N étant positif, on a, quel que soit a,

$$\text{arc tang}\,\frac{b}{N+a} < \text{arc tang}\,\frac{b}{a-N}$$

et

$$\text{arc tang}\,\frac{b}{N+a} - \text{arc tang}\,\frac{b}{a-N} = -\,\text{arc tang}\,\frac{2Nb}{a^2+b^2-N^2},$$

ces trois arcs étant compris entre 0 et π.

Si b augmente indéfiniment, $\sum\limits_{-N}^{+N} \frac{1}{n+a+bi}$ a la même limite que

$$\frac{1}{2}\,L\,\frac{(N+a)^2+b^2}{(a-N)^2+b^2} + i\left(\text{arc tang}\,\frac{b}{N+a} - \text{arc tang}\,\frac{b}{a-N}\right)$$

$$= L(N+a+bi) - L(a-N+bi)$$

$$= L\left(\frac{a+N+bi}{a-N+bi}\right),$$

où L désigne la valeur du logarithme, dont le coefficient de i est compris entre $-\pi$ et π. Pour les deux premiers, ce coefficient est positif; pour le dernier, il est compris entre 0 et $-\pi$.

Si α est une quantité imaginaire, dont le coefficient de i tend vers $+\infty$, en même temps que le nombre entier N,

$$\sum_{-N}^{+N} \frac{1}{n+\alpha} - L\frac{\alpha+N}{\alpha-N}$$

tend vers zéro, ce logarithme ayant le coefficient de i compris entre o et $-\pi$.

Si $\frac{\omega'}{\omega}$ et, par suite, $\frac{-\omega}{\omega'}$ ont le coefficient de i positif, on a

$$2\delta = \mathrm{Lim} - \sum_{-N}^{+N} \frac{1}{n - M\frac{\omega}{\omega'}} - \sum_{-M}^{+M} \frac{1}{m + N\frac{\omega'}{\omega}},$$

la limite est la même que celle de

$$-L\frac{-M\frac{\omega}{\omega'}+N}{-M\frac{\omega}{\omega'}-N} - L\frac{N\frac{\omega'}{\omega}+M}{N\frac{\omega'}{\omega}-M}$$

ou

$$-L\frac{M\omega - N\omega'}{M\omega + N\omega'} - L\frac{M\omega + N\omega'}{N\omega' - M\omega} = -L(-1).$$

Si l'on pose

$$L\frac{M\omega - N\omega'}{M\omega + N\omega'} = a + bi,$$

on aura

$$L\frac{M\omega + N\omega'}{N\omega' - M\omega} = -a - (\pi + b)i,$$

car b et $\pi - b$ doivent être compris entre o et $-\pi$, et L(-1) représente ici la valeur $-\pi i$. On a donc

$$\delta = \frac{\pi i}{2}.$$

Si le coefficient de i, dans $\frac{\omega'}{\omega}$, était négatif, il est clair que l'on devrait changer les signes des logarithmes et, par suite, de δ.

[B1a]

THÉORÈME RELATIF AUX MINEURS D'UN DÉTERMINANT;

PAR M. VOGT,

Professeur à l'Université de Nancy.

M. Netto a démontré (*Acta mathematica*, t. XVII, et *Journal de Crelle*, t. 114) plusieurs théorèmes relatifs aux mineurs d'un déterminant; l'un d'entre eux en particulier est susceptible d'applications à la théorie des formes binaires; je me propose de donner de ce théorème une démonstration plus élémentaire que celle de M. Netto.

Soit

$$D = |a_i^j| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

un déterminant d'ordre n dont les éléments ne sont soumis à aucune restriction, et soit d un de ses mineurs d'ordre q; D et d sont différents de zéro; pour simplifier nous supposerons que les éléments de d sont contenus dans les q premières lignes et les q premières colonnes de D, c'est-à-dire que l'on a

$$d = |a_i^j| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, q < n).$$

Désignons par A_r^s le mineur du déterminant D obtenu en bordant d par les éléments de la $r^{\text{ième}}$ et de la $s^{\text{ième}}$ colonne, c'est-à-dire

$$A_r^s = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^q & a_1^s \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^q & a_2^s \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_q^1 & a_q^2 & \ldots & a_q^q & a_q^s \\ a_r^1 & a_r^2 & \ldots & a_r^q & a_r^s \end{vmatrix};$$

les mineurs A_r^s, pour r et s variant de $q+1$ à n, sont les éléments d'un déterminant d'ordre $n-q$ que nous désignons par

$$\Delta = | A_r^s | \qquad (r, s = q+1, \ldots, n).$$

Nous nous proposons d'évaluer le déterminant Δ au moyen de D et de d, et les mineurs du premier ordre de Δ au moyen de d et des mineurs du premier ordre de D.

Considérons le système suivant de n équations linéaires à n inconnues :

$$\begin{array}{l}
a_1^1 \quad x_1 + a_1^2 \quad x_2 + \ldots + a_1^n \quad x_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_q^1 \quad x_1 + a_q^2 \quad x_2 + \ldots + a_q^n \quad x_n = 0, \\
a_{q+1}^1 x_1 + a_{q+1}^2 x_2 + \ldots + a_{q+1}^n x_n = u_{q+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_n^1 \quad x_1 + a_n^2 \quad x_2 + \ldots + a_n^n \quad x_n = u_n,
\end{array}$$

les seconds membres des q premières étant nuls, et ceux des suivantes étant des quantités arbitraires $u_{p+1}, \ldots, u_n$; nous allons évaluer les valeurs des inconnues x_{q+1}, $x_{q+2}, \ldots, x_n$ satisfaisant à ces équations; comme le déterminant D n'est pas nul, nous avons en général

$$(1) \quad x_s = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial D}{\partial a_{q+1}^s} u_{q+1} + \frac{\partial D}{\partial A_{q+2}^s} u_{q+2} + \ldots + \frac{\partial D}{\partial a_n^s} u_n\right).$$

Nous pouvons encore résoudre le système précédent d'équations en éliminant d'abord $x_1, x_2, \ldots, x_q$ entre les q premières et chacune des suivantes, puis tirant $x_{q+1}, \ldots, x_n$ des équations ainsi formées. L'élimination des q premières inconnues entre les q premières équations et celle de rang r donne

$$\begin{vmatrix}
a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^q & a_1^{q+1} x_{q+1} + \ldots + a_1^n x_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_q^1 & a_q^2 & \ldots & a_q^q & a_q^{q+1} x_{q+1} + \ldots + a_q^n x_n \\
a_r^1 & a_r^2 & \ldots & a_r^q & a_r^{q+1} x_{q+1} + \ldots + a_r^n x_n - u_r
\end{vmatrix} = 0$$

ou bien

$$A_r^{q+1} x_{q+1} + A_r^{q+2} x_{q+2} + \ldots + A_r^n x_n = du_r.$$

En donnant à r les valeurs $q+1, q+2, \ldots, n$, on a $n-q$ équations linéaires, dont la solution est donnée par la formule générale

$$(2) \qquad x_s = \frac{d}{\Delta}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial A_{q+1}^s} u_{q+1} + \frac{\partial\Delta}{\partial A_{q+2}^s} u_{q+2} + \ldots + \frac{\partial\Delta}{\partial A_n^s} u_n\right);$$

les valeurs (1) et (2) des inconnues d'indice supérieur à q, fournies par les deux méthodes, doivent être les mêmes, et comme cela a lieu quelles que soient les valeurs attribuées aux indéterminées $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots, u_n$, il faut que ces indéterminées aient les mêmes coefficients : on déduit de là la relation générale

$$(3) \qquad \frac{d}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial A_r^s} = \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial a_r^s}.$$

Considérons maintenant les deux déterminants dont les éléments sont les deux membres de l'équation précédente lorsque r et s varient de $q+1$ à n, et écrivons qu'ils sont égaux; nous avons

$$\frac{d^{n-q}}{\Delta^{n-q}}\left|\frac{\partial\Delta}{\partial A_r^s}\right| = \frac{1}{D^{n-q}}\left|\frac{\partial D}{\partial a_r^s}\right|,$$

mais d'après les théorèmes connus sur les mineurs du premier ordre d'un déterminant, nous avons

$$\left|\frac{\partial\Delta}{\partial A_r^s}\right| = \Delta^{n-q-1}, \qquad \left|\frac{\partial D}{\partial a_r^s}\right| = D^{n-q-1} d;$$

en remplaçant ces déterminants par leurs valeurs, nous en déduisons la relation fondamentale

$$(4) \qquad \Delta = D\, d^{n-q-1};$$

la formule (3) donne ensuite

$$(5) \qquad \frac{\partial\Delta}{\partial A_r^s} = d^{n-q-2}\frac{\partial D}{\partial a_r^s}.$$

Les égalités (4) et (5) constituent le théorème que nous voulions démontrer; elles sont établies en supposant que D et d ne sont pas nuls; comme ce sont des identités dont les deux membres sont des fonctions entières des éléments a_i^j, elles ont encore lieu lorsque ces éléments prennent des valeurs particulières pour lesquelles D ou d sont nuls; elles sont par suite générales.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1900. — COMPOSITIONS.

Rennes.

Analyse.

Épreuve écrite. — 1° *Vérifier que les tangentes à la courbe représentée par les équations*

$$(1)\qquad \begin{cases} x = t^2 f''(t) - 2t f'(t) + 2f(t), \\ y = f''(t), \\ z = t f''(t) - f'(t), \end{cases}$$

où t désigne un paramètre variable, sont parallèles aux génératrices d'un cône du second degré, et montrer que toute courbe dont les tangentes sont parallèles aux génératrices de ce cône peut être représentée par les équations (1).

2° *Former l'équation aux dérivées partielles du premier ordre des surfaces enveloppes des plans osculateurs des courbes* (1) *quand on y regarde $f(t)$ comme une fonction arbitraire.*

3° *Intégrer l'équation trouvée*

$$4pq - 1 = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale double*

$$\iint \frac{dx\,dy}{(x+y)^3}$$

étendue à l'aire du triangle formé par les trois droites

$$x - 1 = 0, \qquad y - 1 = 0, \qquad x + y - 3 = 0:$$

1° *Par la méthode directe;*

2° *En effectuant d'abord le changement de variables défini par les formules*

$$X - \frac{x-1}{x+y}, \qquad Y = \frac{y-1}{x+y}.$$

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On donne un centre d'action* O, *une droite* AB *et, dans le plan* ABO, *la famille de circonférences dont chacune a, avec* O, *la droite* AB *pour axe radical.*

Montrer qu'il existe une force répulsive émanant de O *et dépendant de la distance et de l'angle polaire qui peut, pour des conditions initiales convenables, faire mouvoir sur ces diverses circonférences des mobiles de même masse.*

Considérant celle de ces circonférences qui est vue de O *sous l'angle droit, on peut donner à la force correspondante la forme* $\frac{\mu}{r^2}$, *où* μ *est une fonction de l'angle polaire* θ; *trouver les autres mouvements que cette force peut faire décrire et, en particulier, ceux qui sont circulaires.*

Étudier dans les deux cas les mouvements qui se *produisent et en spécifier les conditions initiales, les mobiles étant supposés placés sur la droite qui projette* O *sur* AB.

La force considérée étant de la forme $r^{-2}\varphi(\theta)$ étudiée par Jacobi, le problème peut se ramener à des quadratures.

Épreuve pratique. — *Le centre d'une boule homogène pesant* 400^{gr} *est soutenu à* 1^{m} *de distance au-dessous d'un point fixe* O *par un cordon en repos attaché en ce point. On imprime à cette boule, suivant une des horizontales de son centre, une percussion assez forte pour qu'elle s'élève au-dessus de* O, *et pas suffisante pour que le mouvement produit soit révolutif. Dans ces conditions, le cordon se repliera à partir d'une certaine époque* t_1 *et se retendra à une certaine époque postérieure* t_2. *Que doit être l'impulsion initiale pour que toute la force vive possédée par la boule à l'époque* t_2 *soit dépensée uniquement pour tendre le cordon. Calculer les directions du cordon aux époques* t_1, t_2, *et dire en quoi consistera le mouvement succédant à l'époque* t_2.

On reconnaît immédiatement que, d'après les conditions de l'énoncé, la tangente à la trajectoire parabolique, à l'époque t_2, doit passer par le point O. La solution du problème se déduit facilement de cette remarque.

Astronomie.

Épreuve écrite. — *La parallaxe annuelle des étoiles.*

Épreuve pratique. — *La latitude géographique de Rennes (Tour Saint-Mélaine) est* $48°6'55''$. *Trouver la* *latitude géocentrique et la longueur du rayon terrestre en ce point.*

On prendra pour valeur de l'aplatissement

$$c = \frac{1}{292}$$

et, pour le rayon équatorial,

$$R = 6\,378\,393^{m}.$$

Toulouse.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Série de Laurent.*

II. *Les trois coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z d'un point d'une courbe C, exprimée en fonction d'un paramètre t, vérifient le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = y + z,$$
$$\frac{dy}{dt} = z + x,$$
$$\frac{dz}{dt} = x + y:$$

1° *Déterminer les expressions de ces trois coordonnées en fonction de t;*

2° *Montrer que toutes les courbes C satisfaisant à la question sont des courbes planes unicursales qui sont normales à une famille de surfaces dont on demande l'équation.*

III. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$2z - px + qy + q^2 = 0,$$

où p et q désignent les dérivées partielles de la fonc-

tion inconnue z par rapport aux variables indépendantes x et y.

Épreuve pratique. — *On considère l'ellipsoïde qui, rapporté à trois axes rectangulaires, a pour équation*

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1,$$

et qui passe par le point P, *ayant pour coordonnées*

$$x = \frac{6}{7}, \qquad y = \frac{6}{7}, \qquad z = \frac{6}{7}.$$

On demande :

1° *De calculer, en ce point* P, *les rayons de courbure principaux ;*

2° *De déterminer la courbe de l'ellipsoïde pour tous les points de laquelle le produit des rayons de courbure principaux a la même valeur qu'au point* P.

Géométrie supérieure.

Épreuve écrite. — I. *On construit une congruence de droites en menant des droites respectivement perpendiculaires aux plans tangents d'une surface* (Σ) *et l'on suppose que ces droites soient entraînées dans la déformation de la surface* (Σ) :

1° *Démontrer que, pour chacune d'elles, le produit des distances de ses points focaux au plan tangent correspondant de* (Σ) *reste invariable ;*

2° *Indiquer comment on doit particulariser la surface* (Σ) *et la construction des droites pour que la congruence de ces dernières soit toujours formée de normales à une même surface.*

II. *On considère une sphère variable* S *dépendant* *de deux paramètres et dont le centre décrit une surface* (Σ); *démontrer les propositions suivantes :*

1° *Les droites qui joignent chaque point de l'enveloppe des sphères au point correspondant de* (Σ) *demeurent invariablement liées à cette dernière surface quand on la déforme de toutes les manières possibles, chaque point de* (Σ) *entraînant la sphère dont il est le centre;*

2° *La droite joignant les deux points de contact de la sphère* S *avec son enveloppe engendre une congruence dont les développables correspondent à deux familles de courbes conjuguées tracées sur la surface* (Σ), *et les tangentes à ces courbes en un point de* (Σ) *sont perpendiculaires aux points focaux de la corde correspondante;*

3° *Les deux plans tangents à la sphère* S *aux points où elle touche son enveloppe se coupent suivant une droite située dans le plan tangent correspondant de* (Σ). *Les développables de la congruence engendrée par cette droite correspondent à deux familles de courbes conjuguées tracées sur* (Σ); *et les tangentes à ses courbes en un point de* (Σ) *vont couper la droite correspondante de la congruence en ses deux points focaux.*

Indiquer la forme que prennent ces propositions lorsque la surface (Σ) *est une sphère.*

Nota. — *On rappelle les formules*

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial v}-\frac{\partial p_1}{\partial u}=qr_1-rq_1, &&\frac{\partial \xi}{\partial v}-\frac{\partial \xi_1}{\partial u}=\eta r_1-r\eta_1,\\ &\frac{\partial q}{\partial v}-\frac{\partial q_1}{\partial u}=rp_1-pr_1, &&\frac{\partial \eta}{\partial v}-\frac{\partial \eta_1}{\partial u}=r\xi_1-r\xi_1,\\ &\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{\partial r_1}{\partial u}=pq_1-qp_1, &&p\eta_1-\eta p_1+\xi q_1-q\xi_1=0. \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned} \delta x&=dx+(\xi\,du+\xi_1\,dv)+(q\,du+q_1\,dv)z-(r\,du+r_1\,dv)y,\\ \delta y&=dy+(\eta\,du+\eta_1\,dv)+(r\,du+r_1\,dv)x-(p\,du+p_1\,dv)z,\\ \delta z&=dz\qquad\qquad\qquad\qquad\quad+(p\,du+p_1\,dv)y-(q\,du+q_1\,dv)x, \end{aligned}\right.$$

ainsi que celles qui s'en déduisent, dans les cas d'un réseau (u, v) *orthogonal, en y faisant*

$$\xi = A, \qquad \xi_1 = 0,$$
$$\eta = 0, \qquad \eta_1 = C.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'hélicoïde gauche à plan directeur* H, *lieu des points dont les coordonnées rectangulaires* X, Y, Z *sont définies par les équations*

$$X = u \cos v,$$
$$Y = u \sin v,$$
$$Z = av,$$

dans lesquelles u *et* v *désignent des variables indépendantes et* a *une constante.*

Un trièdre rectangle $Mxyz$ *se meut de manière que, dans chacune de ses positions, l'arête* Mz *soit normale en* M *à la surface* H *et l'arête* Mx *tangente à la courbe* (v) *de* H *qui passe au sommet* M.

Exprimer en fonction de u *et* v *les différentes quantités* ξ, η, ξ_1, η_1, p, q, r, p_1, q_1, r_1 *qui figurent dans les formules relatives au trièdre mobile considéré.*

Former pour la surface H *et pour chacune des nappes de sa développée l'équation des lignes de courbure et celle qui détermine les rayons de courbure principaux.*

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une tige homogène pesante, de longueur* l, *porte à ses extrémités deux petits anneaux polis qui glissent, l'un sur un axe vertical* AB, *l'autre sur une parabole verticale ayant pour axe* AB.

Trouver la position d'équilibre de la barre.

L'équilibre est-il stable ou instable?

Examiner les deux cas où la parabole tourne sa concavité vers le bas ou vers le haut.

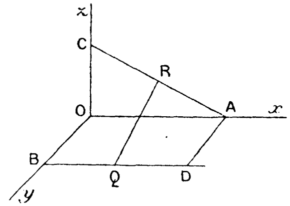
Étudier le mouvement de cette barre.

Calculer les réactions de la parabole et de l'axe.

Cas particulier où $l = p$, p désignant le paramètre de la parabole.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soient trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz. *On trace dans le plan* za (*fig.* 1)

Fig. 1.



une droite AC *et dans le plan* xy *une parallèle* BD *à l'axe* Ox.

Une droite QR *glisse sur* AC *et sur* BD *en restant toujours parallèle au plan* zy.

On demande de déterminer le centre de gravité du solide homogène compris entre les trois plans xy, yz, zx, *et la surface engendrée par la droite mobile* QR.

On donne

$$OA = b, \qquad OB = b, \qquad OC = c.$$

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Déformation du rhomboïde articulé plan. Pivots à révolution complète. Représentation analytique de la déformation. Cas particuliers.*

NOTA. — *On n'admettra aucun résultat relatif à la déformation du quadrilatère quelconque.*

II. S_1, S_2, S_3, S_4 *sont quatre corps solides articulés comme il suit :*

S_1 *a un axe fixe* Δ_1 *et est relié à* S_2 *par un axe* Δ_2 *perpendiculaire à* S_1 *et le rencontrant en* O_1.

S_4 *a un axe fixe* Δ_4 *et est relié à* S_3 *par un axe* Δ_3 *perpendiculaire à* S_4 *et le rencontrant en* O_4.

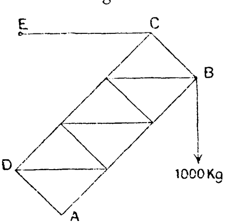
S_2 *et* S_3 *sont reliés par une articulation sphérique de centre* O *tel que* OO_1 *soit perpendiculaire à* Δ_2 *et* OO_4 *perpendiculaire à* Δ_3.

Chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un mouvement de rotation de sens constant de S_1 *autour de* Δ_1 *produise un mouvement de rotation de sens constant de* S_4 *autour de* Δ_4.

Généraliser dans le cas où l'orthogonalité de OO_1 *sur* Δ_2 *et de* OO_4 *sur* Δ_3 *n'existerait plus.*

Épreuve pratique. — *Une poutre articulée droite* ABCD, *formée de triangles rectangles isoscèles, a un point fixe en* A (*fig.* 2). *Elle est articulée en* C *à*

Fig. 2.



une tige CE, *laquelle est articulée en un point fixe* E *choisi de façon que la poutre soit inclinée à* 45° *et que la tige* CE *soit horizontale. Déterminer les réactions et tensions du système sous l'action d'un poids de* 1000^{kg} *attaché en* B *en négligeant le poids propre des barres.*

On construira l'épure à l'échelle de 1^{cm} *par* 100^{kg}.

ASTRONOMIE OU MÉCANIQUE CÉLESTE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Précession des équinoxes; nutation. Définitions; valeurs numériques des arcs et des angles qui interviennent dans la représentation de ces phénomènes.*

Précession annuelle en ascension droite et en déclinaison; formules qui la représentent.

Coordonnées moyennes d'un astre.

Ayant les coordonnées moyennes d'un astre au commencement d'une certaine année, comment trouve-t-on les coordonnées vraies de cet astre à une date quelconque?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une hauteur du bord inférieur du Soleil a été mesurée à Toulouse, dans la matinée, et trouvée égale à*

$$48^\circ 53' 55'',$$

la température étant de 23° *et la pression atmosphérique de* 742^{mm}. *On demande l'heure vraie.*

Données :

Latitude du lieu, $\lambda = 43^\circ 36' 45''$.

Déclinaison du centre du Soleil tirée des éphémérides, $\delta = 18^\circ 16' 36''$.

Demi-diamètre du Soleil $= 15' 51'',5$.

Formule de réfraction

$$R = 60'',6 \frac{H}{760} \frac{1}{1 + \alpha t} \operatorname{tang} z,$$

$\alpha = 0,00366.$

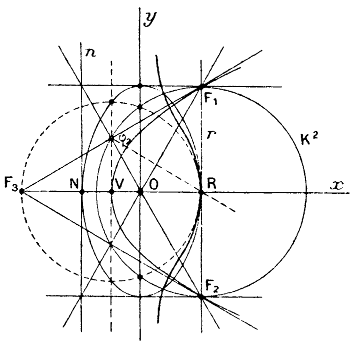
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (CONCOURS DE 1900). MATHÉMATIQUES.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE PAR M. V. RETALI ([1]).

L'équation de la courbe écrite sous la forme

$$(1)\qquad x(x+iy)(x-iy)=a^3z^3$$

montre que la cubique a trois de ses points d'inflexion sur la droite à l'infini $x=0$, dont deux tombent en les points circulaires et l'autre est le point à l'infini y^∞ de l'axe $x=0$. Les droites isotropes issues de l'origine O et



l'axe des y sont les tangentes stationnaires correspondantes, autrement dit : le point O est le foyer triple réel de la cubique, et $x=0$ en est l'asymptote réel.

Les centres des cercles d'inversion de la cubique sont ses points de contact avec les tangentes parallèles à l'asymptote, mais y^∞ étant un point d'inflexion, l'un de ces quatre centres et y^∞ et les trois autres sont les points

([1]) *Voir* l'énoncé, **1900**, p. 430.

où la cubique est coupée par la polaire harmonique du point d'inflexion y^∞, c'est-à-dire par l'axe de symétrie $y=0$. Si ε est une racine complexe de $+1$ les abscisses des centres d'inversion propres, que nous appelons R, P, Q, sont respectivement a, $a\varepsilon$, $a\varepsilon^2$.

Les coniques polaires des quatre centres d'inversion y^∞, R, Q, P sont les polaires réciproques des quatre coniques focales par rapport aux cercles d'inversion correspondants : la première se décompose en l'asymptote d'inflexion $x=0$ et en la polaire harmonique de y^∞, qui est $y=0$; la conique polaire de R est l'ellipse

$$3x^2+y^2=3a^2, \tag{2}$$

que nous appellerons C^2; les deux autres, savoir les coniques polaires de Q et P, sont des ellipses imaginaires de la deuxième espèce C'^2, C''^2 dont on obtient les équations en posant celle de $C^2 a\varepsilon$ et $a\varepsilon^2$ à la place de a.

Le cercle réel d'inversion ayant son centre en R, que nous appellerons K^2, coupe la conique polaire correspandante C^2 en les points de contact des tangentes menées à la cubique de son point R : en prenant R pour pôle, les équations polaires de la cubique et de C^2

$$\rho^3\cos\theta+a\rho^2(1+2\cos^2\theta)+3a^2\rho\cos\theta=0,$$
$$a\rho^2(1+2\cos^2\theta)+6a^2\rho\cos\theta=0$$

donnent $\rho=a\sqrt{3}$, qui est le rayon de K^2. Des quatre cercles d'inversion de la cubique, l'un (celui dont y^∞ est le centre) se décompose donc en l'axe Ox et la droite à l'infini; un est réel, a son centre en R et le rayon $a\sqrt{3}$; les deux autres K_1^2, K_2^2 sont imaginaires de la deuxième espèce, ont respectivement les centres Q et P et les rayons $a\varepsilon\sqrt{3}$, $a\varepsilon^2\sqrt{3}$.

Considérons maintenant le cercle K^2 et la conique polaire correspondante C^2; sur chaque rayon issu de R les deux autres points α_1, α_2 de la cubique sont réciproques par rapport au cercle et conjugués harmoniques par rapport aux points R et A de C^2. La cubique est dans la courbe qui correspond à l'ellipse C^2 par la transformation plane double quadratique spéciale dont R est le pôle, et K^2 est à la fois conique double et conique limite.

Si (x, y) sont les coordonnées rectangulaires de A, en prenant R pour origine et posant $a\sqrt{3} = 2$, les formules de la transformation double sont

$$(3) \qquad x : y : 1 = 2r^2\xi : 2r^2\eta : \xi^2 + \eta^2 + r^2,$$

$$(3\ bis) \qquad \xi : \eta : 1 = rx : ry : r \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}.$$

A une droite $ux + vy + 1 = 0$ décrite en le *plan double* par le point $A(x, y)$ correspond dans le *plan simple* le cercle

$$2r^2(u\xi + v\eta) + \xi^2 + \eta^2 + r^2 = 0$$

qui coupe orthogonalement le cercle d'inversion K^2 sur la droite. Les coniques dégénérées du plan simple correspondent aux droites issues de R (les mêmes droites avec la droite à l'infini) et aux droites tangentes à K^2 (les points de contact considérés comme cercles-points). Les droites du plan simple se transforment en des coniques bitangentes à K^2 menées par R; les courbes du plan double de l'ordre n ayant un point k^{uple} en R donnent des courbes anallagmatiques de l'ordre $2n - k$ avec un point $(n - k)^{\text{uple}}$ en chacun des points circulaires à l'infini. En particulier une conique C^2 du plan double est transformée en une quartique bicirculaire ou bien en une cubique circulaire, selon que C^2 passe ou ne passe pas par R. Les quatre centres d'inversion de la quartique ou de la cubique sont, outre K^2, les trois autres coupant orthogonalement K^2 sur les côtés du triangle conjugué commun à K^2 et C^2 ([1]).

La cubique (1) est l'enveloppe des cercles coupant orthogonalement le cercle K^2 sur les tangentes de l'ellipse (2) ou bien, ce qui est la même chose, l'enveloppe des cercles orthogonaux à K^2 et dont les centres tombent sur la polaire réciproque de C^2 par rapport à K^2. Analoguement pour les deux autres couples de coniques (imaginaires de la deuxième espèce) K_1^2, C'^2 et K_2^2, C''^2. Ces trois polaires réciproques (coniques focales, différentes) sont des paraboles avec le foyer en O; l'équation de celle réelle est

$$y^2 = 2ax + 3a^2,$$

les deux autres sont imaginaires de deuxième espèce, etc.

Si A est un point arbitraire de C^2 et a la tangente correspondante, le cercle orthogonal à K^2 correspondant à a est bitangent à la cubique en les deux points α_1, α_2 : les lieux des centres des cercles bitangents à la cubique sont donc l'axe Ox et les trois paraboles focales.

Par les formules (3) ou par la Géométrie élémentaire ([2]) on voit aisément que le milieu μ du segment $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ est réciproque de A par rapport au cercle d'inversion K^2, donc le lieu des milieux des cordes de contact concourantes en R est la courbe inverse de

---

([1]) Pour l'étude élémentaire de cette transformation double spéciale, dont M. Darboux, Beltrami, M. Killing et autres ont fait des applications importantes, on peut consulter les §§ 1-8 de mon Mémoire *Sur le double contact, etc.* (*Soc. royale des Sciences de Liége*, 2e série, t. XVIII).

([2]) Les deux points $\alpha_1\alpha_2$ étant réciproques par rapport au cercle K^2 et conjugués harmoniques par rapport aux points OA, nous avons

$$O\alpha_1 - O\alpha_2 = 2O\mu, \qquad O\alpha_1\, O\alpha_2 = r^2, \qquad \frac{2}{OA} = \frac{1}{O\alpha_1} + \frac{1}{O\alpha_2} = \frac{2O\mu}{r^2}$$

et par suite

$$O\mu\, OA = r^2.$$

l'ellipse C^2 par rapport à K^2, ou, si l'on veut, la podaire par rapport à R de la parabole focale réelle. Elle est donc une cubique circulaire rationnelle (conchoïde slusienne) avec le point double (isolé) en R, asymptote à l'axe du segment $\overline{OR}$, ... Le lieu des milieux des cordes de contact relatives au pôle y^∞ est évidemment l'axe Ox.

Considérons maintenant deux cordes de contact $\overline{\alpha_1 \alpha_2}$, $\overline{\beta_1 \beta_2}$ qui concourent en le même centre d'inversion, par exemple en R, et soient A et B les points (autres que R) où les droites $|\alpha_1 \alpha_2|$, $|\beta_1 \beta_2|$ coupent l'ellipse C^2 : les quatre points de contact $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tombent évidemment sur le cercle correspondant à la droite $|AB|$ qui coupe orthogonalement le cercle d'inversion K_2 sur la droite $|AB|$.

Si I, J, X sont trois points collinéaires d'une cubique et 1, 2, 3, 4 les intersections de la courbe avec une conique menée par IJ, les trois couples de côtés opposés du quadrangle complet (1, 2, 3, 4) coupent à nouveau la cubique en trois couples de points alignés avec X (corollaire du théorème de Carnot); en faisant coïncider le point 1 avec 2 et 3 avec 4 et prenant pour IJ les points circulaires à l'infini, nous avons le théorème :

Si un cercle est bitangent à une cubique circulaire, la droite qui unit les tangentiels des points de contact est parallèle à l'asymptote réel.

Cela posé, les deux points de contact avec la cubique d'un cercle bitangent étant alignés avec un centre d'inversion, par un point arbitraire M_0 de la courbe passent quatre cercles bitangents, et si les droites $|M_0 R|$, $|M_0 y^\infty|$ recoupent la cubique respectivement aux points M_2 et M_1, les cordes de contact des deux cercles bitangents réels qui passent par M_0 sont $\overline{M_0 M_2}$ et $\overline{M_0 M_1}$. Les tangentiels de M_0 et M_2 étant placés sur une parallèle à l'asymptote sont symétriques par rapport à l'axe Ox, mais le point symétrique du tangentiel de M_0 est le tangentiel de M_1, donc M_1 et M_2 ont même tangentiel. Les droites $|M_0 P|$, $|M_0 Q|$ imaginaires conjuguées vont recouper la cubique aux points M_3, M_4 et les cordes de contact des deux cercles imaginaires de la deuxième espèce qui passent par M_0 sont $|M_0 M_3|$ et $M_0 M_4$.

Par la substitution linéaire

$$x = \tfrac{1}{2}(x'+y'), \qquad y = \tfrac{1}{2}(x'-y')\sqrt{3},$$

l'équation de la cubique est ramenée, supprimant les accents, à la forme canonique

$$x^3 + y^3 - 2a^3 z^3 = 0,$$

l'invariant S est nul et, par suite, la cubique est équianharmonique, sa hessienne se réduit à $xyz = 0$ et les coordonnées du tangentiel (x', y') de (x, y) sont

$$x' : y' : 1 = x(y^3 + 2a^3) : -y(x^3 + 2a^3) : (x^3 - y^3);$$

si (x_0, y_0) sont les coordonnées de M_0, celles du tangentiel de $M_1(x_0, -y_0)$ seront

$$(4) \quad x' : y' : 1 = x_0(2a^3 - y_0^3) : y_0(2a^3 + x_0^3) : (x_0^3 - y_0^3)$$

et ne changent pas si l'on pose $a\varepsilon$ ou $a\varepsilon^2$ au lieu de a; les tangentiels des quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 coïncident donc en le point (4). La cubique est aussi le lieu des points de contact des tangentes menées de M_0 au faisceau de coniques (M_1, M_2, M_3, M_4), ...

La propriété que la cubique soit équianharmonique résulte aussi de ce que le faisceau des quatre tangentes issues du point d'inflexion y^∞ coupe l'axe Ox aux quatre points O, R, P, Q formant un groupe équianharmonique. Des trois côtés du trilatère sizygétique formant la hessienne, l'un est, comme nous l'avons déjà vu, la droite à l'infini et les deux autres sont les diagonales du rectangle circonscrit à l'ellipse C^2; les coordonnées rectangulaires des six autres points d'inflexion sont donc

$$x = \frac{a}{2}\theta\sqrt[3]{2}, \qquad y = \pm\frac{r}{2}\theta\sqrt[3]{2},$$

où θ est une racine cubique de $+1$.

Déterminons maintenant les foyers de la cubique. Nous avons déjà vu que l'origine O est un foyer triple réel (foyer nonuple), ce que l'on pouvait aussi déduire de ce que O est le foyer des paraboles focales; les quatre foyers placés sur le même cercle d'inversion sont les intersections de ce cercle avec la parabole focale correspondante ou, ce qui est la même chose, les points de contact du cercle d'inversion avec les tangentes qu'il a en commun avec la conique polaire de son centre. En dénotant par $V\left(\overline{OV} = -\frac{a}{2}\right)$ le sommet de la parabole focale réelle P^2, par N l'autre sommet de C^2 sur le petit axe $\left(\overline{ON} = -a\right)$, par r et n les tangentes à C^2 en R et N, les cordes réelles communes à K^2 et P^2 sont r et n. Deux des quatre foyers placés sur K^2 sont les extrémités du diamètre r de K^2, que nous appellerons F_1, F_2, et les deux autres, imaginaires conjugués, sont les intersections de la tangente n à C^2 avec le cercle-point O. Si F_3 est le point symétrique de O par rapport à $N\left(\overline{OF_3} = -2a\right)$, comme F_3 et O sont les antipoints des deux foyers imaginaires placés sur K^2, les quatre foyers sur l'axe Ox sont O, F et les deux imaginaires conjugués où l'axe est coupé par le cercle-point F_1. Nous pouvons en conclure que les trois foyers simples réels sont les sommets du triangle équilatère

$F_1F_2F_3$ (décrit sur le diamètre F_1F_2 du cercle d'inversion réel) dont le barycentre O est le foyer nonuple; les six foyers simples imaginaires sont marqués par les cercles-points F_1, F_2, F_3, sur les médianes; les six foyers triples imaginaires sont marqués par le cercle-point O sur les côtés du triangle symétrique de $F_1F_2F_3$ par rapport à O.

Le cercle décrit sur $\overline{F_3R}$ comme diamètre, inverse de l'asymptote par rapport au cercle K^2, a au point R un contact quartiponctuel avec la cubique et rencontre K^2 aux deux foyers réels de C^2. Les deux points imaginaires conjugués Q, P de la cubique sont marqués sur l'axe Ox par le milieu φ_2 du segment $\overline{F_1F_3}$ considéré comme cercle-point et, comme l'angle $R\varphi_2F_2$ est $\frac{\pi}{6}$, on retrouve autrement que le groupe (ROPQ) et par suite aussi la cubique sont équianharmoniques [*cf.* LAISANT, *Recueil de problèmes* (*Géom. analyt.*, n° 5)].

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

434.

(1858, p. 186.)

L'équation

$$c_0x^n = \frac{n}{1}c_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}c_2x^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1}c_{n-1}x + c_n = 0$$

a au moins autant de racines imaginaires que l'on trouve de variations de signes dans la suite

$$c_0^2,\quad c_1^2 - c_0c_2,\quad c_2^2 - c_1c_3,\quad \ldots,\quad c_{n-1}^2 - c_{n-2}c_n,\quad c_2^n.$$

(NEWTON.)

La démonstration d'Euler (*Introduction à l'Analyse infinitésimale*) *n'est pas satisfaisante.* (GENOCCHI.)

NOTE

Par M. A. BOULANGER.

Ce théorème, énoncé sans démonstration par Newton (*Arithmetica universalis*), a été démontré avec rigueur par Sylvester en 1871 (*Transactions of the Royal Irish Academy* et *Philosophical Magazine*). Sa démonstration est aujourd'hui devenue classique, au moins à l'étranger [PETERSEN, *Théorie des équations algébriques,* trad. Laurent, p. 192; WEBER, *Traité d'Algèbre supérieure,* trad. Griess, p. 364 (Gauthier-Villars, éditeur)].

445.

(1858, p. 262.)

Si dans un déterminant d'ordre n on efface tous les termes qui renferment au moins deux éléments de l'une quelconque des deux diagonales ou d'une parallèle à ces diagonales, quel est le nombre des termes restants?

NOTE

Par M. C.-A. LAISANT.

En représentant par $a_i b_j c_k \ldots$ l'un quelconque des termes du déterminant, et en considérant la permutation figurée $ijk\ldots$ sur un échiquier de n^2 cases, il devient évident que le problème proposé n'est autre que celui des n reines :

Sur un échiquier de n^2 cases, placer n reines qui ne soient pas en prise réciproque, et déterminer le nombre de ces différentes dispositions.

Le problème des n reines a fait l'objet de nombreuses recherches. Nous ne le croyons pas résolu, et il nous semble même douteux que l'on arrive à le résoudre d'ici longtemps dans sa généralité.

Il a été posé pour $n = 8$, dans la question 251 et d'une façon générale dans la question 963, avec laquelle l'énoncé 445 peut être considéré comme faisant double emploi, malgré la différence de la rédaction.

495.

(1859, p. 444.)

Une courbe C_n de degré n et une conique C_2 sont données dans le même plan; on prend la polaire d'un point quelconque situé sur C_n par rapport à la conique C_2; soient P et Q les points d'intersection de cette polaire sur la conique, le degré du lieu du point d'intersection des deux normales menées en P et Q à la conique ne dépasse pas $3n$.

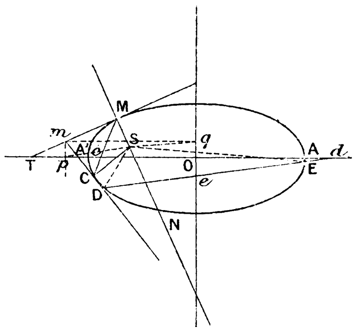
(DESBOVES.)

SOLUTION

Par M. B. CLUZEAU, élève au Collège Stanislas.

Je me propose de déduire ce théorème du suivant, énoncé aussi par Desboves : Si un point décrit une normale à une conique, les pieds des trois autres normales menées de ce point sont les sommets d'un triangle dont les côtés enveloppent une parabole.

Considérons, en effet, une normale fixe MN à une conique à centre et soient C, D, E trois points de la conique, tels que les normales en ces points se coupent sur MN; le pôle m de la



corde MC est sur la tangente MT, la corde MC étant donnée ou son pôle, on peut construire la corde DE. Remarquons pour cela que les coniques circonscrites au quadrangle MCDE déterminent sur AA' une involution dont AA' et cd sont deux couples; la considération de l'hyperbole d'Apollonius du faisceau montre que le point O est le point central. On a, par suite,

$$Oc.Od = OA.OA'.$$

Si p désigne la projection de m sur AA', on a

$$Op.Oc = \overline{OA}^2,$$

par suite

$$Od = -Op.$$

On aurait de même

$$Oe = -Oq;$$

la droite ED est donc la symétrique par rapport à O de la droite qui joint les projections sur les axes du point m. Lorsque le point de concours des normales en D et E décrit MN, MC tourne autour de M, m décrit MT et pq enveloppe une parabole tangente aux axes; la droite DE enveloppe donc la parabole symétrique par rapport à O.

Cette démonstration est due à M. E. Duporcq (*Prem. princ. de Géom. moderne*).

Ceci posé, pour obtenir le degré du lieu de S, il suffit évidemment de compter combien de points de ce lieu se trouvent sur une droite quelconque, par exemple sur une normale MN à C_2. A cette normale correspond une parabole π, enveloppe des cordes telles que les normales à C_2 en leurs extrémités se coupent sur MN; donc, pour qu'une corde de la conique C_2 fournisse un point du lieu situé sur MN, il faut d'abord que cette corde soit tangente à la polaire réciproque de la courbe donnée par rapport à la conique; ensuite, ou qu'elle passe par le point M, ou qu'elle soit tangente à la parabole π, qui correspond à MN. Il y a n cordes de la conique satisfaisant à la première et à la deuxième condition; il y en a $2n$ satisfaisant à la première et à la troisième, donc, en général, $3n$ points sur MN. Le degré de la courbe lieu de S est donc, en général, triple de celui du lieu C_n donné.

549.

(1860, p. 405.)

NOTE

Par M. A. Droz-Farny.

Cette question a été résolue dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2e série, t. III p. 23; 1864) par M. Cremona.

Cette question 549 fait, en effet, double emploi avec les questions 563 et 564 de M. Faure démontrées par M. Cremona.

563. La courbe du troisième ordre qui passe par les six sommets d'un quadrilatère complet et par les pieds des hauteurs du triangle formé par ses diagonales passe par les points circulaires à l'infini.

564. Cette courbe est le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère et rappelle le cercle dans la théorie des courbes du troisième ordre.

1685.

(1894, p. 59*.)

Il existe une infinité de triangles T *qui sont à la fois circonscrits à une ellipse* E *et inscrits à un cercle concentrique* C, *le rayon de* C *étant égal à la demi-somme* (*ou à la demi-différence*) *des axes de* E.

La somme des carrés des côtés de tous les triangles T *est constante.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

Les invariants des deux coniques

$$S = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad S' = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

sont (*voir* Salmon, *Sections coniques*)

$$\Delta = \frac{-1}{a^2 b^2}, \qquad \Theta = \frac{-R^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 b^2},$$

$$\Delta' = -R^2, \qquad \Theta' = \frac{-R^2(a^2 + b^2) - a^2 b^2}{a^2 b^2}.$$

La condition bien connue $\Theta^2 - 4\Delta\Theta' = 0$ donne

$$R^2 = (a \pm b)^2,$$

de sorte que l'énoncé doit être complété par les mots placés dans une parenthèse; les deux cercles obtenus sont les cercles de Chasles de l'ellipse E.

La seconde partie de l'énoncé peut être précisée comme il suit : En supposant, par exemple,

$$R = a + b,$$

on a, H étant l'orthocentre du triangle ABC,

$$OH = a - b,$$

de sorte que, *le triangle* ABC *restant circonscrit à l'ellipse* E *et inscrit à l'un de ses cercles de Chasles, l'orthocentre* H *décrit le second cercle de Chasles de cette ellipse;* si l'on écrit

$$a = \frac{R}{2} + \frac{OH}{2}, \qquad b = \frac{R}{2} - \frac{OH}{2},$$

on peut dire que le cercle des neuf points du triangle ABC reste tangent aux deux cercles principaux de l'ellipse E; enfin un dernier énoncé est celui-ci : Le centre des moyennes distances G du triangle ABC décrit un cercle de centre O et de rayon $\frac{a-b}{3}$. Sous cette forme, le théorème est un cas très particulier du théorème suivant qui est connu : Si un polygone de n côtés reste circonscrit à une conique S et inscrit à une conique S', le centre des moyennes distances des sommets décrit une conique homothétique à la conique circonscrite S'. (*Bulletin de la Société Mathématique*, t. XXVI, p. 98, Note de M. R. Bricard. Dans le Tome XVII du même recueil, page 71, M. G. Humbert a indiqué dans quelles conditions le centre des moyennes distances reste fixe; les triangles circonscrits à une conique Σ et inscrits à l'un de ses cercles directeurs donnent un exemple de ce cas; l'orthocentre est, en effet, au second foyer. On peut observer que les triangles de la question actuelle sont égaux à ceux qui viennent d'être mentionnés, les quantités $a + b$ et $a - b$ de la question actuelle étant les quantités $2a$ et $2c$ relatives à la conique Σ.)

J'indique en terminant la propriété suivante, que j'ai rencontrée dans des recherches non encore publiées :

En désignant par M, N, P *les milieux des côtés du triangle* ABC, *par* α, β, γ *les pieds des hauteurs, et par* R, S, T *les points de contact de l'ellipse avec les côtés du triangle, on a*

$$MR = M\alpha, \qquad NS = N\beta, \qquad PT = P\gamma;$$

il en résulte que les normales à l'ellipse aux points R, S, T sont concourantes, ou encore que trois des normales menées du point H à l'ellipse sont les hauteurs du triangle ABC.

1783.

(1897, p. 484.)

Étant donnés deux tétraèdres dont les sommets sont les huit points communs à trois quadriques, on leur circonscrit deux quadriques tangentes entre elles en tous les points d'une courbe plane : enveloppe du plan de cette courbe. (E. Duporcq.)

SOLUTION

Par M. B. Cluzeau, élève au Collège Stanislas.

Hesse a donné le théorème suivant : Lorsque deux tétraèdres sont conjugués à une même quadrique, leurs huit sommets sont les points communs aux quadriques d'un réseau ponctuel, et réciproquement.

Il résulte de la réciproque que deux quadriques respectivement circonscrites aux tétraèdres donnés sont harmoniquement circonscrites à une quadrique fixe, ainsi que les quadriques du faisceau qu'elles déterminent; si, en particulier, les deux quadriques considérées sont tangentes entre elles en tous les points d'une conique, le plan de celle-ci est tangent à la quadrique fixe. Donc :

L'enveloppe demandée est la quadrique conjuguée aux deux tétraèdres donnés.

1812.

(1899, p. 100.)

Les plans osculateurs à une cubique en trois de ses points a, b et c, coupent le plan abc suivant des droites concourantes. (E. Duporcq.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

La proposition donnée par M. Duporcq est bien connue; *voir*, par exemple :

Chasles, *Comptes rendus*, tome XLV, page 189; 1857.

Schroeter, *Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung*, page 229.

1813.

(1899, p. 100.)

Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 les pieds de quatre normales concordantes menées à une conique C :

1° *Dans chacun des triangles* T, *tels que a_2, a_3, a_4, on peut inscrire une conique* Λ *ayant les mêmes axes de symétrie que* C;

2° *Les quatre coniques* A_1, A_2, A_3 et A_4 *sont circonscrites à un même quadrilatère;*

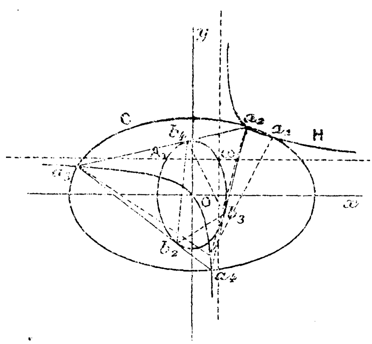
3° *Les cercles circonscrits aux triangles admettant pour sommets des points de contact des coniques* Λ *avec les côtés du triangle* T *passent par un même point.*

(E. Duporcq.)

SOLUTION.

Par M. A. Vacquant.

1° Soient Ox, Oy les axes de C; je considère l'hyperbole d'Apollonius a_1, a_2, a_3, a_4 ou H. Les deux triangles a_2, a_3, a_4 et Ox_∞, y_∞ sont inscrits dans H; donc ils sont conjugués par



rapport à une conique Γ qui a dès lors pour axe Ox, Oy. Soit A_1 la polaire réciproque de C par rapport à Γ; la conique A_1 a pour axes Ox, Oy et est inscrite dans le triangle $a_2 a_3 a_4$.

2° Les quatre coniques A_1, A_2, A_3, A_4 sont circonscrites à un même quadrilatère. En effet, le centre ω de l'hyperbole d'Apollonius H appartient à ces quatre coniques coaxiales (propriété connue rappelée dans la Note précédente, II). Les symétriques ω_1, ω_2 et ω' de ω par rapport aux axes Ox, Oy et au point O appartiennent aussi à ces quatre coniques qui sont, par suite, circonscrites à un même quadrilatère $\omega\omega_1\omega'\omega_2$.

3° Soient b_2, b_3, b_4 les points de contact des côtés du triangle $a_2a_3a_4$ avec la conique A_1; l'hyperbole d'Apollonius H est harmoniquement circonscrite à la conique A_1; car le triangle $Ox_\infty y_\infty$ est inscrit dans H et conjugué à A_1; alors la polaire b_2b_3 de a_4 par rapport à A_1, coupe H et A_1, en des points conjugués harmoniques; on voit ainsi que le triangle $b_2b_3b_4$ est conjugué à H; donc (théorème de Faure), le cercle circonscrit à ce triangle passe par le centre ω de H.

1815.

(1899, p. 148.)

Démontrer que l'expression

$$1 - a^2 + a^4 - \ldots + a^{4p} = \frac{a^{4p+2}+1}{a^2+1}$$

peut toujours être mise sous la forme de la somme de deux carrés, et que, si a est un nombre entier, les deux carrés en question sont aussi entiers. (C.-A. Laisant.)

SOLUTION

Par M. Giacomo Candido, à Pise.

Indiquons par x^2 et y^2 les deux carrés dans lesquels on doit démontrer qu'on peut décomposer l'expression donnée. Alors on aura

$$(1+a^2)(x^2+y^2) = a^{4p+2}+1.$$

On peut écrire cette équation des deux manières suivantes :

$$(\mathrm{I}) \qquad (ax-y)^2+(a+ay)^2 = a^{4p+2}+1,$$

$$(\mathrm{II}) \qquad (x+ay)^2+(ax+y)^2 = a^{4p+2}+1.$$

De la relation (I), par identification, on déduit les deux systèmes :

$$(1) \qquad \begin{cases} x \quad + ay = a^{2p+1}, \\ ax - \ y \ = 1, \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x \quad + ay = 1, \\ ax - \ y \ = a^{2p+1}, \end{cases}$$

qui donnent respectivement

$$(1')\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a^{2p-1} + a}{a^2 + 1}, \\ y = \dfrac{a^{2p+2} - 1}{a^2 + 1}, \end{cases}$$

$$(2')\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a^{2p+2} + 1}{a^2 + 1}, \\ y = \dfrac{a^{2p+1} - a}{a^2 + 1}. \end{cases}$$

Chacun de ces systèmes de valeurs satisfait à la première partie de la question proposée. En outre, on voit facilement qu'en distinguant les deux cas de p pair et de p impair, on trouve que toujours une des valeurs (1′) ou (2′) est une expression entière, et précisément les valeurs (1′) pour p pair et les valeurs (2′) pour p impair sont entières; c'est ce qui démontre la seconde partie de la question proposée.

On pouvait commencer la solution de la question par l'équation (II), mais on serait retombé sur les résultats déjà trouvés.

Note. — Si l'on pose

$$x = \frac{a^{2p+2} + (-1)^p}{a^2 + 1}, \qquad y = a\,\frac{a^{2p} - (-1)^p}{a^2 + 1},$$

on vérifie aisément que

$$x^2 + y^2 = \frac{a^{4p+2} + 1}{a^2 + 1}.$$

Si a est un nombre entier, il en est de même de x et de y.

Corollaire. — Tous les nombres

9901, 99009901, 990099009901, ...,

sont décomposables en une somme de deux carrés.

(C.-A. L.)

[F2g]

SUR UNE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES FONCTIONS $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{sn}(x+\mathrm{K})$ ET LEUR ANALOGIE AVEC LES FONCTIONS CIRCULAIRES;

PAR M. E. IAGGI.

1. Les fonctions

$$u = \operatorname{sn}(x, k), \qquad v = \operatorname{sn}(x+\mathrm{K}, k),$$

que, dans ce Journal même (1) et dans un Mémoire présenté, en 1900, à l'Académie des Sciences, nous avons proposé d'appeler des *sinus* et *cosinus elliptiques* ($u = \sin_e x$, $v = \cos_e x$) à cause de leur parfaite analogie avec les fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, sont susceptibles d'une représentation géométrique qui s'étend non seulement aux relations entre les trois covariables x, u, v, mais encore à la multiplication et à la division de l'argument x par 2^n, et à diverses transformations parmi lesquelles celles de Landen et de Gauss.

La représentation géométrique qu'a donnée M. Lémeray, dans une lettre à M. Laisant parue dans ce Journal, peut conduire à celle que nous avons en vue; mais celle-ci s'introduit d'une manière naturelle par la considération de la courbe dont l'équation, en coordonnées rectangulaires u, v, est la relation algébrique qui existe entre les fonctions u_x et v_x

$$u^2 + v^2 = 1 + k^2 u^2 v^2, \tag{1}$$

équation qui peut se mettre sous diverses autres formes

(1) *Nouvelles Annales*, 1898, 1900.

qui nous seront utiles

$$(2) \qquad u = \pm\sqrt{\frac{1-v^2}{1-k^2v^2}}, \qquad v = \pm\sqrt{\frac{1-u^2}{1-k^2u^2}},$$

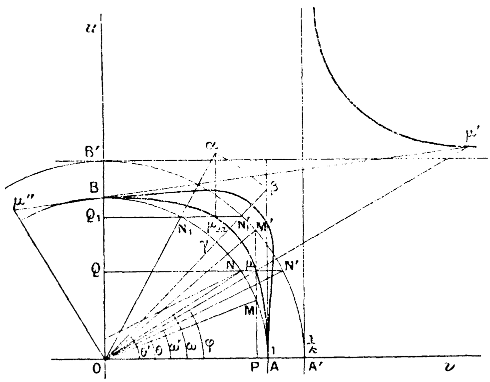
$$(3) \quad (1-k^2u^2)(1-k^2v^2) = k'^2, \qquad (1-u^2)(1-v^2) = k'^2u^2v^2,$$

$$(4) \qquad \frac{(1\pm ku^2)(1\pm kv^2)}{1\pm k} = u^2+v^2 = \frac{1-k^2u^4}{1-k^2u^2} = \frac{1-k^2v^4}{1-k^2v^2}$$

ou en coordonnées polaires

$$(5) \qquad r^2 = 1 + \frac{k^2}{4} r^4 \sin^2 2\varphi.$$

Cette équation montre que, lorsque k est réel et plus petit que *un*, ce que nous supposons, la courbe se compose d'une branche fermée enveloppant le cercle de rayon *un* et tangente à ce cercle aux points A, B, A_1,



B_1, sur les axes Ov, Ou, et de quatre branches infinies aux asymptotes

$$u, v = \pm\frac{1}{k}.$$

Les points de la branche fermée sont tels que les valeurs absolues de u et de v sont inférieures à *un* et répondent par conséquent aux valeurs réelles de x et aux valeurs de la forme $x + 2niK'$; les branches infinies, pour lesquelles $|u|$, $|v|$ sont supérieurs à *un*, répondent à des valeurs de la forme $x + (2n+1)iK'$, (x réel). Nous considérerons donc particulièrement les points de la branche fermée, et comme la courbe a pour axes de symétrie les axes Ov, Ou et leurs bissectrices, nous pouvons nous borner pour l'instant à l'étude des points μ_x de cette branche situés dans le premier quadrant.

Cherchons ce qu'est l'argument x relatif à un point $\mu(u, v)$ de la courbe (1). Posons

$$\frac{u_x}{v_x} = \operatorname{tang}\varphi,$$

φ étant l'angle $AO\mu$. En différentiant, nous avons

$$(v_x u'_x - u_x v'_x)\,dx = (u_x^2 + v_x^2)\,d\varphi.$$

D'ailleurs

$$vu' - uv' = 1 - k^2 u^2 v^2 = 2 - (u^2 + v^2).$$

On a donc

$$dx = \frac{r^2}{2 - r^2}\,d\varphi, \tag{6}$$

x n'est ni l'arc, ni l'aire de la courbe (1). Mais si l'on pose

$$\rho^2 = \frac{r^2}{2 - r^2},$$

x sera le double de l'aire balayée par le rayon ρ dans la courbe de coordonnées ρ et φ, dont l'équation obtenue au moyen de (5) est

$$\rho^4(1 - k^2 \sin^2 2\varphi) = 1.$$

Mais on peut aussi procéder de la manière suivante qui nous servira ensuite : l'équation (5) donne deux valeurs positives r, r' du rayon vecteur qui correspondent aux deux points μ, μ', l'un μ sur la branche fermée, l'autre μ' dans la même direction φ, sur la branche infinie du premier quadrant, et ces deux longueurs sont telles que

$$(7) \qquad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = 1,$$

et, par suite,

$$(8) \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{2}{r^2} - 1 = 1 - \frac{2}{r'^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 2\varphi}.$$

On constate facilement que la courbe (ρ, φ) est une courbe fermée qui a les quatre axes de symétrie de la courbe (r, φ) et qui enveloppe la branche fermée de celle-ci et lui est tangente, ainsi qu'au cercle de rayon *un*, aux quatre points A, B, A_1, B_1.

On a d'ailleurs

$$(9) \qquad \frac{K}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\varphi, \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\varphi.$$

La symétrie montre que, lorsque ρ s'augmente de $\frac{\pi}{2}$, x s'augmente de K et réciproquement, mais que, malgré l'analogie de la première formule (9) avec la suivante, on ne peut étendre ce raisonnement à l'addition $\frac{\pi}{4}$ à φ ou de $\frac{K}{2}$ à x.

L'argument $K - x$ est obtenu en prenant le symétrique de $O\mu$ par rapport à la bissectrice de vOu. La quadruple symétrie des deux courbes rend compte alors des relations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u(K \pm x) = v(x), & v(K \pm x) = \mp u(x), \\ u(2K \pm x) = \mp u(x), & v(2K \pm x) = - v(x), \\ u(4K \pm x) = \pm u(x), & v(4K \pm x) = v(x). \end{array} \right.$$

Ces relations, comme les substitutions réelles qu'on en tire et qui laissent invariables les fonctions u et v, sont *identiques* à celles qui sont relatives aux fonctions circulaires $\sin \frac{\pi}{2K} x$, $\cos \frac{\pi}{2K} x$.

La représentation géométrique de l'argument x que nous venons d'obtenir est entièrement analogue à celle des fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, où x peut être considéré comme la longueur de l'arc du cercle de rayon *un*, mais aussi comme le double de l'aire du secteur déterminé par le rayon du point considéré

$$(\sin x, \cos x).$$

Lorsque k s'annule, les deux courbes (r, φ) et (ρ, φ) se réduisent toutes deux au cercle de rayon *un*, et les deux fonctions $u(x, k)$, $v(x, k)$ aux fonctions $\sin x$, $\cos x$.

L'égalité (7) donne la construction de μ', connaissant μ : on fera tourner μ de $\frac{\pi}{2}$; la tangente au cercle rayon *un* menée par ce nouveau point déterminera μ' sur $O\mu$.

Le point de coordonnées

$$u(x + iK') = \frac{1}{ku(x)}, \qquad v(x + iK') = \frac{1}{kv(x)}$$

n'est autre, on le voit par son angle φ, que le symétrique de μ' par rapport à la bissectrice de vOu.

Les formules démontrées précédemment (1) à (8) suffisent pour construire géométriquement les quantités u, v, φ ou x, r, r', ρ lorsqu'on se donne l'une d'entre elles; mais de nouvelles données que nous introduisons ci-après simplifient beaucoup ces constructions.

2. *Construction des courbes* (r, φ) *ou* (u, v) *et* (ρ, φ). — Par un point μ_x de coordonnées $v_x = r\cos\varphi$,

$u_x = r \sin\varphi$, menons les parallèles μP, μQ aux axes Ou, Ov.

Soient O_1 et O'_1 les deux cercles concentriques de rayons respectifs 1 et $\frac{1}{k}$.

μP rencontre O_1 et O'_1 respectivement en M, M'; μQ rencontre respectivement O_1 et O'_1 en N, N'. (M, M', N, N' seront les plus rapprochés des points d'intersection de μP et μQ avec les deux cercles.) Posons

$$\widehat{MOA} = \omega, \qquad \widehat{N'OA'} = \omega',$$
$$\widehat{MOA} = \theta, \qquad \widehat{N'OA'} = \theta.$$

On aura

$$(11) \qquad \begin{cases} u_x = \sin\omega = \dfrac{1}{k}\sin\omega, \\ v_x = \cos\theta = \dfrac{1}{k}\cos\theta. \end{cases}$$

Dans la notation de Jacobi, on aurait

$$u_x = \sin \operatorname{am}(x, k), \qquad \omega = \operatorname{am}(x, k),$$
$$v_x = \sin \operatorname{co} \operatorname{am}(x, k), \qquad \frac{\pi}{2} - \theta = \operatorname{co} \operatorname{am}(x, k).$$

On voit aussi que

$$(12) \qquad \begin{cases} \pm\sqrt{1-u^2} = \cos\omega \quad (= \operatorname{cn} x), & \pm\sqrt{1-k^2u^2} = \cos\omega' \quad (= \operatorname{dn} x), \\ \pm\sqrt{1-v^2} = \sin\theta, & \pm\sqrt{1-k^2u^2} = \sin\theta, \end{cases}$$

et, enfin, par les relations (2) et (3)

$$(13) \qquad \sin\omega = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'},$$

$$(14) \qquad \cos\theta = \frac{\cos\omega}{\cos\omega'},$$

$$(15) \qquad \sin\theta' \cos\omega' = k',$$

$$(16) \qquad \operatorname{tang}\theta = k' \operatorname{tang}\omega.$$

Ces formules sont toujours vraies en grandeur et en signe, ainsi qu'on le vérifie par la suite.

Si l'on se donne l'un des quatre angles précédents, $\omega = \text{AON}$, par exemple, on a à construire μ_x, connaissant $u_x = \sin\omega$; la parallèle NQ à $\text{O}v$ détermine sur le cercle O'_1 deux points N' symétriques et, par suite, une seule valeur de $\sin\omega'$, mais deux valeurs égales et de signes contraires de $\cos\theta$ par la formule (14); on construit d'ailleurs facilement $\cos\theta$ par la parallèle à ON' menée par N jusqu'à $\text{O}u$. On a ainsi les deux valeurs de v_x égales et de signes contraires données par la formule (4).

On saura donc construire μ_x, connaissant l'une de ses coordonnées ou l'un des quatre angles ω, ω', θ, θ'. Construisons maintenant le ρ_x correspondant à μ_x. La formule (8) montre que ρ est une moyenne proportionnelle entre 1 et la quantité

$$(17) \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 2\varphi}},$$

qui suffit à la construction. Mais l'expression

$$(18) \qquad dx = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 2\varphi}}$$

montre, si on la multiplie par 2, que $\sin 2\varphi = u(2x)$, $2\varphi = \operatorname{am} 2x$, ce qu'on peut vérifier sur la seconde des formules analytiques suivantes qu'on déduit du théorème d'addition de $u(x)$ (*loc. cit.*) :

$$(19) \qquad u(2x) = \frac{2u_x v_x}{1 + k^2 u_x^2 v_x^2} = \frac{2u_x v_x}{u_x^2 + v_x^2},$$

et où l'on fait $u_x = v_x \operatorname{tang}\varphi$. 2φ est donc pour μ_{2x} ce qu'est ω pour μ_x, et l'on peut construire μ_{2x} avec 2φ comme μ_x avec ω. Si $\text{N}'_1\text{N}_1\text{Q}_1$ est la parallèle à $\text{O}v$, on a

$$u(2x) = \sin 2\varphi = \frac{1}{k} \sin 2\varphi',$$

où $2\varphi' = \widehat{A'ON'_1}$. L'abscisse du point μ_{2x} sera de même

$$v(2x) = \cos 2\psi = \frac{1}{k}\cos 2\psi' \qquad \left(= \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}\right),$$

où $2\psi = \widehat{AOM_1}$, $2\psi' = \widehat{A'OM'_1}$, $M'_1\mu_{2x}M_1P_1$ étant la parallèle à Ou. On a ainsi, par une construction simple, la quantité $v(2x)$ dont la formule analytique est

$$(20) \qquad v(2x)\,\frac{v_x^2 - u_x^2}{1 - k^2 u_x^2 v_x^2} = \frac{v_x^2 - u_x^2}{2 - (u_x^2 + v_x^2)}.$$

Ces formules (19) et (20) montrent que $u(2x)$ et $v(2x)$, qui sont rationnelles en u_x, v_x ([1]), ont, la première, deux valeurs égales et de signes contraires, la seconde, une seule valeur lorsqu'on se donne soit u_x, soit v_x. Notre construction géométrique donne également ce résultat, car, si l'on se donne u_x ou ω, on a deux valeurs supplémentaires de ω', d'où deux valeurs égales et de signes contraires de v_x, ou deux valeurs supplémentaires de φ et, par suite, deux valeurs de $\sin 2\varphi$ égales et de signes contraires, et de même pour $2\varphi'$; alors $\cos 2\varphi$ et $\cos 2\varphi'$ et, par suite, $\cos 2\psi$ n'ont qu'une seule valeur.

La formule (8) donne maintenant

$$(21) \qquad \frac{1}{\rho_x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{p'^2} = \sqrt{1 - k^2\sin^2 2\varphi} = \cos 2\varphi',$$

$$(22) \qquad \rho_x^2 = \sec 2\varphi'.$$

On a donc ρ par une moyenne proportionnelle entre

([1]) Cette remarque, ainsi que la suivante, n'est qu'un cas particulier d'un théorème général qu'on peut démontrer sur $u(mx)$, $v(mx)$, exprimés en u_x, v_x simultanément ou séparément (Mémoire présenté, etc.; 1900). On peut remarquer l'analogie des formules (19), (20) avec les formules de $\sin(2x)$, $\cos 2x$ auxquelles elles se réduisent lorsque $k = 0$.

$\sec 2\varphi'$ et le rayon du cercle O_1 (¹), puis par les formules (7) et (21)

$$(23) \qquad \begin{cases} r = \sec\varphi', \\ r' = \operatorname{cosec}\varphi'. \end{cases}$$

Ces dernières formules permettent de construire μ_x lorsqu'on se donne φ ou ρ; car si φ est donné, on construit 2φ et $2\varphi'$ comme plus haut et les formules (22), (23) donnent les constructions de ρ, r, r'; si ρ est donné seul, on a $\sec 2\varphi'$ par une troisième proportionnelle (22), et, ayant $2\varphi'$, on a 2φ et d'autre part r et r'.

3. *Multiplication et division de l'argument par* 2^n. — Les constructions précédentes nous ont donné le point de coordonnées $u_{2x} = \sin 2\varphi$, $v_{2x} = \cos 2\psi$ lorsqu'on connaît le point $u_x = \sin\omega$, $v_x = \cos\theta$ ou seulement l'une de ses coordonnées. En répétant n fois cette

---

(¹) Si par μ_{2x} on mène la parallèle Ou jusqu'à ON, on obtient un point α tel que $O\alpha = \sec 2\varphi'$. L'ordonnée de N_1 étant u_{2x}, l'abscisse de α étant v_{2x} et, d'autre part, N_1 décrivant le cercle O_1 et α décrivant l'ellipse d'axes 1 et $\frac{1}{k'}$, on obtient ainsi la représentation géométrique de M. Lémeray dans le cas de l'argument $x_1 = 2x$. La quantité $\rho = \sqrt{ON_1 . O\alpha}$ a la même valeur que précédemment, mais est employée d'une manière différente, puisqu'ici le rayon sur lequel on porte ρ est $O\alpha$.

Remarquons que la droite $O\gamma N'$, rencontre la tangente en A à O_1 en un point β tel que $O\beta = \sec 2\varphi' = O\alpha$; si l'on a décrit un cercle de centre O et de rayon $O\beta = \sec 2\varphi'$, ce cercle donne sur ON, le point α qui, projeté sur QN_1N', donne μ_{2x} : on a construit ainsi l'expression $v_{2x} = \sec 2\varphi' \cos 2\varphi$. Cette construction, qu'on peut faire pour tout point μ dont on donne l'amplitude correspondante, peut remplacer la construction, donnée précédemment, de v, connaissant u ou ω. Si alors par β et γ on même un cercle tangent à $O\mu$, le point de contact est le point (ρ, φ) cherché de la courbe dont l'axe représente $\frac{1}{2}x$.

construction, on aura le point de coordonnées

$$u(2^n x), \quad v(2^n x).$$

On passe avec la même facilité du point μ_{2x} au point μ_x; car on a à construire μ_x, connaissant $\varphi = \frac{\operatorname{am} 2x}{2}$ et φ'. On sait donc construire, au moyen de $\mu_x(u_x, v_x)$ le point dont les coordonnées sont $u_{\frac{x}{2}}$, $v_{\frac{x}{2}}$ dont on trouve facilement l'expression soit en μ_x soit en v_x sous la forme

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} u_{\frac{x}{2}} &= \frac{\sqrt{1+u_x}-\sqrt{1-u_x}}{\sqrt{1+ku_x}+\sqrt{1-ku_x}} \\ &= \frac{\sqrt{2(1-v_x)}}{\sqrt{1+k}\sqrt{1+kv_x}+\sqrt{1-k}\sqrt{1-kv_x}}, \\ v_{\frac{x}{2}} &= \frac{\sqrt{1+u_x}+\sqrt{1-u_x}}{\sqrt{1+ku_x}+\sqrt{1-ku_x}} \\ &= \frac{\sqrt{2(1+v_x)}}{\sqrt{1+k}\sqrt{1+kv_x}+\sqrt{1-k}\sqrt{1-kv_x}}. \end{aligned}\right.$$

Les signes des radicaux sont arbitraires dans ces formules qui sont celles de $u_{\frac{x}{2}}$, $v_{\frac{x}{2}}$ exprimées soit en u_x, soit en v_x. Comme dans le cas des formules trigonométriques analogues auxquelles celles-ci se réduisent lorsque $k = 0$, on peut discuter les diverses valeurs obtenues en prenant tous les arguments

$$\frac{x + 4m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'}{2}, \quad \frac{2(2m+1)\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}' - x}{2},$$

déterminés par une valeur donnée de u_x, et tous les arguments

$$\frac{4mk + 2ni\mathrm{K}' \pm x}{2},$$

déterminés par une valeur donnée de v_x. Cette discussion peut se faire également sur notre représentation géométrique, mais, pour ne pas trop allonger cette Note, nous nous bornons à dire que les signes indiqués dans les formules (24) sont ceux de valeurs de $u_{\frac{x}{2}}$, $v_{\frac{x}{2}}$ qui se correspondent, μ_x étant sur la branche fermée, et qu'en changeant successivement les signes des radicaux en numérateurs, on obtiendra tous les points $\mu_{\frac{x}{2}}$ de la branche fermée; un changement de signe d'un radical au dénominateur donnerait des points $\mu_{\frac{x}{2}}$ sur une branche infinie, répondant par conséquent à une valeur imaginaire de l'argument de la forme $\frac{x}{2} + i\mathrm{K}'$.

Si l'on répète n fois les constructions qui donnent $\mu_{\frac{x}{2}}$, on obtiendra les points de coordonnées

$$u\left(\frac{x}{2^n}\right), \quad v\left(\frac{x}{2^n}\right);$$

il faut remarquer que, lorsque n est supérieur à 1, certaines valeurs sont imaginaires; mais il y en a toujours de réelles.

On trouvera facilement le nombre de ces valeurs réelles : le nombre des points μ obtenus sur la branche fermée est égal au nombre de points $\sin(2^{-n}x)$, $\cos(2^{-n}x)$ obtenus dans les mêmes circonstances, soit qu'on se donne u_x, soit qu'on se donne v_x; d'ailleurs, à chacun de ces points $\mu(u, v)$ correspond un point sur une branche infinie $\left(\frac{1}{ku}, \frac{1}{kv}\right)$; le nombre total de ces points μ obtenus sera donc le double des points

$$[\sin(2^{-n}x), \cos(2^{-n}x)]$$

obtenus dans les mêmes circonstances.

4. *Sur quelques transformations.* — Dans notre Mémoire cité, nous avons démontré la plupart des formules suivantes, où nous écrivons simplement u, v, pour les fonctions de module k et d'argument x, et $\sin_e(g_1 x, k)$, $\cos_e(g_1 x, k)$ pour les fonctions transformées, de module k_1 et d'argument $g_1 x$:

$$
\text{I}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e[(k \pm ik')x, (k \mp ik')^2] = (k \pm ik')\frac{u}{v},\\
&\cos_e[(k \pm ik')x, (k \mp ik')^2] = \frac{1 - k(k \pm ik')u^2}{1 - k(k \mp ik')u^2}\\
&\qquad = -\frac{k \pm ik' - kv^2}{k \mp ik' - kv^2},
\end{aligned}\right.
$$

transformations auxquelles on est conduit en formant l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $\frac{u}{v}$ analogue à $\operatorname{tang} x$ (*Nouvelles Annales*, 1898).

$$
\text{II}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e\left(kx, \frac{1}{k}\right) = ku,\\
&\cos_e\left(kx, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{v},
\end{aligned}\right.
$$

auxquelles conduit la comparaison des deux transformations I, l'une de module $(k - ik')^2$, l'autre de module $(k + ik')^2$.

$$
\text{III}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e\left[(1 \pm k')x, \frac{1 \mp k'}{1 \pm k'}\right] = (1 \pm k')uv\\
&\cos_e\left[(1 \pm k')x, \frac{1 \mp k'}{1 \pm k'}\right] = \frac{1 - (1 \pm k')u^2}{1 - (1 \pm k')u^2}\\
&\qquad = -\frac{1 - (1 \pm k')v^2}{1 - (1 \mp k')v^2} = \frac{v^2 - u^2}{1 - (1 \mp k')u_2}\\
&\qquad\qquad \text{(transformations de Landen)},
\end{aligned}\right.
$$

qu'on obtient en appliquant les transformations I aux fonctions III

$$
\mathrm{IV}\quad\left|\begin{aligned}
&\mathrm{sin}_e\left(\frac{1\pm k}{2}x,\ \frac{2\sqrt{\pm k}}{1\pm k}\right)=\sqrt{\frac{1\pm k}{2}\,\frac{1-v}{1\mp kv}}\\
&\qquad\qquad=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+u}\sqrt{1\pm ku}-\sqrt{1-u}\sqrt{1\mp ku}\right)\ (^1),\\
&\mathrm{cos}_e\left(\frac{1\pm k}{2}x,\ \frac{2\sqrt{\pm k}}{1\pm k}\right)=\sqrt{\frac{1\pm k}{2}\,\frac{1+v}{1\pm kv}}\\
&\qquad\qquad=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+u}\sqrt{1\pm ku}+\sqrt{1-u}\sqrt{1\mp ku}\right),
\end{aligned}\right.
$$

qu'on obtient par inversion des transformations III.

$$
\mathrm{V}\quad\left|\begin{aligned}
&\mathrm{sin}_e\left[(1\pm k)x,\ \frac{2\sqrt{\pm k}}{1\pm k}\right]=\frac{1\pm k}{1\pm ku^2}u=\frac{1\pm kv^2}{u^2+v^2}u,\\
&\mathrm{cos}_e\left[(1\pm k)x,\ \frac{2\sqrt{\pm k}}{1\pm k}\right]=\frac{1\pm k}{1\pm kv^2}v=\frac{1\pm ku^2}{u^2+v^2}v\\
&\qquad\qquad\text{(transformations de Gauss),}
\end{aligned}\right.
$$

qu'on obtient en doublant l'argument des fonctions IV.

$$
\mathrm{VI}\quad\left|\begin{aligned}
&\mathrm{sin}_e\left(\sqrt{\pm k}\,x,\ \frac{1\pm k}{2\sqrt{\pm k}}\right)=\sqrt{\frac{\pm 2k}{1\pm k}\,\frac{1-v}{1\pm kv}},\\
&\mathrm{cos}_e\left(\sqrt{\pm k}\,x,\ \frac{1\pm k}{2\sqrt{\pm k}}\right)=\sqrt{\frac{2}{1\pm k}\,\frac{1\pm kv}{1+v}},
\end{aligned}\right.
$$

qu'on obtient en appliquant la transformation II aux fonctions IV, ou en faisant l'inversion des transformations I.

$$
\mathrm{VII}\quad\left|\begin{aligned}
&\mathrm{sin}_e(ix,\ k')=\frac{iu}{\sqrt{1-u^2}},\\
&\mathrm{cos}_e(ix,\ k')=\frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}}=\frac{\sqrt{1-k^2v^2}}{k'}\qquad\left(=\frac{1}{\mathrm{dn}\,x}\right),
\end{aligned}\right.
$$

---

(1) Dans les formules qui, comme celles-ci, contiennent des radicaux, nous n'avons mis qu'un signe devant chaque radical, mais ce signe est arbitraire et l'on peut discuter les diverses valeurs comme pour les formules (24).

obtenues par la comparaison des deux transformations VI de modules $\frac{1+k}{2\sqrt{k}}$ et $\frac{1-k}{2i\sqrt{k}}$.

$$\text{VIII}\quad\left|\begin{array}{l} \sin_e\left(ik'x, \frac{1}{k'}\right) = \frac{ik'u}{\sqrt{1-u^2}}, \\ \cos_e\left(ik'x, \frac{1}{k'}\right) = \sqrt{1-k^2u^2} = \frac{k'}{\sqrt{1-k^2v^2}} \qquad (= \operatorname{dn} x), \end{array}\right.$$

obtenues par l'application de la transformation II aux fonctions VII.

$$\text{IX}\quad\left|\begin{array}{l} \sin_e\left(k'x, \frac{ik}{k'}\right) = \sqrt{1-v^2} = \frac{k'u}{\sqrt{1-k^2u^2}}, \\ \cos_e\left(k'x, \frac{ik}{k'}\right) = \sqrt{1-u^2} = \frac{k'v}{\sqrt{1-k^2v^2}} \qquad (= \operatorname{cn} x), \end{array}\right.$$

obtenues en comparant les deux transformations V, ou les deux transformations IV, ou en appliquant la transformation VIII aux fonctions II.

$$\text{X}\quad\left|\begin{array}{l} \sin_e\left(ikx, \frac{k'}{ik}\right) = \frac{iku}{\sqrt{1-k^2u^2}}, \\ \cos_e\left(ikx, \frac{k'}{ik}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \left(= \frac{1}{\operatorname{cn} x}\right), \end{array}\right.$$

obtenues en appliquant la transformation II aux fonctions IX.

$$\text{XI}\quad\left|\begin{array}{l} \sin_e\left[i(1\pm k)x, \frac{1\mp k}{1\pm k}\right] = (1\pm k)\frac{iu}{\Delta u} = (1\pm k)\frac{iuv}{\sqrt{1-u^2}}, \\ \cos_e\left[i(1\pm k)x, \frac{1\mp k}{1\pm k}\right] = \frac{1\pm ku^2}{1\mp ku^2} = \frac{1\pm k}{1\mp k}\,\frac{1\mp kv^2}{1\pm kv^2}, \end{array}\right.$$

obtenues en appliquant les transformations III aux fonctions VII ou X, ou les transformations I aux fonctions VIII ou IX; transformation remarquable en ce que, répétée, elle donne à nouveau le module k et aboutit aux fonctions $u(2x, k)$ et $v(2x, k)$; on le voit par son inverse qui est

$$\text{XII}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e\left(i\frac{1\pm k}{2}x, \frac{1\mp k}{1\pm k}\right) = i\sqrt{\frac{1\pm k}{1\mp k}}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}},\\
&\cos_e\left(i\frac{1\pm k}{2}x, \frac{1\mp k}{1\pm k}\right) = \sqrt{\frac{1\pm k}{1\mp k}}\sqrt{\frac{1-kv}{1+kv}}.
\end{aligned}\right.$$

La transformation III appliquée à ces fonctions donne les suivantes

$$\text{XIII}\quad\left|\begin{aligned}
&\sin_e\left[i\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}x, \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right] = i\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\sqrt{\frac{1-v}{1+v}\,\frac{1-kv}{1+kv}},\\
&\cos_e\left[i\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}x, \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right] = \frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\,\frac{1-\sqrt{k}v}{1+\sqrt{k}v}\quad[1]
\end{aligned}\right.$$

---

[1] On peut faire, au sujet de ces transformations, diverses remarques intéressantes, que nous ne pouvons qu'indiquer dans ce Mémoire, relatif à des représentations géométriques :

(a). Il n'existe, à proprement parler, qu'une seule transformation du premier degré du sinus elliptique $u_{x,k} = \operatorname{sn} x$, qui est donnée par la première formule I; les cinq autres transformations connues du premier degré, qui sont ici données par la seconde formule I et par la seconde formule XIII, où les signes de k et de $\sqrt{k}$ sont arbitraires, sont, à proprement parler, des transformations du cosinus elliptique $v_x = \operatorname{sn}(x + K)$. De même les transformations de Gauss de $u_{x,k}$ (première formule V) sont, à proprement parler, les seules transformations du second degré du sinus elliptique; les autres transformations du second degré, qui sont données ici par les secondes formules I, III, V, XI, sont à proprement parler des transformations du cosinus elliptique.

On peut, sans se servir de la transformation, un peu laborieuse, de l'intégrale elliptique faite par Jacobi, arriver directement à ces transformations rationnelles par une méthode simple qui procède plutôt des idées et que nous nous contenterons d'indiquer : on exprimera qu'une fonction rationnelle (du premier ou du second degré) de u ou de v est impaire s'il s'agit de u, ou paire s'il s'agit de v; puis, on fera les substitutions $x + iK'$, $x + iK'_1$, ..., en se servant, pour les hypothèses à faire sur iK'_1, ..., de ce que la fonction rationnelle admet toutes les substitutions de u ou de v, selon le cas. Les et toutes celles qui en résultent par les changements de signe de k et $\sqrt{k}$, en tout quatre transformations; on peut obtenir aussi ces fonctions en appliquant les transformations XI aux fonctions IV, ou III à VI, etc.

Toutes ces transformations trouvent leurs représentations géométriques sur la figure précédente, sauf bien entendu le facteur $\sqrt{-1}$ qui entre dans quelques-unes d'entre elles.

Ainsi les fonctions II de module $\frac{1}{k}$ et d'argument kx sont

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= ku = \sin\omega', \\ v_1 &= \frac{1}{v} \quad = \sec\theta, \end{aligned} \right.$$

---

identifications donneront les coefficients de la transformation rationnelle.

(b). On remarquera aussi que les secondes formules I, III, XI, linéaires par rapport à $u^2 = \operatorname{sn}^2 x$ permettent d'exprimer sous trois formes (doubles), la fonction de Weierstrass

$$\wp(x \mid 2K, iK') = -\frac{1+k^2}{3} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}$$

en fonction linéaire d'un cosinus elliptique. On a ainsi, sous trois formes (doubles à cause des doubles signes, c'est-à-dire de six manières), les transformations linéaires, en un cosinus, de la fonction $\wp$ que nous avons démontrées directement (*Nouvelles Annales*, 1898).

(c). Nous avons constaté jusqu'ici des analogies directes de nos deux fonctions u_x, v_x avec les fonctions circulaires; les formules de transformation nous montrent d'autres analogies : ainsi les formules (2) qui expriment u_x en fonction de v, et v_x en fonction de u_x, ont une analogie directe avec les formules

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}, \qquad \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x},$$

auxquelles elles se réduisent lorsque $k = 0$; mais les transformations IX qui montrent que $\sqrt{1-v^2}$ est un sinus elliptique, et $\sqrt{1-u^2}$ un cosinus elliptique $\left(\arg. k'x, \bmod \frac{ik}{k'}\right)$ sont également les analogues des formules trigonométriques précédentes auxquelles elles se réduisent d'ailleurs lorsque $k = 0$; nous avons là un exemple de ce et se construisent facilement. Cette transformation permet d'éviter la construction et l'étude de la courbe (1) dans le cas où k est plus grand que 1.

Les fonctions réelles IX, qu'on pourrait directement représenter au moyen de la courbe

$$u_1^2 + v_1^2 = 1 - \frac{k^2}{k'^2} u_1^2 v_1^2$$

ou

$$(k'^2 + k^2 u_1^2)(k'^2 + k^2 v_1^2) = 1,$$

trouvent leur représentation sur la figure précédente par les formules (12)

$$(\mathrm{IX}) \qquad \begin{cases} \sin\theta = u_1, \\ \cos\omega = v_1 \qquad (= \operatorname{cn} x). \end{cases}$$

---

que nous appellerons les *analogies secondes*. En voici d'autres : les formules (19) et (20) de $u(2x)$ et $v(2x)$ ont une analogie directe, ou *première*, avec les formules de $\sin 2x$, $\cos 2x$; les formules III (transformations de Landen) sont également les analogues des formules de $\sin 2x$, $\cos 2x$ (analogie seconde); on peut remarquer que, dans les deux cas, la période $4K$ [celle qui donne la substitution $(2K - x)$ pour u_x] est divisée par 2. Si l'on pose

$$x_1 = (1 \pm k')x,$$

et si u_1 est le sinus elliptique transformé de Landen (III), on a

$$du_1 = (v_x^2 - u_x^2)\, dx_1,$$

formule *identique* à celle qu'on obtient en faisant

$$k = 0 \qquad \text{ou} \qquad u_1 = \sin 2x, \qquad x_1 = 2x.$$

Les formules (24) de division par 2 de l'argument de u_x, v_x, et les formules IV (transformation inverse de Landen) présentent respectivement les deux sortes d'analogie signalées plus haut, avec les formules trigonométriques de $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, ... Ces deux sortes d'analogies se retrouvent dans toute cette théorie. La notion des analogies secondes, qui nous paraît être des plus importantes, montre que, dans une théorie faite en prenant pour éléments u_x et v_x, les formules de transformation devraient être introduites dès le début.

Les fonctions VIII, dont l'une est imaginaire, trouvent leurs représentations au moyen des formules

$$(\mathrm{VIII})\qquad \begin{cases} ik'\tan g\,\omega = u_1, \\ \cos\omega' = v_1 \qquad (= \mathrm{dn}\,x). \end{cases}$$

Les fonctions X et VII trouvent leurs représentations au moyen des formules

$$(\mathrm{X})\qquad \begin{cases} i\tan g\,\omega' = u_1, \\ \mathrm{s\acute{e}c}\,\omega = v_1 \qquad \left(= \dfrac{1}{\mathrm{cn}\,x}\right), \end{cases}$$

$$(\mathrm{VII})\qquad \begin{cases} i\tan g\,\omega = u_1, \\ \mathrm{s\acute{e}c}\,\omega' = v_1 \qquad \left(= \dfrac{1}{\mathrm{dn}\,x}\right). \end{cases}$$

Les fonctions XI trouvent leurs représentations au moyen des formules

$$(\mathrm{XI})\qquad \begin{cases} i\dfrac{\sin\omega \pm \sin\omega'}{\cos\omega\cos\omega'} = u_1, \\ \dfrac{1 \pm \sin\omega\sin\omega'}{1 \mp \sin\omega\sin\omega'} = v_1. \end{cases}$$

Les fonctions I ne sont réelles qu'autant que k est supérieur à 1; le module et l'argument sont alors réels. Le sinus elliptique est $(k \pm \sqrt{k^2 - 1})\tan g\,\varphi$. Mais d'ailleurs, si k est plus grand que 1, cette transformation se ramène par la transformation II à la transformation de Landen (III) relative à un module k inférieur à 1.

Remarquons que les constructions que l'on fait pour multiplier ou diviser l'argument par 2^n dans les fonctions $u(x, k)$, $v(x, k)$ donnent, grâce aux formules précédentes, les fonctions transformées (II), (IX), ..., dans lesquelles l'argument est lui-même multiplié ou divisé par 2^n; en particulier, on saura ainsi construire $\mathrm{cn}(2^n x)$, $\mathrm{dn}(2^n x)$, $\mathrm{cn}(2^{-n} x)$, $\mathrm{dn}(2^{-n} x)$.

5. La transformation de Landen (III) a une repré-

sentation très simple, car en vertu de (16), on a immédiatement

$$(25)\quad \begin{cases} \operatorname{sin}_e\left[(1 \pm k')x,\ \dfrac{1 \mp k'}{1 \pm k'}\right] \\ \qquad = (1 \pm k')\,uv = (1 \pm k')\sin\omega\cos\theta = \sin(\omega \pm \theta). \end{cases}$$

Considérons, par exemple, la transformation de module $k_1 = \dfrac{1-k'}{1+k'}$. On aura

$$(26)\qquad \omega + \theta = \operatorname{am}[(1+k'), x, k_1], \qquad \omega = \operatorname{am}(x, k),$$

et nous pouvons remarquer en passant que l'égalité (16), démontrée par l'analyse des relations entre u_x et v_x donne la relation suivante, dont on trouvera une démonstration géométrique dans le calcul de J. Bertrand, et une démonstration analytique au moyen des fonctions H, Θ de Jacobi dans la *Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Appell et Lacour :

$$(27)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\left\{\operatorname{am}\left[(1+k')x,\ \dfrac{1-k'}{1+k'}\right]\right. \\ \qquad\qquad \left. - \operatorname{am}(x, k)\right\} = k' \operatorname{tang} \operatorname{am}(x, k). \end{cases}$$

Le changement de signe de k' dans cette formule donne une relation équivalente pour la transformation de module $\dfrac{1}{k_1}$; ce module étant plus grand que 1, nous nous occuperons plus spécialement des fonctions de module $k_1\,(< 1)$ auxquelles se ramènent d'ailleurs celles de module $\dfrac{1}{k_1}$ par la transformation II.

Supposons tracé le cercle O''_1 de rayon $\dfrac{1}{k_1}$. Soit n un point de O_1 tel que $AOn = \omega_1 = \omega + \theta$. La parallèle qnn' à Ov détermine sur O''_1 le point n' tel que $AOn' = \omega'_1$ et l'on a

$$\sin\omega'_1 = k_1 \sin\omega_1 = \frac{1-k'}{1+k'}\sin(\omega+\theta) = \sin(\omega-\theta).$$

Les fonctions transformées de module k pourront donc s'écrire par des formules analogues aux formules (11), (12), ...,

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \sin\omega_1 = \frac{1}{k_1}\sin\omega'_1 \\ v_1 &= \cos\theta_1 = \frac{1}{k_1}\cos\theta'_1 \end{aligned}\right. \qquad \left(k_1 = \frac{1-k'}{1+k'},\ 1+k' = \frac{2}{1+k_1}\right),$$

où

$$(29)\qquad \omega_1 = \omega + \theta, \qquad \omega'_1 = \omega - \theta$$

et

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} v_1 &= \cos\theta_1 = \frac{\cos\omega_1}{\cos\omega'_1} = \frac{\cos(\omega+\theta)}{\cos(\omega-\theta)}, \\ u_1 &= \sin\omega_1 = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta'_1}. \end{aligned}\right.$$

La première formule (30) donne ainsi la fonction v_1 qui s'exprime en u, v par les secondes formules III analogues à celle-ci

$$(31)\quad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

On sait donc construire le point (u_1, v_1) même sans se servir du cercle O''_1; on pourrait tracer la nouvelle courbe (ρ_1, φ_1) pour figurer l'argument $x_1 = (1+k')x$; mais la courbe (ρ, φ), agrandie si l'on veut dans la proportion de $\sqrt{1+k'}$ à 1, suffit à représenter l'argument.

Supposons qu'on ait fait plusieurs fois de suite la transformation précédente; les amplitudes successives sont

$$\omega_1 = \omega + \theta, \quad \omega_2 = \omega_1 + \theta_1, \quad \omega_3 = \omega_2 + \theta_2, \quad \ldots, \quad \omega_n = \omega_{n-1} + \theta_{n-1},$$

avec

$$\omega'_1 = \omega - \theta, \quad \omega'_2 = \omega_1 - \theta_1, \quad \omega'_3 = \omega_2 - \theta_2, \quad \ldots, \quad \omega'_n = \omega'_{n-1} - \theta_{n-1}.$$

et

$$\cos\theta_1 = \frac{\cos(\omega + \theta)}{\cos(\omega - \theta)}, \qquad \cos\theta_2 = \frac{\cos(\omega_1 + \theta_1)}{\cos(\omega_1 - \theta_1)}, \qquad \dots,$$

$$\cos\theta_n = \frac{\cos(\omega_{n-1} + \theta_{n-1})}{\cos(\omega_{n-1} + \theta_{n-1})}. \tag{32}$$

On tire de là

$$\omega_n = \omega + \theta + \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{n-1}. \tag{33}$$

On sait que l'amplitude ω_n et l'argument x_n lui-même croissent avec n au delà de toute limite et que les rapports de ces deux quantités à 2^n tendent vers une même limite finie $\frac{\pi x}{2K}$.

Effectuons maintenant la transformation inverse de la précédente, tout d'abord sur le point (u_1, v_1) précédent; nous devons retrouver le point $\mu_{x,k}$ par les formules IV qui s'écrivent ici

$$\left\{\begin{aligned} u(x, k) &= \sqrt{\frac{1+k_1}{2}}\sqrt{\frac{1-v_1}{1-k_1 v_1}} = \sqrt{\frac{1+k_1}{2}}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\theta_1}{\sin\frac{1}{2}\theta'_1}, \\ v(x, k) &= \sqrt{\frac{1+k_1}{2}}\sqrt{\frac{1+v_1}{1+k_1 v_1}} = \sqrt{\frac{1+k_1}{2}}\,\frac{\cos\frac{1}{2}\theta_1}{\cos\frac{1}{2}\theta'_1} \\ &\left(k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k}, \quad x = \frac{1+k_1}{2}x_1\right). \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Le rapport de ces quantités donne immédiatement

$$\operatorname{tang}\varphi_{x,k} = \frac{u_{x,k}}{v_{x,k}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta'_1}, \tag{35}$$

en sorte qu'ayant $\operatorname{tang}\varphi_{x,k}$, et par suite $\varphi_{x,k}$ par une quatrième proportionnelle à 1 et aux deux termes du dernier rapport, on saura construire le point μ_x comme il a été dit.

Observons que le dernier rapport peut s'écrire en passant aux angles ω_1, ω'_1 par les formules (30)

$$\frac{\sin\dfrac{\omega_1+\omega'_1}{2}}{\cos\dfrac{\omega_1-\omega'_1}{2}},$$

et que, d'autre part, les formules (29) donnent

$$(36) \qquad \omega = \frac{\omega_1+\omega'_1}{2}, \qquad \theta = \frac{\omega_1-\omega'_1}{2},$$

formules qui donnent immédiatement les coordonnées $u(x,k) = \sin\omega$, $v(x,k) = \cos\theta$ de la manière la plus simple, en sorte que la construction de $\tang \varphi_{x,k}$ (35) devient inutile.

On peut tirer de ces deux transformations une manière simple de trouver

$$u\left(x+\frac{K}{2}\right), \qquad v\left(x+\frac{K}{2}\right),$$

en remarquant que les transformées de Landen s'écrivent

$$(37)\begin{cases} (1+k_1)\,u_1(x_1,k_1) = 2\,u(x,k)\,v(x,k), \\ (1+k_1)\,v_1(x_1,k_1) = 2\,u\left(x+\dfrac{K}{2},\,k\right)v\left(x+\dfrac{K}{2},\,k\right) \text{ [1]} \\ \left[x_1=(1+k')x,\ k_1=\dfrac{1-k'}{1+k'},\ (1+k')(1+k_1)=2\right], \end{cases}$$

---

[1] Formules analogues aux suivantes :

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$$
$$\cos 2x = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

[analogie seconde, *voir* la note (c)].

On peut faire la remarque suivante : Ayant les formules suivantes (dont le rapport donnerait la transformation de Gauss) :

$$2uv = (1+k_1)\,u_1,$$
$$u^2+v^2 = 1+k^2u^2v^2 = 1\,k_1u_1^2.$$

car on a

$$u_1(x_1+K_1)=v_1(x_1), \qquad K_1=(1+k')\frac{K}{2}.$$

Si à x nous ajoutons $\frac{K}{2}$, x_1 s'augmente de K_1, φ_1 s'augmente de $\frac{\pi}{2}$ et le point (u_1, v_1) tourne de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens positif; les nouvelles coordonnées sont

$$u_1(x_1+K_1)=v_1(x_1), \qquad v_1(x_1+K_1)=-u_1(x_1).$$

---

on aura, au moyen de formules démontrées au début de ce Mémoire,

$$r^2\,d\varphi=(u^2+v^2)\,d\varphi=(1-k^2u^2v^2)\,dx=(1-k_1u_1^2)\,dx;$$

d'ailleurs

$$\rho^2\,d\varphi=dx.$$

Donc

$$(\rho^2-r^2)\,d\varphi=k_1u_1^2\,dx=\frac{1+k_1}{2}k_1u_1^2\,dx_1 \qquad \left(x_1=\frac{2}{1+k_1}x\right).$$

La différence des aires des secteurs d'angle φ des courbes (ρ, φ), (r, φ), c'est-à-dire l'aire comprise entre ces deux courbes et un rayon vecteur, s'exprime donc au moyen d'une intégrale de deuxième espèce; ceci donne donc, sur la figure tracée, une représentation de l'intégrale de seconde espèce de module

$$k_1=\frac{1-k'}{1+k'}.$$

On peut remarquer aussi que la formule

$$\frac{r^2}{2-r^2}\,d\varphi=dx$$

s'écrit

$$dx+d\varphi=\frac{2}{r^2}\,dx=\frac{2\,dx}{1+k_1u_1^2}=\frac{(1+k_1)\,dx_1}{1+k_1u_1^2},$$

et, par conséquent, que l'intégrale du second membre, qui a l'apparence d'une intégrale de troisième espèce, s'intègre sous la forme suivante, au moyen d'une intégrale de première espèce, x_1, et d'une fonction circulaire

$$\begin{aligned}\int_0^{x_1}\frac{dx_1}{1+k_1u_1^2}&=\frac{x_1}{2}+\frac{1}{1+k_1}\operatorname{arc\,tang}\frac{u(x,k)}{v(x,k)}\\&=\frac{x_1}{2}+\frac{1}{1+k_1}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{1+u_1}\sqrt{1+k_1u_1}-\sqrt{1-u_1}\sqrt{1-k_1u_1}}{\sqrt{1+u_1}\sqrt{1+k_1u_1}+\sqrt{1-u_1}\sqrt{1-k_1u_1}},\end{aligned}$$

intégrale qui, si nous ne nous trompons, n'est pas connue, du moins sous cette forme qui n'emploie pas les fonctions de Jacobi.

On voit alors sur les formules (30) que ω_1 et ω'_1 sont respectivement remplacés par $\frac{\pi}{2} + \theta_1$ et $\frac{\pi}{2} + \theta'_1$ et que θ_1 et θ'_1 sont remplacés par $\frac{\pi}{2} + \omega_1$, $\frac{\pi}{2} + \omega'_1$. Le déplacement correspondant du point $(u_{x,k}, v_{x,k})$ donne le point d'argument $x + \frac{K}{2}$.

Les formules (36) donnent alors les coordonnées de ce dernier point, pourvu qu'on y fasse le changement de ω_1 et ω'_1 en $\frac{\pi}{2} + \theta_1$, $\frac{\pi}{2} + \theta'_1$ sous la forme

$$(38)\quad \begin{cases} u_{x+\frac{K}{2}} = \sin\left(\pi + \dfrac{\theta_1 + \theta'_1}{2}\right) = -\sin\dfrac{\theta_1 + \theta'_1}{2}, \\ v_{x+\frac{K}{2}} = \cos\dfrac{\theta_1 + \theta'_1}{2}. \end{cases}$$

Si donc on a construit θ_1 et θ'_1, la construction s'achève sans difficulté. On pourrait remplacer θ_1 et θ'_1 par leurs valeurs en ω et θ au moyen des relations (30); mais, si l'on veut se servir de ω et de θ, on aura une construction plus simple en se servant de la formule (35), qui donne, par le changement de θ_1, θ'_1 en $\frac{\pi}{2} + \omega_1$, $\frac{\pi}{2} + \omega'_1$,

$$(39)\quad \operatorname{tang}\varphi_{x+\frac{K}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\omega_1}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\omega'_1}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tang}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\omega + \theta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\omega - \theta}{2}\right)},$$

Ayant $\varphi_{x+\frac{K}{2}}$, par cette formule on construit directement le point relatif à l'argument $x + \frac{K}{2}$ sans passer par les transformations (III) et (IV).

Cette formule (39) est d'ailleurs donnée directement par les expressions suivantes qu'on tire des formules d'addition :

$$(40)\quad \begin{cases} u_{x+\frac{K}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+k'}}\,\dfrac{v_x+u_x}{1+(1-k')u_x v_x}, & v_{x+\frac{K}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+k'}}\,\dfrac{v_x-u_x}{1-(1-k')u_x v_x}, \\[2ex] \quad = \dfrac{1}{\sqrt{1+k'}}\,\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\omega+\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\omega-\theta}{2}\right)}, & \quad = \dfrac{1}{\sqrt{1+k'}}\,\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\omega+\theta}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\omega-\theta}{2}\right)}. \end{cases}$$

Effectuons maintenant la transformation (IV) sur le point $[u(x, k), v(x, k)]$ lui-même. Nous aurons les fonctions

$$(41)\quad \begin{cases} u_{(1)}(x_{(1)}, k_{(1)}) = \sqrt{\dfrac{1+k}{2}}\sqrt{\dfrac{1-v}{1-kv}} = \sqrt{\dfrac{1+k}{2}}\,\dfrac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta'} = \sin\dfrac{\omega+\omega'}{2}, \\[2ex] v_{(1)}(x_{(1)}, k_{(1)}) = \sqrt{\dfrac{1+k}{2}}\sqrt{\dfrac{1-v}{1-kv}} = \sqrt{\dfrac{1+k}{2}}\,\dfrac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta'} = \cos\dfrac{\omega-\omega'}{2}, \\[2ex] \tan\varphi_{(1)} = \dfrac{\tan\frac{1}{2}\theta}{\tan\frac{1}{2}\theta'}\,\dfrac{\sin\dfrac{\omega+\omega'}{2}}{\cos\dfrac{\omega+\omega'}{2}} \\[2ex] \left[k_{(1)} = \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k},\quad x_{(1)} = \dfrac{1+k}{2}x,\quad (1+k'_{(1)})(1+k) = 2\right]. \end{cases}$$

Ces fonctions $u_{(1)}$, $v_{(1)}$ se construisent de la manière la plus simple par les angles

$$(41')\qquad \omega_{(1)} = \frac{\omega+\omega'}{2}, \qquad \theta_{(1)} = \frac{\omega-\omega'}{2}.$$

Si l'on répète n fois cette transformation, le module $k_{(n)}$ tend vers 1 en restant inférieur à 1 lorsque n croît; $x_{(n)}$ croît avec n, mais tend vers une limite finie. Soit $x_{(n)} = g_{(n)}x$; on a

$$g_{(n)} = \frac{(1+k)(1+k_{(1)})(1+k_{(2)})\ldots(1+k_{(n-1)})}{2^n}$$
$$= \frac{1}{(1+k'_{(1)})(1+k'_{(2)})\ldots(1+k'_{(n)})}.$$

Les quantités $k'_{(n)}$ se tirent de k, comme, dans la transformation de Landen, les quantités k_n se tirent de k'. On sait que, dans ce cas,

$$(42)\qquad \lim(1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)=\frac{2K}{\pi}.$$

Donc, on a ici

$$(43)\qquad \lim(1+k'_{(1)})(1+k'_{(2)})\ldots(1+k'_{(n)})=\frac{2K'}{\pi}.$$

On peut, d'ailleurs, démontrer directement cette formule comme la précédente ou passer du premier cas au second, en remarquant que les quantités $k'_{(n)}$ sont les modules des transformations de Landen appliquées aux fonctions $u(x, k')$, $v(x, k')$, pour lesquelles la quantité K des fonctions de module k est remplacée par K'.

$g_{(n)}$ a donc une limite qui est $\frac{\pi}{2K'}$, et, par suite,

$$(44)\qquad \lim x_{(n)}=\frac{\pi x}{2K'}.$$

Comme, d'ailleurs, $k_{(n)}$ tend vers 1, on aura

$$(45)\qquad \begin{cases} \lim u(x_{(n)}, k_{(n)}) = \mathrm{Th}\,\dfrac{\pi x}{2K'}, \\ \lim v(x_{(n)}, k_{(n)}) = 1. \end{cases}$$

Le $n^{\text{ième}}$ point transformé tend donc vers un certain point de la parallèle à Ou menée par A, point qu'on construira facilement. La répétition des transformations (IV) est donc plus intéressante que celle de la transformation de Landen, inverse de (IV), qui ne conduit à aucune limite. De l'existence des limites précédentes, on pourra tirer des procédés pratiques de calcul sur lesquels nous ne pouvons insister ici; mais nous donnerons une formule, susceptible d'applications, qui montre l'importance des transformations successives (IV).

Posons

$$u(x_{(n)}, k_{(n)}) = u_{(n)}, \qquad v(x_{(n)}, k_{(n)}) = v_{(n)} \qquad (x_{(n)} = g_{(n)} x).$$

Nous pourrons écrire

$$\begin{aligned}
(1+k)u(x,k) &= 2u_{(1)}v_{(1)},\\
(1+k_{(1)})u_{(1)} &= 2u_{(2)}v_{(2)},\\
(1+k_{(2)})u_{(2)} &= 2u_{(3)}v_{(3)},\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots,\\
(1+k_{(n)})u_{(n-1)} &= 2u_{(n)}v_{(n)},
\end{aligned}$$

d'où, quel que soit (n),

$$(46) \qquad u(x,k) = \frac{u(g_{(n)}x, k_{(n)})}{g_{(n)}} v_{(1)} v_{(2)} v_{(3)} \ldots v_{(n)},$$

formule analogue (de la deuxième sorte) [1] à la formule trigonométrique suivante à laquelle elle se réduit pour $k = 0$

$$(47) \qquad \sin x = \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^{-n}} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2^2} \cos\frac{x}{2^3} \cdots \cos\frac{x}{2^n},$$

et qu'on démontre d'une manière analogue.

Si, maintenant, on fait croître n indéfiniment, on aura

$$(48) \quad u(x,k) = \frac{\text{Th}\,\frac{\pi x}{2K'}}{\frac{\pi}{2K'}} v(x_{(1)}, k_{(1)})\, v(x_{(2)}, k_{(2)}) \ldots v(x_{(n)}, k_{(n)}) \ldots,$$

où

$$v(x_{(n)}, k_{(n)}) = v\left[\frac{(1+k)(1+k_{(1)})\ldots(1+k_{(n-1)})}{2^n} x, k_{(n)}\right]$$

tend vers 1 lorsque k croît indéfiniment. Cette formule est l'analogue de la suivante à laquelle elle se réduit lorsque $k = 0$, $(K' = \infty)$,

$$(49) \qquad \sin x = x \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2^2} \cos\frac{x}{2^2} \cdots.$$

---

[1] *Voir* la note (c).

Cette dernière a une analogue directe dans la formule qu'on peut obtenir en faisant le produit des fonctions de module k (formule de duplication)

$$u\left(\frac{x}{2^{p-1}}\right) = \frac{2u\left(\frac{x}{2^p}\right)v\left(\frac{x}{2^p}\right)}{u^2\left(\frac{x}{2^p}\right)+v^2\left(\frac{x}{2^p}\right)},$$

p prenant toutes les valeurs de 1 à n :

$$u(x) = 2^n u\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{v\left(\frac{x}{2}\right)}{u^2\left(\frac{x}{2}\right)+v^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,\frac{v\left(\frac{x}{2^2}\right)}{u^2\left(\frac{x}{2^2}\right)+v^2\left(\frac{x}{2^2}\right)}\cdots\frac{v\left(\frac{x}{2^n}\right)}{u^2\left(\frac{x}{2^n}\right)+v^2\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$

n croissant indéfiniment, on a la formule

$$(50)\qquad u(x) = x\,\frac{v\left(\frac{x}{2}\right)v\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots v\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdots}{\prod_1^\infty\left[u^2\left(\frac{x}{2^n}\right)+v^2\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]},$$

analogue à la formule (49); nous retrouvons donc encore à ce propos les deux sortes d'analogies signalées dans la note (c).

Si l'on double l'argument dans la transformation (IV), on obtient la transformation de Gauss (V). Pour construire ces fonctions, on pourra se servir des formules (V) qui s'écrivent

$$(51)\quad\left\{\begin{aligned} u_1 &= u\left[(1\pm k)x, \frac{2\sqrt{\pm k}}{1\pm k}\right] = \frac{1\pm k}{1\pm k u^2}\,u = \frac{\sin\omega\pm\sin\omega'}{1\pm\sin\omega\sin\omega'},\\ v_1 &= v\left[(1\pm k)x, \frac{2\sqrt{\pm k}}{1\pm k}\right] = \frac{1\pm k}{1\pm k v^2}\,v = \frac{\cos\theta\pm\cos\theta'}{1\pm\cos\theta\cos\theta'}.\end{aligned}\right.$$

Au lieu de construire ces formules, on pourra doubler l'argument dans les constructions précédentes des fonctions (IV) ou, mieux encore, doubler l'argument x

d'abord, puis faire la transformation (IV). En se servant des formules démontrées

$$u(2x) = \sin 2\varphi = \frac{1}{k}\sin 2\varphi' \qquad \left(\tan\!g\,\varphi = \frac{u_x}{v_x}\right),$$
$$v(2x) = \sin 2\psi = \frac{1}{k}\sin 2\psi'$$

et des formules (41), (41'), on voit que

$$(52) \qquad \begin{cases} u_1 = \sin(\varphi + \varphi'), \\ v_1 = \cos(\varphi - \varphi'), \end{cases}$$

ce qui permet de construire facilement le point (u_1, v_1) connaissant le point ($u = \sin\omega$, $v = \cos\theta$) dont les coordonnées polaires sont l'angle φ et le rayon $r = \sec\varphi'$ (23).

Posant

$$\frac{u_1(x_1)}{v_1(x_1)} = \tan\!g\,\varphi_1, \qquad x_1 = (1+k)x,$$
$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \qquad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},$$

on construit le point $u_1(2x_1, k_1)$, $v_1(2x_1 k_1)$ et au moyen des deux angles $2\varphi_1$ et $2\varphi'_1$, qui sont tels que

$$u_1(2x_1, k_1) = \sin 2\varphi_1 = \frac{1}{k_1}\sin 2\varphi'_1,$$

on obtient le point dont les coordonnées sont les deuxièmes transformées de $u_x v_x$ par la transformation de Gauss

$$u_2(x_2, k_2) = \sin(\varphi_1 + \varphi'_1),$$
$$v_2(x_2, k_2) = \cos(\varphi_1 - \varphi'_1),$$
$$x_2 = (1 + k_1)x_1,$$

et ainsi de suite; on forme ainsi les $n^{\text{ièmes}}$ transformées de u_x, v_x; mais il faut remarquer que l'argument et l'amplitude croissent indéfiniment; leurs rapports avec 2^n tendent vers une limite commune qui est $\frac{\pi x}{2K'}$ (*voir* la transformation IV).

6. *Sur les fonctions hyperboliques.* — Nous avons montré qu'on pouvait représenter les parties réelles des formules qui contiennent des imaginaires. Mais on est conduit à d'autres représentations géométriques, si l'on remarque que, tandis que $u(x, k)$, $v(x, k)$ sont analogues aux fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, les fonctions d'argument purement imaginaires mises sous la forme

$$(53)\qquad \mathrm{U}(x, k) = \frac{u(ix, k)}{i}, \qquad \mathrm{V}(x, k) = v(ix, k),$$

sont réelles et analogues aux fonctions dites *hyperboliques*

$$\frac{\sin ix}{i} = \mathrm{Sh}\, x, \qquad \cos ix = \mathrm{Ch}\, x.$$

Les formules VII, qui expriment des fonctions de cette nature au moyen des fonctions d'argument réel $u(x, k)$, $v(x, k)$, nous conduisent, afin de pouvoir nous servir de la figure tracée et de l'étude précédente, à étudier les fonctions U, V de module k' que donnent les formules VII sous la forme

$$(54)\quad \mathrm{U}(x, k') = \frac{u(x, k)}{\sqrt{1 - u^2(x, k)}}, \quad \mathrm{V}(x, k') = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 u^2(x, k)}}.$$

On peut, bien entendu, étudier directement ces fonctions, ou celles de module k; c'est-à-dire tracer la courbe dont l'équation

$$(55)\qquad \mathrm{V}^2 - \mathrm{U}^2 = 1 - k'^2 \mathrm{U}^2 \mathrm{V}^2,$$

puis chercher une représentation de x par un calcul analogue à celui que nous avons fait au début de ce Mémoire; on se servira pour cela des formules en

$u(x, k')$, $v(x, k')$ et l'on y changera x en ix, u en $i\mathrm{U}$, v en V. L'argument x étant le même dans les fonctions $\mathrm{U}(x, k')$, $\mathrm{V}(x, k')$, $u(x, k)$, $v(x, k)$ [formules (54)], on retrouvera la courbe (ρ, φ) précédemment trouvée. On voit d'ailleurs immédiatement que

$$\frac{\mathrm{U}(x, k')}{\mathrm{V}(x, k')} = \frac{u(x, k)}{v(x, k)} = \operatorname{tang}\varphi,$$

c'est-à-dire que l'angle φ est le même. Nous n'entrerons pas dans le détail des calculs qui permettent de faire une étude directe de $\mathrm{U}_{x,k'}$, $\mathrm{V}_{x,k'}$ au moyen des angles $\varphi, \omega, \theta, \ldots$, dont nous nous sommes servis; mais considérant U_x et V_x comme les analogues de $\mathrm{Sh}\,x$, $\mathrm{Ch}\,x$, nous poserons

$$(56)\qquad \begin{cases} \mathrm{U}_{x,k'} = \mathrm{Sh}\,\Omega = \dfrac{1}{k'}\,\mathrm{Sh}\,\Omega', \\ \mathrm{V}_{x,k'} = \mathrm{Ch}\,\Theta = \dfrac{1}{k'}\,\mathrm{Ch}\,\Theta'. \end{cases}$$

$$(57)\qquad \frac{\mathrm{U}_{x,k'}}{\mathrm{V}_{x,k'}} = \mathrm{Th}\,\Phi = \operatorname{tang}\varphi,$$

$\Omega, \Omega', \Theta, \Theta'$ ne sont plus des arcs comme $\omega, \omega', \theta, \theta'$, mais des secteurs hyperboliques, les cercles O_1, O'_1 de rayons 1 et $\frac{1}{k}$ étant remplacés par des hyperboles équilatères d'axes respectifs 1 et $\frac{1}{k'}$; à cet égard, nous devons dire que Θ' ne figure dans ces formules que pour la symétrie, car il est imaginaire, V restant inférieur à $\frac{1}{k'}$ ainsi qu'on le voit par l'équation de la courbe (55) qu'on peut écrire

$$(1 + k'^2\mathrm{U}^2)(1 - k'^2\mathrm{V}^2) = k^2,$$

ou

$$(58)\qquad i\,\mathrm{Ch}\,\Omega'\,\mathrm{Ch}\,\Theta' = k, \qquad \mathrm{Th}\,\Theta = k\,\mathrm{Th}\,\Omega,$$

$$\mathrm{Ch}\,\Theta = \frac{\mathrm{Ch}\,\Omega}{\mathrm{Ch}\,\Omega'}, \qquad \mathrm{Sh}\,\Omega = \frac{\mathrm{Sh}\,\Theta}{i\,\mathrm{Sh}\,\Theta'},$$

formules analogues aux formules (13), (14), (15), (16). Nous verrons plus loin par quelle quantité réelle on peut remplacer Θ'; ces formules (56), comme celles qui suivent, doivent d'ailleurs nécessairement être converties en formules trigonométriques lorsqu'on veut en faire des applications géométriques ou numériques.

Dans une lettre qu'a bien voulu m'adresser M. Lémeray, le 10 février de cette année, sur une représentation géométrique de ces fonctions, ce géomètre remplaçait le cercle et l'ellipse qui lui servaient dans le cas de $u(x, k)$, $v(x, k)$ par deux hyperboles, l'une équilatère, l'autre d'axes 1 et $\frac{1}{k'}$ [pour les fonctions $U(x, k)$, $V(x, k)$] et, se servant de la notion de *rayon vecteur hyperbolique* qu'a introduite M. Laisant dans son Ouvrage sur les fonctions hyperboliques [1], il obtenait une représentation analogue à celle du cas de l'argument réel, par des formules qui se déduisent des premières par le seul changement des fonctions circulaires en fonctions hyperboliques et du rayon vecteur $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ en le rayon vecteur hyperbolique $\sqrt{\xi^2-\eta^2}$ (ξ, η étant les coordonnées orthogonales d'un point quelconque). Cette remarque d'un ordre général, utilisée en 1874 par M. Laisant (*loc. cit.*) peut conduire, dans le cas qui nous occupe, aux formules suivantes qu'on pourra d'ailleurs vérifier directement :

Soient P, R, R' les rayons vecteurs hyperboliques de la courbe (ρ, φ) qui représente x et des points M, M' (dont le second est imaginaire) de la courbe $(U_{x,k'}, V_{x,k'})$ relatifs au secteur hyperbolique Φ, c'est-à-dire à l'angle φ. On a

---

[1] *Essai sur la théorie des fonctions hyperboliques*, par M. C.-A. Laisant, 1874 (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. X, 2e Cahier).

$$
(59)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&U_{x,k'} = \operatorname{Sh}\Omega = \frac{1}{k'}\operatorname{Sh}\Omega' = \operatorname{tang}\omega, &\qquad& u_{x,k} = \sin\omega = \frac{1}{k}\sin\omega' = \operatorname{Th}\Omega,\\
&V_{x,k'} = \operatorname{Ch}\Theta = \frac{1}{k'}\operatorname{Ch}\Theta' = \sec\omega', && v_{x,k} = \cos\theta = \frac{1}{k}\cos\theta' = \operatorname{Sech}\Theta',\\
&\qquad\qquad \frac{U_{x,k'}}{V_{x,k'}} = \operatorname{Th}\Phi = \frac{u_{x,k}}{v_{x,k}} = \operatorname{tang}\varphi && \qquad (\operatorname{Ch}\Theta' = \sin\theta'),\\
&U_{2x,k'} = \operatorname{Sh}2\Phi = \frac{1}{k'}\operatorname{Sh}2\Phi' = \operatorname{tang}2\varphi, && u_{2x,k} = \text{2in}\,2\varphi = \frac{1}{k}\sin 2\varphi' = \operatorname{Th}2\Phi,\\
&V_{2x,k'} = \operatorname{Ch}2\Psi = \frac{1}{k'}\operatorname{Ch}2\Psi' = \sec 2\varphi' = \rho^2_{x,k}, && v_{2x,k} = \cos 2\psi = \frac{1}{k}\cos 2\psi' = \operatorname{Sech}2\Phi' = P^2_{x,k'},\\
&V^2_{x,k'} - U^2_{x,k'} = R^2 = 1 - \frac{k'^2}{4}R^4\operatorname{Sh}^2 2\Phi, && v^2_{x,k} + u^2_{x,k} = r^2 = 1 + \frac{k'^2}{1}r^4\sin^2 2\varphi,\\
&U_{x,k'} = R\operatorname{Sh}\Phi, \qquad V_{x,k'} = R\operatorname{Ch}\Phi, && u_{x,k} = r\sin\varphi, \qquad v_{x,k} = r\cos\varphi,\\
&\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} = 1, && \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = 1,\\
&\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2} = \frac{1}{P^2} = \operatorname{Ch}2\Phi' = \sec 2\psi = \frac{1}{v_{2x,k}}, && \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{\rho^2} = \cos 2\varphi' = \operatorname{Sech}2\Psi = \frac{1}{V_{2x,k'}},\\
&R = \operatorname{Sech}\Phi', \qquad R' = i\operatorname{Cosech}\Phi', && r = \sec\varphi', \qquad r' = \operatorname{cosec}\varphi',\\
&\qquad\qquad P^2\,d\Phi = \operatorname{Sech}2\Phi'\,d\Phi = dx = \sec 2\varphi'\,d\varphi = \rho^2\,d\varphi.
\end{aligned}
\right.
$$

Ce Tableau de formules parfaitement symétriques (¹) montre que, à côté des *sinus* et *cosinus elliptiques* $u_{x,k}$, $v_{x,k}$, on pourra considérer des *sinus* et *cosinus hyperboliques* (mod k') $U_{x,k'}$, $V_{x,k'}$. Les fonctions elliptiques (mod k) s'expriment toutes par les fonctions elliptiques élémentaires (mod o), c'est-à-dire les fonctions circulaires, lorsqu'on introduit les angles ω, θ, 2φ, ..., appelés *amplitudes elliptiques;* de même, les fonctions hyperboliques (mod k') s'expriment toutes par les fonctions hyperboliques élémentaires (mod o), Sh, Ch, lorsqu'on introduit les secteurs hyperboliques Ω, Θ, 2Φ, ..., qu'on est ainsi conduit à appeler des *amplitudes hyperboliques*. Mais ici, nous rencontrons une expression employée depuis Houël dans un tout autre sens : lorsqu'on a affaire aux fonctions élémentaires $\mathrm{Sh}\,x$, $\mathrm{Ch}\,x$, le secteur hyperbolique ne se prêtant guère aux calculs, on remplace les variables précédentes par des lignes trigonométriques de l'angle introduit par Lambert sous le nom d'*angle transcendant,* et qui a été nommé depuis par Cayley *gudermanien,* et par Houël *amplitude hyperbolique* (²); cet angle, relativement à Ω et Θ dans nos formules, est, avec la notation de Cayley,

$$\omega = gd\Omega, \qquad \omega' = gd\Theta,$$

ou avec celle de Houël :

$$\omega = \mathrm{am}\,h\Omega, \qquad \omega' = \mathrm{am}\,h\Theta.$$

Cette dernière notation étant admise par un grand nombre de mathématiciens, nous ne pouvons nous l'approprier en lui donnant une autre signification. Nous

---

(¹) On remarquera les deux cas de dégénérescence : 1° $k = 0$, $k' = 1$; 2° $k = 1$, $k' = 0$.

(²) Laisant, *Fonctions hyperboliques* (*loc. cit.*).

nous permettrons cependant de montrer par les formules suivantes combien la notation $\omega = \mathrm{am}_e(x, k)$, $\Omega = \mathrm{am}_h(x, k')$ introduirait de symétrie, Ω portant le nom d'*amplitude hyperbolique de* x (mod k') comme ω porte le nom d'*amplitude elliptique de* x (mod k) :

$$(60)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\Omega = \mathrm{am}_h(x, k'), & \Omega' = \mathrm{am}_h\left(k'x, \frac{1}{k'}\right), \\
\Theta = \mathrm{am}_h\left(kx, \frac{ik'}{k}\right), & \\
2\Phi = \mathrm{am}_h(2x, k'), & 2\Phi' = \mathrm{am}_h\left(2k'x, \frac{1}{k'}\right), \\
2\Psi = \mathrm{am}_h\left(2kx, \frac{ik'}{k}\right), & \\
\omega = \mathrm{am}_e(x, k), & \omega' = \mathrm{am}_e\left(kx, \frac{1}{k}\right), \\
\theta = \mathrm{am}_e\left(k'x, \frac{ik}{k'}\right), & \\
2\varphi = \mathrm{am}_e(2x, k), & 2\varphi' = \mathrm{am}_e\left(2kx, \frac{1}{k}\right), \\
2\psi = \mathrm{am}_e\left(2k'x, \frac{ik}{k'}\right) & \\
(\mathrm{Ch}\,\Theta' = \sin\theta'), & (\mathrm{Ch}\,2\Psi' = \sin 2\psi').
\end{array}\right.$$

Les angles réels θ', $2\psi'$, et les secteurs hyperboliques imaginaires Θ', $2\Psi'$ ne sont pas des amplitudes. A ces formules on pourra ajouter les relations suivantes :

$$(61)\quad \left\{\begin{array}{l}
\omega = gd\Omega, \qquad \omega' = gd\Theta, \\
2\varphi = gd2\Phi, \qquad 2\varphi' = gd2\Psi, \qquad 2\psi = gd2\Phi'.
\end{array}\right.$$

Ajoutons que, si l'on employait cette expression d'*amplitude hyperbolique* dans le sens que nous indiquons, on pourrait dire que les amplitudes elliptiques ou hyperboliques sont destinées à exprimer au moyen des fonctions élémentaires (mod o), sin, cos, Sh, Ch, les fonctions elliptiques ou hyperboliques de modules différents de zéro, u, v, U, V, et il serait entendu que, sauf des cas tout spéciaux, *l'amplitude hyperbolique ne peut entrer que dans des formules relatives aux fonctions hyper-*

boliques U, V, *sous les signes* Sh, Ch, Th, *et que l'amplitude elliptique ne peut entrer que dans des formules relatives aux fonctions elliptiques u, v, sous les signes* sin, cos, tang, les relations entre les deux sortes d'amplitudes pouvant d'ailleurs toujours se mettre sous la forme (61).

Quoi qu'il en soit, l'usage ayant à peu près consacré l'expression d'*amplitude hyperbolique* dans le sens que lui a attribué Houël, nous n'insistons pas.

7. *Sur quelques transformations des fonctions hyperboliques de module k'.* — Les formules (60) suffisent à montrer quelles sont, à l'égard des fonctions U, V, les transformations VIII, X, et nous laissons au lecteur le soin d'exprimer les nouvelles fonctions UV au moyen des anciennes, calcul qu'on peut d'ailleurs faire directement sur les fonctions $u(ix, k') = i\mathrm{U}$, $v(ix, k') = \mathrm{V}$, dont les transformations seront facilement obtenues par l'échange de k et de k' dans toutes les transformations que nous avons données (I-XIII) au sujet des fonctions de module k.

L'une de ces transformations est particulièrement intéressante : c'est celle que l'on obtient en effectuant la transformation de Landen sur les fonctions $u(ix, k')$, $v(ix, k')$, ce qui donne la transformation XI des fonctions elliptiques de module k, ou la transformation suivante des fonctions U, V de module k' :

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{U}\left[(1 \pm k)x, \frac{1 \mp k}{1 \pm k}\right] \\ &\quad = (1 \pm k)\,\mathrm{U}(x, k')\,\mathrm{V}(x, k') = (1 \pm k)\,\mathrm{Sh}\,\Omega.\mathrm{Ch}\,\Theta, \end{aligned}\right.$$

ou, en vertu de la relation (58),

$$\mathrm{Th}\,\Theta = k\,\mathrm{Th}\,\Omega :$$

$$(63)\qquad \mathrm{U}\left[(1 \pm k)x, \frac{1 \mp k}{1 \pm k}\right] = \mathrm{Sh}(\Omega \pm \Theta).$$

La transformation XI des fonctions elliptiques $u_{x,k}$, $v_{x,k}$, n'est donc, à l'égard des fonctions hyperboliques $U_{x,k'}$, $V_{x,k'}$, qu'une transformation analogue à celle de Landen, ce qui était à prévoir, et se met sous une forme analogue à celle-ci [formule (25)] au moyen des fonctions élémentaires (mod o).

Posant

$$(64)\qquad \Omega_1 = \Omega + \Theta, \qquad \Omega'_1 = \Omega - \Theta, \qquad k'_1 = \frac{1-k}{1+k},$$

on aura

$$(65)\qquad U[(1+k)x, k'_1] = \operatorname{Sh}\Omega_1 = \frac{1}{k'_1}\operatorname{Sh}\Omega'_1$$

et

$$(66)\qquad V[(1+k)x, k'_1] = \operatorname{Ch}\Theta_1 = \frac{1}{k'_1}\operatorname{Ch}\Theta'_1 = \frac{\operatorname{Ch}\Omega_1}{\operatorname{Ch}\Omega'_1} \quad (^1).$$

Le retour inverse aux fonctions de module k', $U_{x,k'}$, $V_{x,k'}$ $\Big($c'est-à-dire relativement aux fonctions $u_{x,k}$, $v_{x,k}$, la transformation XII appliquée aux fonctions de module $\frac{1-k}{1+k}\Big)$ se fera par les formules

$$(67)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Omega_1 + \Omega'_1}{2} = \Omega, \\[2mm] \dfrac{\Omega_1 - \Omega'_1}{2} = \Theta. \end{cases}$$

La répétition de la transformation (62), $\left(k'_1 = \frac{1-k}{1+k}\right)$, donne au bout de n opérations ([2]) l'*amplitude hyper-*

([1]) Comparer les formules (64), (65), (66) aux formules (28), (29), (30).

([2]) Il faut bien remarquer que la répétition de la transformation (62) n'est pas la répétition de la transformation XI des fonctions $u(x, k)$, $v(x, k)$, mais est la répétition de la transformation de Landen des fonctions $u(ix, k') = iU$, $v(ix, k') = V$. Nous avons vu que la répétition de XI donne à nouveau le module k.

bolique (*voir* plus haut) Ω_n :

$$(68)\qquad \Omega_n = \Omega + \Theta + \Theta_1 + \Theta_2 + \ldots + \Theta_{n-1},$$

qui croît avec n au delà de toute limite comme l'argument lui-même (¹).

Il n'en est pas de même de la transformation inverse qui, faite au moyen des formules (67) appliquées aux fonctions $U_{x,k'}$, $V_{x,k'}$ elles-mêmes, donne

$$(69)\quad \begin{cases} \Omega_{(1)} = \dfrac{\Omega + \Omega'}{2}, \qquad \Theta_{(1)} = \dfrac{\Omega - \Omega'}{2}, \\ U(x_{(1)}, k'_{(1)}) = \sqrt{\dfrac{1+k'}{2}}\sqrt{\dfrac{V-1}{1-k'V}} = \mathrm{Sh}\,\dfrac{\Omega+\Omega'}{2}, \\ V(x_{(1)}, k'_{(1)}) = \sqrt{\dfrac{1+k'}{2}}\sqrt{\dfrac{1+V}{1+k'V}} = \mathrm{Ch}\,\dfrac{\Omega-\Omega'}{2}, \\ \left[k'_{(1)} = \dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'},\ x_{(1)} = \dfrac{1+k'}{2}x,\ (1+k_{(1)})(1+k') = 2\right], \end{cases}$$

formules que l'on pourra comparer aux formules (41) et qui, si l'on double l'argument, donnent la transformation de Gauss (V) pour les fonctions hyperboliques U, V de module k' :

$$(70)\quad \begin{cases} U[(1+k')x, k'_{(1)}] = \dfrac{1+k'}{1-k'U^2}U = \mathrm{Sh}(\Phi+\Phi'), \\ V[(1+k')x, k'_{(1)}] = \dfrac{1+k'}{1+k'V^2}V = \mathrm{Ch}(\Phi-\Phi'), \end{cases}$$

analogues aux formules (51), (52).

Si l'on répète n fois la transformation (69), on a

$$x_{(n)} = \frac{(1+k')(1+k'_{(1)})\ldots(1+k'_{(n-1)})}{2^n}x = g_{(n)}x,$$

$$\left(k'_{(1)} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'},\ k'_{(2)} = \frac{2\sqrt{k'_{(1)}}}{1+k'_{(1)}},\ \ldots\right);$$

(¹) Leurs rapports avec 2^n tendent vers une limite commune $\dfrac{\pi x}{2K'}$, et le module tend vers zéro.

$g_{(n)}$ que l'on peut écrire

$$(1+k_{(1)})(1+k_{(2)})\ldots(1+k_{(n)}),$$

tend vers $\frac{\pi}{2K}$ en croissant, en sorte que $x_{(n)}$ reste fini quel que soit n. Posant

$$U(x_{(n)}, k'_{(n)}) = U_{(n)}, \qquad V(x_{(n)}, k'_{(n)}) = V_{(n)},$$

on voit que, $k'_{(n)}$ tendant vers 1,

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lim U_{(n)} = \frac{1}{i}\lim u(ix_{(n)}, k'_{(n)}) = \operatorname{tang}\frac{\pi x}{2K},\\ &\lim V_{(n)} = 1.\end{aligned}\right.$$

Si l'on écrit

$$\begin{aligned} (1+k')\,U(x,k') &= 2\,U_{(1)}V_{(1)},\\ (1+k'_{(1)})\,U_{(1)} &= 2\,U_{(2)}V_{(2)},\\ (1+k'_{(2)})\,U_{(2)} &= 2\,U_{(3)}V_{(3)},\\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

on obtient, par n égalités de cette forme,

$$(72)\qquad U(x,k') = \frac{U(g_{(n)}x, k'_{(x)})}{g_{(n)}} V_{(1)}V_{(2)}\ldots V_{(n)},$$

et en faisant croître n indéfiniment

$$(73)\qquad \left\{\begin{aligned} &U(x,k') = 2K\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi x}{2K}\right)}{\pi} V_{(1)}V_{(2)}\ldots V_{(n)}\ldots,\\ &\left[x_{(n)} = \frac{(1+k')(1+k'_{(1)})\ldots(1+k'_{(n-1)})}{2^n}\,x\right],\end{aligned}\right.$$

formule analogue à la suivante [1].

$$(74)\qquad \operatorname{Sh} x = x \operatorname{Ch}\frac{x}{2}\operatorname{Ch}\frac{x}{2^2}\operatorname{Ch}\frac{x}{2^3}\ldots,$$

---

[1] Les formules (49) et (74) concernant les fonctions circulaires ou hyperboliques élémentaires (modo), et dont nous avons trouvé des analogues concernant les fonctions elliptiques u, v ou hyperboliques U, V (mod $\neq$ 0) sont tirées de l'Ouvrage cité de M. Laisant (*Essai sur*..., 1874).

à laquelle elle se réduit lorsqu'on fait $k' = 0$, $(K = \infty)$.

La formule (73) est, pour les fonctions hyperboliques U, V (mod k'), ce qu'est la formule (48) pour les fonctions elliptiques u, v (mod k), comme la formule (74) est pour les fonctions hyperboliques élémentaires (mod o), ce qu'est la formule (49) pour les fonctions circulaires, c'est-à-dire les fonctions elliptiques élémentaires (mod o).

L'analogie des formules (73) et (74) est de la seconde sorte [*voir* la note (c)]. On obtient une analogue directe de la formule (74) en multipliant membre à membre n égalités de la forme suivante (duplication de l'argument) :

$$(75)\quad \left\{ \begin{aligned} & U\left(\frac{x}{2^{p-1}}, k'\right) = \frac{2\,U\left(\frac{x}{2^p}, k'\right) V\left(\frac{x}{2^p}, k'\right)}{V^2\left(\frac{x}{2^p}, k'\right) - U^2\left(\frac{x}{2^p}, k'\right)} \\ & \qquad\qquad (p = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \right.$$

puis faisant croître n indéfiniment; on a ainsi, comme dans le cas des fonctions u, v (50) :

$$(76)\quad U(x, k') = x\,\frac{V\left(\frac{x}{2}, k'\right) V\left(\frac{x}{2^2}, k'\right) V\left(\frac{x}{2^3}, k'\right)\cdots}{\prod_1^\infty \left[V^2\left(\frac{x}{2^p}, k'\right) - U^2\left(\frac{x}{2^p}, k'\right)\right]}.$$

Dans le présent Mémoire, nous avons donné quelques propriétés, analytiques ou géométriques, des fonctions $u = \operatorname{sn} x$, $v = \operatorname{sn}(x + K)$ et des fonctions hyperboliques qui en dérivent par la considération d'un argument purement imaginaire [1]; on nous permettra de conclure,

---

[1] Le lecteur est prié d'écrire lui-même les formules concernant $u(x, k')$, $v(x, k')$, pour passer directement à $U = \frac{u(ix, k')}{i}$, $V = v(ix, k')$.

comme dans notre première Note sur ces fonctions parue en 1898 dans ce Journal : *les fonctions*

$$u = \mathrm{sn}(x, k), \qquad v = \mathrm{sn}(x + \mathrm{K}, k)$$

sont, par leurs propriétés corrélatives, les analogues des fonctions $\sin x$, $\cos x$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1075.

(1872, p. 190.)

Le nombre des nombres premiers compris entre un nombre entier positif A *et son double est moindre que celui des nombres premiers non supérieurs à* A.

(Lionnet.)

SOLUTION

Par M. E. Landau.

Le théorème démontré, il y a quelques années, par MM. von Mangoldt et de la Vallée-Poussin que le nombre $\pi(x)$ des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à $\frac{x}{\log x}$ ne prouve que l'égalité asymptotique des deux grandeurs en question; ce n'est que la proposition suivante, due à M. de la Vallée-Poussin, qui permet de trancher la question :

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + \mathrm{O}\left(x\, e^{-a\sqrt{\log x}}\right),$$

où $\mathrm{Li}(x)$ désigne le logarithme intégral, a une constante positive et $\mathrm{O}[\mathrm{G}(x)]$ une fonction telle que son quotient par $\mathrm{G}(x)$ reste fini pour $x = \infty$.

En effet, en vertu de l'identité

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\log x} &= \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + 2\int \frac{dx}{\log^3 x} \\ &= \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)\end{aligned}$$

on a, l'ordre de grandeur de $xe^{-a\sqrt{\log x}}$ étant inférieur à celui de $\frac{x}{\log^3 x}$,

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right),$$

$$\begin{aligned}\pi(2x) &= \frac{2x}{\log x + \log 2} + \frac{2x}{(\log x + \log 2)^2} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right) \\ &= \frac{2x}{\log x} - \frac{2\log 2 . x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right).\end{aligned}$$

Or, l'excès du nombre des nombres premiers compris entre x et $2x$ sur celui des nombres premiers inférieurs à x est

$$\pi(2x) - 2\pi(x) = -2\log 2 \frac{x}{\log^2 x} + O\left(\frac{x}{\log^3 x}\right);$$

cet excès est donc négatif pour tous les x supérieurs à une certaine limite. Le calcul de cette limite, à partir de laquelle le théorème en question est ainsi démontré, n'offre aucun intérêt, car elle dépasse de beaucoup la limite des Tables de nombres premiers.

1548.

(1885, p. 487.)

Prouver que

$$\frac{(C_{2n-2p,n-p} \times C_{2p,p})^2}{C_{n,p}} = \textit{entier}.$$

(CATALAN.)

SOLUTION

Par M. E. LANDAU.

En posant

$$n - p = x_1, \qquad p = x_2,$$

il s'agit de démontrer que

$$\begin{aligned}&\frac{(C_{2x_1,x_1} \times C_{2x_2,x_2})^2}{C_{x_1+x_2,x_2}} \\ &= \frac{2x_1!\,2x_1!\,2x_2!\,2x_2!\,x_1!\,x_2!}{x_1!\,x_1!\,x_1!\,x_1!\,x_2!\,x_2!\,x_2!\,x_2!\,(x_1+x_2)!} \\ &= \frac{2x_1!\,2x_1!\,2x_2!\,2x_2!}{x_1!\,x_1!\,x_1!\,x_2!\,x_2!\,x_2!\,(x_1+x_2)!} = \text{entier}.\end{aligned}$$

Pour cela, il suffit, en vertu du théorème que j'ai établi (p. 356 du t. XIX, 1900) que

$$(1) \qquad 2[2y_1] + 2[2y_2] \geqq 3[y_1] + 3[y_2] + [y_1 + y_2],$$

pour toutes les valeurs de y_1, y_2 comprises entre 0 et 1 (inclusivement).

1° Pour $y_1 = 1, y_2 = 1$, l'on a en effet

$$4 + 4 = 3 + 3 + 2;$$

2° Pour $y_1 = 1, y_2 < 1$, (1) prend la forme

$$4 + 2[2y_2] \geqq 3 + 1 = 4,$$

ce qui est évident, $[2y_2]$ étant 0 ou 1;

3° Pour $y_1 < 1, y_2 = 1$, (1) revient pareillement à l'inégalité évidente

$$2[2y_1] + 4 \geqq 3 + 1 = 4;$$

4° Pour $y_1 < 1, y_2 < 1$, il faut prouver que

$$2[2y_1] + 2[2y_2] \geqq [y_1 + y_2].$$

En effet, la plus grande des deux quantités $2y_1$, $2y_2$ est, à elle seule, au moins égale à leur moyenne arithmétique

$$y_1 + y_2.$$

1675.

(1894, p. 4*.)

On considère tous les cercles de rayon constant tangents à une conique. Lieu du pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique par rapport à la conique. Cas particulier d'un cercle de rayon nul. Montrer que, dans ce cas, le pôle de la seconde corde d'intersection du cercle et de la conique n'est autre que le point fixe du théorème de Frégier, relatif aux angles droits ayant leur sommet au point considéré de la conique.

(André Cazamian.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

1° *Cas d'une conique à centre (ellipse).* — Soit l'équation de l'ellipse

$$(1)\qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

La tangente au point (x_1y_1) de l'ellipse a pour équation

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 - a^2b^2 = 0.$$

La seconde sécante d'intersection de l'ellipse avec un cercle tangent en (x_1y_1) à l'ellipse a pour équation

$$(2)\qquad b^2xx_1 - a^2yy_1 + \mu = 0;$$

de sorte que l'équation de ce cercle est de la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)\\ &\quad + (b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2)(b^2xx_1 - a^2yy_1 + \mu) = 0,\end{aligned}\right.$$

avec la condition

$$\lambda = \frac{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}{c^2}.$$

En tenant compte de cette valeur de λ, et de la relation

$$(4)\qquad b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2,$$

l'équation (3) du cercle devient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &a^4b^4(x^2+y^2)\\ &\quad + b^2c(\mu - a^2b^2)x_1x + a^2c(\mu + a^2b^2)y_1y\\ &\qquad\qquad - a^2b^2(\mu c^2 + a^4y_1^2 + b^4x_1^2) = 0.\end{aligned}\right.$$

Si R désigne le rayon de ce cercle, on a

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &4\mathrm{R}^2a^8b^8 = b^4c^4x_1^2(\mu - a^2b^2)^2\\ &\quad + a^4c^4y_1^2(\mu + a^2b^2)^2 + 4a^6b^6(\mu c^2 + a^4y_1^2 + b^4x_1^2).\end{aligned}\right.$$

Or, cette relation peut s'écrire

$$(7)\qquad 4\mathrm{R}^2a^8b^8 = (b^4x_1^2 + a^4y_1^2)[\mu c^2 + a^2b^2(a^2 + b^2)]^2.$$

La polaire d'un point (α, β) par rapport à l'ellipse donnée est

$$b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2 b^2 = 0. \tag{8}$$

En identifiant (2) et (8), on trouve

$$\frac{x_1}{\alpha} = \frac{-y_1}{\beta} = \frac{\mu}{-a^2 b^2}. \tag{9}$$

On aura le lieu du pôle (α, β) en éliminant x_1, y_1 et μ entre les équations (4) et (7) et les deux équations (9). En résolvant (9) et (4), on trouve

$$x_1 = \frac{ab\alpha}{\sqrt{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}},$$

$$y_1 = -\frac{ab\beta}{\sqrt{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}},$$

$$\mu = \frac{-a^3 b^3}{\sqrt{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}}.$$

En portant ces valeurs dans (7), on obtient pour l'équation du lieu

$$4a^2b^2R^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)^2 \\ = (b^4\alpha^2 + a^4\beta^2)\left[(a^2 + b^2)\sqrt{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2} - abc^2\right]^2,$$

ou, en chassant le radical,

$$\left\{\begin{aligned} &\Big\{(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2)\left[(a^2+b^2)^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2) + c^4a^2b^2\right] \\ &\qquad\qquad - 4a^2b^2R^2(b^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)^2\Big\}^2 \\ &= 4a^2b^2c^4(a^2+b^2)^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)(b^4\alpha^2 + a^4\beta^2)^2; \end{aligned}\right. \tag{10}$$

c'est une courbe du huitième degré.

L'équation (7) donne les deux valeurs de μ, correspondant à chacun des deux cercles de rayon R, tangents à l'ellipse au point $(x_1 y_1)$.

Lorsque $R = 0$, on a

$$\mu = -\frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{c^2}, \tag{11}$$

et le lieu (10) devient

$$(12)\qquad (a^2+b^2)^2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)-c^4a^2b^2=0;$$

c'est une ellipse concentrique et homothétique à l'ellipse donnée.

En portant la valeur (11) de μ dans (9), on a

$$(13)\qquad \alpha=\frac{c^2x_1}{a^2+b^2},\qquad \beta=\frac{c^2y_1}{a^2+b^2}.$$

Considérons maintenant le triangle rectangle inscrit dans l'ellipse, ayant le sommet de l'angle droit en (x_1y_1) et les côtés de l'angle droit parallèles aux axes. L'hypoténuse de ce triangle a pour équation

$$(14)\qquad y=-x\frac{y_1}{x_1}.$$

Celle de la normale en (x_1y_1) est

$$(15)\qquad a^2xy_1-b^2yx_1=c^2x_1y_1.$$

En résolvant (14) et (15), on trouve pour les coordonnées du point de Frégier

$$x=\frac{c^2x_1}{a^2+b^2},\qquad y=-\frac{c^2y_1}{a^2+b^2};$$

ce sont précisément les coordonnées (13).

Donc, lorsque $R=0$, le point (α,β) est bien le point de Frégier relatif à la normale au point (x_1y_1).

2° *Cas de la parabole.* — Le calcul se conduit d'une façon tout à fait analogue au cas de la conique à centre.

L'équation de la parabole est

$$(16)\qquad y^2-2px=0.$$

L'équation de la tangente en (x_1y_1) est

$$(17)\qquad yy_1-px-px_1=0.$$

Celle de la seconde corde d'intersection est

$$(18)\qquad yy_1+px+\mu=0.$$

L'équation du cercle tangent à la parabole en $(x_1 y_1)$ est

$$(19)\quad \lambda(y^2 - 2px) + (yy_1 - px - px_1)(yy_1 + px + \mu) = 0,$$

avec la condition

$$\lambda = -(y_1^2 + p^2) = -p(2x_1 + p).$$

L'équation (19) s'écrit donc

$$(20)\quad \begin{cases} p^2(x^2 + y^2) + p(\mu - 3px_1 - 2p^2)x \\ \qquad - y_1(\mu - px_1)y + p\mu x_1 = 0; \end{cases}$$

R étant le rayon de ce cercle, on trouve

$$(21)\quad 4R^2p^3 = (2x_1 + p)[\mu - p(x_1 + 2p)]^2.$$

La polaire d'un point (α, β) par rapport à la parabole a pour équation

$$(22)\quad px - \beta y + p\alpha = 0.$$

En identifiant les équations (18) et (22), on trouve

$$(23)\quad y_1 = -\beta,$$

$$(24)\quad \mu = p\alpha.$$

De (23) on déduit

$$(25)\quad x_1 = \frac{\beta^2}{2p}.$$

Si donc on porte dans (21) les valeurs (24) et (25) de μ et de x_1, on trouve

$$(26)\quad (\beta^2 + p^2)(\beta^2 - 2p\alpha + 4p^2)^2 = 16R^2p^4.$$

Dans le cas de la parabole, le lieu de (α, β) s'abaisse de deux degrés et devient une sextique.

Si, dans (21), l'on fait $R = 0$, il vient

$$\mu = p(x_1 + 2p).$$

Alors, d'après (24) et (23),

$$(27)\quad \alpha = x_1 + 2p,$$

$$(28)\quad \beta = -y_1.$$

Ce sont encore bien les coordonnées du point du théorème de Frégier, relatif au point $(x_1 y_1)$.

Lorsque $R = 0$, le lieu du point (α, β) est la parabole d'équation

$$\beta^2 - 2p\alpha + 4p^2 = 0. \tag{29}$$

Autre solution de M. H. Dellac.

1823.

(1899, p. 244.)

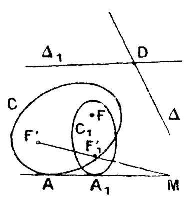
Deux coniques C *et* C_1 *ont en commun le foyer* F, *auquel correspondent pour chacune d'elles les directrices* Δ *et* Δ_1 *qui se coupent au point* D. *Démontrer que les tangentes communes à ces coniques passent par le point de rencontre de la droite qui joint les deux autres foyers* F' *et* F'_1 *et de la perpendiculaire élevée en* F *à la droite* FD.

(M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. J. Lez.

Soit AA_1 une tangente commune qui coupe $F'F'_1$ en M; les deux autres tangentes issues de M devant faire avec MF des



angles égaux à $\widehat{AMF'}$, et du même côté de MF, coïncident. M est donc un ombilic.

La droite FM, joignant deux ombilics conjugués, a même pôle par rapport aux deux coniques; ce pôle est à la fois sur les polaires Δ et Δ_1 de F, c'est-à-dire en D; et alors FM, polaire du point D de la directrice Δ par rapport à C, est perpendiculaire à FD, ce qui démontre le théorème.

Autres solutions de MM. Audibert et Droz-Farny.

CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » EN 1902.

Sujet.

On considère la surface dont l'équation relative aux trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz *est*

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{l^2}$$

et le plan tangent (Π) *au point* DONNÉ (x_0, y_0, z_0) *de cette surface.*

Ce plan étant fixé, ainsi que le centre O *de la surface, on la fait rouler sur le plan* (Π), *de façon que la rotation instantanée* OI *soit constamment dirigée vers le point de contact* M *et demeure proportionnelle à la longueur du rayon* OM :

$$\mathrm{OI}=n\times\mathrm{OM},$$

n *étant une constante donnée.*

Former l'équation qui définit la rotation

$$\mathrm{OI}=\Omega$$

en fonction du temps. Étudier la variation de cette rotation ainsi que celles de ses composantes suivant les axes Ox, Oy, Oz, *supposés entraînés dans le mouvement de la surface. Effectuer l'intégration en introduisant au besoin une variable intermédiaire.*

Former les deux équations qui définissent à la fois la courbe (Γ) *décrite par le point de contact* M *sur le plan* (Π) *et le mouvement de ce point sur cette courbe. Étudier la courbe* (Γ) *et la vitesse avec laquelle elle est parcourue par le point* M. *Montrer que, le plus souvent, la courbe* (Γ) *est identique à l'herpolhodie due au roulement d'une certaine quadrique sur un certain plan et trouver la nature de cette quadrique. Effectuer les intégrations.*

Nota. — *On expliquera avec précision comment sont déterminées les fonctions et les quantités qui seront introduites pour les besoins de l'intégration, et l'on examinera tous les cas que peut présenter la question.*

Conditions.

Le Concours est ouvert à *tous* les lecteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 200$^{\text{fr}}$ d'Ouvrages à choisir dans le Catalogue de M. Gauthier-Villars;

2° A la publication du Mémoire;

3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la Rédaction avant le 15 novembre 1902, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonyme. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir du 15 novembre 1902 et après le jugement prononcé.

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mémoires; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un Travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 15 décembre 1902, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mentionnées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire connaître sans retard s'il désire que la publication de son travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

LES RÉDACTEURS.

[F8hβ] [T2α]

ÉTUDE D'UNE ÉLASTIQUE GAUCHE. HÉLICE SOUMISE A L'ACTION D'UN COUPLE;

Par M. B. ÉLIE.

Lorsqu'un fil élastique, qui primitivement a une courbure et une torsion nulles, est actionné par une force et un couple appliqués à une de ses extrémités, l'autre étant fixée, les équations différentielles qui expriment l'équilibre final se trouvent être les mêmes que celles relatives au mouvement d'un corps grave de révolution (1).

L'étude de ces deux problèmes, dont l'un est en quelque sorte l'image de l'autre, s'est donc faite d'une façon simultanée et surtout par les nombreux travaux dont le second a été l'objet.

Mais lorsque la torsion ainsi que la courbure initiales du fil ne sont pas nulles, les équations différentielles sont modifiées et l'analogie indiquée n'existe plus.

En partant de cette nouvelle hypothèse on s'est borné à établir qu'une hélice demeure une hélice lorsque la force et l'axe du couple sont parallèles à l'axe de l'hélice.

---

(1) *Voir* à ce sujet : Kirchhoff, *Vorlesungen über matematische Physik*, 1876.

W. Thomson, *Treatise on natural philosophy*, Vol. I, Part II, 1883.

Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, 1886.

Je me suis proposé, dans ce qui suit, d'examiner un second cas particulier, celui où l'une des extrémités étant fixée, l'autre est seulement soumise à un couple de direction quelconque. On verra qu'alors l'hélice vient se placer sur un tore dont la méridienne n'est pas circulaire.

Dans un premier paragraphe, outre les définitions et les formules qu'il y aurait lieu d'utiliser, sont établies les équations différentielles du problème sous diverses formes; dans un deuxième paragraphe, les équations sont résolues en admettant une hypothèse très particulière sur les constantes d'élasticité, mais qui permet de se faire une idée claire de la forme de l'élastique; dans un dernier paragraphe la question est traitée à l'aide des fonctions elliptiques sans imposer à la substance du fil d'autre condition que d'être isotrope. Les formules auxquelles on est conduit se rapprochent alors beaucoup de celles relatives au mouvement d'un solide de révolution dans un liquide ([1]).

§ I. — Équations d'équilibre.

Considérons un fil très mince de substance homogène, dont la section reste invariable et a deux axes de symétrie. Le lieu des centres des sections sera, par définition, la courbe du fil. Supposons la substance anisotrope, mais telle cependant qu'elle possède trois axes de symétrie cristalline rectangulaires : l'un dirigé suivant la tangente au fil, les deux autres suivant les axes de la section. Ces axes constituent un trièdre de coordonnées mobiles le long de la courbe que je désigne par p, q, r.

([1]) *Voir* à ce sujet : Greenhill, *Treatise of elliptic fonctions.*

Soient

p_0, q_0 les projections de l'inverse des rayons de courbure initiale sur les axes p et q;

r_0 une longueur égale à la torsion portée sur l'axe des r;

p, q, r ces mêmes éléments relatifs à la courbe déformée;

P, Q, R les différences $p - p_0$, $q - q_0$, $r - r_0$;

A, B, C trois constantes dépendant de la section et de la substance du fil.

J'admettrai que l'énergie élastique de l'unité de longueur, après une déformation, a pour expression en tout point du fil :

$$E = \frac{1}{2}(AP^2 + BQ^2 + CR^2), \tag{1}$$

que par suite les composantes du couple dû à l'élasticité du fil suivant les axes, sont

$$\frac{\partial E}{\partial P} \quad \text{ou} \quad AP, \qquad \frac{\partial E}{\partial Q} \quad \text{ou} \quad BQ, \qquad \frac{\partial E}{\partial R} \quad \text{ou} \quad CR.$$

Les conditions d'équilibre s'obtiennent en égalant ces quantités aux composantes suivant les mêmes axes des couples extérieurs. Si, en outre, une force agit à l'extrémité libre du fil, il faudra adjoindre au premier couple un autre agissant en chaque point du fil provenant du transport de la force en ce point. La composante suivant la tangente du couple résultant modifie la torsion du fil, la composante suivant une perpendiculaire à cette tangente modifie la courbure.

Pour donner une forme explicite à ces conditions, nous devons rapporter la courbe à un système d'axes arbitraires, mais fixes, Ox, Oy, Oz. La position de ces axes par rapport aux coordonnées mobiles est définie par le Tableau suivant, dans lequel j'ai exprimé les neuf cosinus α, β, γ, en fonction des angles d'Euler qu'il y aura lieu d'utiliser plus tard :

$$
(2)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
x\ldots & \alpha_1 = & \cos\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi, \\
y\ldots & \alpha_2 = & \cos\theta\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi, \\
z\ldots & \alpha_3 = & -\sin\theta\cos\varphi, \\
 & & \quad p; \\
x\ldots & \beta_1 = & -\cos\theta\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi, \\
y\ldots & \beta_2 = & -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi, \\
z\ldots & \beta_3 = & \sin\theta\sin\varphi, \\
 & & \quad q; \\
x\ldots & \gamma_1 = & \sin\theta\cos\psi, \\
y\ldots & \gamma_2 = & \sin\theta\sin\psi, \\
z\ldots & \gamma_3 = & \cos\theta, \\
 & & r.
\end{array}
\right.
$$

Si nous désignons par F_x, F_y, F_z ; M_x, M_y, M_z les projections sur les axes fixes de la force et du couple extérieurs agissant à une extrémité du fil, les équations d'équilibre sont

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\alpha_1\frac{\partial E}{\partial P} + \beta_1\frac{\partial E}{\partial Q} + \gamma_1\frac{\partial E}{\partial R} &= M_x + yF_z - zF_y, \\
\alpha_2\frac{\partial E}{\partial P} + \beta_2\frac{\partial E}{\partial Q} + \gamma_2\frac{\partial E}{\partial R} &= M_y + zF_x - xF_z, \\
\alpha_3\frac{\partial E}{\partial P} + \beta_3\frac{\partial E}{\partial Q} + \gamma_3\frac{\partial E}{\partial R} &= M_z + xF_y - yF_x,
\end{aligned}
\right.
$$

les indices x, y, z indiquant la coordonnée suivant laquelle on projette la force ou le couple.

Transformons ce système en un autre qui ne contienne plus ni les M_{xyz} ni les α, β, γ. Pour cela, remarquons que, d'après les définitions des composantes de la courbure p, q et de la torsion r, on a, l'accent indiquant la dérivée par rapport à l'élément d'arc ds :

$$(4)\begin{cases} p = \gamma_1\beta'_1 + \gamma_2\beta'_2 + \gamma_3\beta'_3, & p = -(\beta_1\gamma'_1 + \beta_2\gamma'_2 + \beta_3\gamma'_3), \\ q = \alpha_1\gamma'_1 + \alpha_2\gamma'_2 + \alpha_3\gamma'_3, & q = -(\gamma_1\alpha'_1 + \gamma_2\alpha'_2 + \gamma_3\alpha'_3), \\ r = \beta_1\alpha'_1 + \beta_2\alpha'_2 + \beta_3\alpha'_3, & r = -(\alpha_1\beta'_1 + \alpha_2\beta'_2 + \alpha_3\beta'_3), \end{cases}$$

que, de plus,

$$(5)\qquad \gamma_1 = \frac{dx}{ds}, \qquad \gamma_2 = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma_3 = \frac{dz}{ds}.$$

Prenons les dérivées des équations (3) par rapport à s, multiplions-les respectivement par α_1, α_2, α_3 et ajoutons, en tenant compte des relations précédentes; nous obtenons la première des équations suivantes dont les deux autres s'obtiennent d'une façon analogue :

$$(6)\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial E}{\partial P} - r\dfrac{\partial E}{\partial Q} + q\dfrac{\partial E}{\partial R} = \beta_1 F_x + \beta_2 F_y + \beta_3 F_z = F_q, \\ \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial E}{\partial Q} - p\dfrac{\partial E}{\partial Q} + r\dfrac{\partial E}{\partial P} = -(\alpha_1 F_x + \alpha_2 F_y + \alpha_3 F_z) = -F_p, \\ \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial E}{\partial R} - q\dfrac{\partial E}{\partial Q} + p\dfrac{\partial E}{\partial Q} = 0. \end{cases}$$

On peut mettre encore les égalités (3) sous une autre forme telle que l'a donnée Binet ([1]). Caractérisons, par des accents, les dérivées successives de x, y, z et rappelons que $\sqrt{p^2+q^2}$ est l'inverse du rayon de courbure. On déduit immédiatement des égalités (4) multipliées par α, β et ajoutées, ainsi que de (5) :

$$(7)\begin{cases} \alpha_1(P+p_0) + \beta_1(Q+q_0) = y'z'' - z'y'' = \alpha_1\sqrt{p^2+q^2}, \\ \alpha_2(P+p_0) + \beta_2(Q+q_0) = z'x'' - x'z'' = \alpha_2\sqrt{p^2+q^2}, \\ \alpha_3(P+p_0) + \beta_3(Q+q_0) = x'y'' - y'x'' = \alpha_3\sqrt{p^2+q^2}. \end{cases}$$

Si l'on élimine P, Q, R entre ces équations et celles (3),

([1]) *Voir* BINET et WANZEL, *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, 1844.

en désignant par δ, μ, ν les deuxièmes membres de ces dernières, on obtient :

$$(8)\quad \begin{cases} A(y'z'' - z'y'') + CRx' = A(\alpha_1 p_0 + \beta_1 q_0) + \delta, \\ B(z'x'' - x'z'') + CRy' = B(\alpha_2 p_0 + \beta_2 q_0) + \mu, \\ C(x'y'' - y'x'') + CRz' = C(\alpha_3 p_0 + \gamma_3 q_0) + \nu. \end{cases}$$

Suivant les données et les conditions imposées il y aura lieu d'employer telle ou telle de ces formules. Dans le cas présent, la courbe initiale est une hélice, p_0, q_0, r_0 sont constants; la force extérieure est nulle, $F_{xyz} = 0$. Le groupe (6) doit être adopté. Je l'écrirai :

$$(9)\quad \begin{cases} A\dfrac{d(p-p_0)}{ds} = Br(q-q_0) - Cq(r-r_0), \\ B\dfrac{d(q-q_0)}{ds} = Cp(r-r_0) - Ar(p-p_0), \\ C\dfrac{d(r-r_0)}{ds} = Aq(p-p_0) - Bp(q-q_0). \end{cases}$$

Il permet de trouver les valeurs de p, q, r. On en déduit en effet les deux intégrales :

$$(10)\qquad A^2P^2 + B^2Q^2 + C^2R^2 = \text{const.} = M^2.$$

$$(11)\qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.}$$

Le premier membre de (10) est le carré du moment du couple d'élasticité et égal par suite au carré du moment du couple extérieur que je désigne par M. En éliminant P et Q entre ces intégrales et la troisième (9) on trouve une relation entre la dérivée $\dfrac{dv}{ds}$ et la racine d'un polynome en r qui ne s'abaissera au quatrième que si deux des constantes A, B, C deviennent égales. C'est une nouvelle restriction que l'on devra s'imposer.

Pourtant je vais montrer que si les quantités P, Q, R sont supposées connues on peut, même si A, B et C sont inégales, ramener la recherche des α, β, γ et des coordonnées à des quadratures. Les valeurs des α, β, γ se déduisent en effet des équations (4) ou de leurs transformées

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\alpha_i}{\partial s} &= r\beta_i - q\gamma_i,\\ \frac{\partial\beta_i}{\partial s} &= p\gamma_i - r\alpha_i,\\ \frac{\partial\gamma_i}{\partial s} &= q\alpha_i - p\beta_i. \end{aligned}\right.$$

Or ces égalités sont satisfaites par la solution particulière

$$(13)\qquad \alpha_3 = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{M}},\qquad \beta_3 = \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{M}},\qquad \gamma_3 = \frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{M}},$$

en faisant $i = 3$ et supposant M constant. Car on retombe ainsi sur les équations (9) qui sont supposées vérifiées. D'autre part, on déduit des valeurs des α, β, γ du Tableau (2) et des égalités (4)

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \mathrm{P} + p_0 = \sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} - \sin\theta\cos\varphi\frac{d\psi}{ds},\\ q &= \mathrm{Q} + q_0 = \cos\varphi\frac{d\theta}{ds} + \sin\theta\sin\varphi\frac{d\psi}{ds},\\ r &= \mathrm{R} + r_0 = \frac{d\varphi}{ds} + \cos\theta\frac{d\psi}{ds}, \end{aligned}\right.$$

d'où, par les deux premières,

$$-(\mathrm{P} + p_0)\cos\varphi + (\mathrm{Q} + q_0)\sin\varphi = \sin\theta\frac{d\psi}{ds}.$$

Éliminons θ et φ entre cette égalité et les suivantes

$$\alpha_3 = -\sin\theta\cos\varphi,\qquad \beta_3 = \sin\theta\sin\varphi,\qquad \gamma_3 = \cos\theta,$$

et utilisons les valeurs (13) des α_3, β_3, γ_3, nous arrivons à

$$(15)\qquad \frac{d\psi}{ds} = \mathrm{M}\,\frac{\mathrm{AP}p + \mathrm{BQ}q}{\mathrm{A^2P^2} + \mathrm{B^2Q^2}}.$$

ψ étant connu, on a les α, β, γ par le Tableau (2) et

x, y, z pour les relations (5)

$$(16)\quad x=\int \sin\theta\cos\psi\, ds,\quad y=\int \sin\theta\sin\psi\, ds,\quad z=\int \cos\theta\, ds.$$

jointes à

$$\cos\theta = \frac{CR}{M}.$$

C'est la marche que j'adopterai dans les applications. Avant d'y arriver, examinons encore de quelle façon il faut limiter les hypothèses très générales faites au début, lorsque nous supposerons l'égalité de deux des constantes A et B. En premier lieu, on devra admettre que la section du fil est circulaire. En second lieu, les constantes d'élasticité devront être égales dans deux directions rectangulaires de cette section. Ceci revient à considérer la substance du fil comme isotrope.

A, B et C ont alors la signification suivante : soient χ le moment d'inertie de la section circulaire S de rayon h relative à son centre

$$\chi = \frac{\pi h^2}{2} S;$$

λ et μ les constantes d'élasticité de Lamé.

On a

$$(17)\qquad A = B = \chi\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda+\mu)},\qquad C = \chi\mu.$$

Pour les métaux élastiques, on a à peu près $\lambda = \mu$, par suite

$$\frac{A}{C} = \frac{5}{4},\qquad \text{et en général}\qquad A > C.$$

A n'est égal à C que si le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ est nul. Lorsque la substance est isotrope ($A = B$) la position des axes p, q est arbitraire, on peut adopter pour axe q la direction du rayon de courbure initial, c'est-à-dire poser

$q_0 = 0$; l'axe p est alors dirigé suivant la binormale. C'est ce que je supposerai désormais.

Une dernière simplification résulte de ce que la position des axes fixes est aussi indéterminée. Choisissons pour axe y la direction de l'axe du couple extérieur; alors les équations (3) (les F étant supposés nuls) s'écrivent

$$(18) \qquad \begin{cases} A\alpha_1 P + B\beta_1 Q + C\gamma_1 R = 0, \\ A\alpha_2 P + B\beta_2 Q + C\gamma_2 R = 0, \\ A\alpha_3 P + B\beta_3 Q + C\gamma_3 R = M. \end{cases}$$

Remarquons que les expressions (13) de α_3, β_3, γ_3 rendent la dernière équation identique. Quant aux deux autres, elles sont vérifiées par les valeurs α, β, γ du Tableau (2) si les lignes trigonométriques en θ et φ sont exprimées en fonction de P, Q et R d'après les mêmes égalités (13).

§ II. — Examen du cas de $A = B = C$.

D'après ce qui précède, cette double égalité n'est jamais réalisée. Je traiterai cependant ce cas, et même en premier lieu, parce que les calculs, relativement très simples, conduisent à des résultats qui, au point de vue analytique, diffèrent de ceux auxquels on arrive dans le cas général, mais qui en diffèrent très peu aux points de vue géométrique et mécanique. La discussion se trouvera abrégée d'autant dans l'examen du cas général.

Calcul de p, q, r. — Les équations (9) se réduisent à

$$(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{ds} = r_0 q - q_0 r, \\[2mm] \dfrac{dq}{ds} = p_0 r - r_0 p, \\[2mm] \dfrac{dr}{ds} = q_0 p - p_0 q. \end{cases}$$

Supposons $q_0 = 0$, c'est-à-dire l'axe p dans la direction des rayons de courbure initiale.

Soient

i l'inclinaison de l'hélice initiale;
l la longueur d'une spire;
c et τ sa courbure et sa torsion;
ν le rayon du cylindre sur lequel elle est tracée.

Nous avons

$$(20) \qquad p_0 = c = \frac{\cos i \sin i}{\nu}, \qquad r_0 = \tau = \frac{\cos^2 i}{\nu}.$$

Posons

$$\varpi^2 = c^2 + \tau^2 = \frac{\cos^2 i}{\nu^2} = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2.$$

Les équations (21) s'écrivent

$$(21) \qquad \frac{dp}{ds} = \tau q, \qquad \frac{dq}{ds} = cr - \tau q, \qquad \frac{dr}{ds} = -cq.$$

L'étude de la courbe après déformation est facilitée par la considération de quatre de ses points, que je désignerai par les indices 1, 2, 3 et 4.

Les points 2 et 4 correspondent aux valeurs

$$p_2 \text{ ou } p_4 = c, \qquad q_2 \text{ ou } q_4 = \pm m, \qquad r_2 \text{ ou } r_4 = \tau,$$

m étant défini par

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}m.$$

Ces valeurs rendent identique l'intégrale (10) où

$$(22) \qquad \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2 = m^2$$

définissent la constante de l'intégrale (11)

$$(23) \qquad p^2 + q^2 + r^2 = a^2 + m^2 + r^2$$

et annulent $\frac{dq}{ds}$; q est donc maximum en ces points et égal à m. On verra plus loin que la tangente en ces points est perpendiculaire à l'axe du couple et qu'ils sont équidistants des points 1 et 3.

L'inclinaison j du plan osculateur de la courbe sur le plan osculateur initial est donnée en ces points par

$$\operatorname{tang} j = \frac{c}{m}.$$

En un point quelconque, la tangente de cet angle est donnée par $\frac{p}{q}$. A l'aide des relations (25), on trouve qu'il est maximum pour un point situé entre 1 et 2.

Les points 1 et 3 correspondent au maximum et au minimum de r. Éliminons p, q entre les intégrales (21), (23) et la troisième équation (21); nous trouvons

$$(24) \qquad -\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = (r-\tau)^2 - \frac{m^2 c^2}{\varpi^2}.$$

Par suite, le maximum et le minimum de r sont

$$r_1 \quad \text{ou} \quad r_3 = \tau \pm \frac{mc}{\varpi}.$$

Ces valeurs de r rendent p minimum ou maximum; on a

$$p_1 \quad \text{ou} \quad p_3 = c \mp \frac{\tau m}{\varpi}.$$

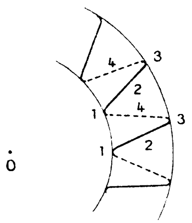
D'après (21) on a de plus $q=0$; par suite, le plan osculateur de la courbe finale est confondu avec celui de l'hélice initiale.

En intégrant l'équation (24) et utilisant les intégrales (22) et (23) on obtient, si l'origine des arcs est au point 1,

$$(25) \qquad \begin{cases} P = p - c = m\dfrac{\tau}{\varpi}\cos\varpi s, \\ Q = q(-q_0 = 0) = \pm m \sin\varpi s, \\ R = r - \tau = m\dfrac{c}{\varpi}\cos\varpi s. \end{cases}$$

Afin de discuter ces expressions plus facilement, anticipons sur la connaissance que l'on aura plus tard des coordonnées de la courbe. Cette courbe est située sur un tore dont le plan de symétrie est celui du couple extérieur.

Prenons ce plan pour plan des xy, que nous considérons comme horizontal, et le centre du tore pour origine; l'axe Oz sera vertical. La figure ci-dessous



représente la projection horizontale d'une portion de la courbe; le trait plein correspond aux points au-dessus du plan, le trait pointillé à ceux situés au-dessous. Au point 1, r est maximum, au point 3 minimum; en 2 et 4 points équidistants de 1 et 2 la tangente est horizontale.

Si l'on suit le plan osculateur, il est confondu en 1 avec celui de l'hélice, puis s'incline sur ce dernier jusqu'en un point situé entre 1 et 2, puis s'en rapproche jusqu'à se confondre avec lui au point 3. De l'autre côté du plan, il exécute le mouvement en sens contraire.

Calcul de ψ et des cosinus α, β, γ. — D'après (15), on a

$$\frac{d\psi}{ds} = m\left(1 + \frac{cP}{P^2 + Q^2}\right)$$

ou par les égalités (25)

$$\frac{d\psi}{ds} = m + \frac{\frac{c}{\tau}\varpi \cos\varpi s}{1 + \left(\frac{c}{\tau}\right)^2 \sin^2\varpi s},$$

d'où

$$(26) \qquad \psi = ms + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{c}{\tau}\sin\varpi s\right).$$

Le premier terme croît constamment, le second toujours inférieur à $\frac{\pi}{2}$ est alternativement positif et négatif.

Les lignes trigonométriques de ψ dépendent donc de deux périodes l et L définies par

$$(27) \qquad \varpi = \frac{2\pi}{l}, \qquad m = \frac{2\pi}{\mathrm{L}}.$$

La seconde L est égale à la somme des longueurs de spire qu'il faut parcourir pour que le trièdre mobile pqr reprenne son orientation initiale par rapport au trièdre fixe xyz. Quand ceci a lieu on a

$$(28) \qquad \varpi s = 2\pi \mathrm{N}, \qquad ms = 2\pi n,$$

ou

$$\frac{\varpi}{m} = \frac{\mathrm{N}}{n} = \frac{\mathrm{L}}{l};$$

N représente le nombre des spires parcourues, n celui des circonférences décrites autour du centre O pour que les extrémités du fil se raccordent.

D'après la définition des angles θ, φ et ψ, on voit que θ est l'angle avec Oz de la tangente à la courbe, ψ est l'angle du plan passant par cette tangente et la verticale Oz avec Ox. C'est donc l'angle avec Ox de la tangente à la projection de la courbe.

L'une des relations (28) permet d'exprimer d'une façon simple l'énergie élastique développée dans le fil.

Formons l'intégrale $\int E\,ds$ étendue à tout le fil en utilisant les égalités (1) et (25) et nous trouvons

$$\int E\,ds = \frac{1}{2} M\,ms = \frac{1}{2} M\,2\pi n,$$

ce qu'on aurait pu poser *a priori*.

Des valeurs P, Q, R et ψ que nous venons de trouver on déduit immédiatement celles de θ, φ, ψ et α, β, γ, par le Tableau (2). En effet, on a, d'une part,

$$(29)\quad \begin{cases} \alpha_3 = \sin\theta\cos\varphi = \dfrac{P}{m}, \\ \beta_3 = \sin\theta\sin\varphi = \dfrac{Q}{m}, \\ \gamma_3 = \dfrac{R}{m}; \end{cases}$$

d'autre part,

$$(30)\quad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{dx}{ds} = \sin\theta\cos\psi \quad \text{ou} \quad \dfrac{\sqrt{P^2+Q^2}}{m}\cos\psi, \\ \gamma_2 = \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{\sqrt{P^2+Q^2}}{m}\sin\psi, \\ \gamma_3 = \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{R}{m}, \end{cases}$$

et les six autres qu'il est inutile d'écrire.

Comme dernière conclusion à tirer des valeurs de α, β, γ, remarquons qu'au point 1 ($s = 0$), on a

$$\gamma_3 = \frac{c}{\varpi} = \sin i,$$

c'est-à-dire que la tangente à la courbe fait, avec le plan du couple, un angle égal à l'inclinaison de l'hélice initiale.

En second lieu, aux points 2, on a

$$\alpha_3 = 0, \qquad \gamma_3 = 0.$$

La binormale et la tangente à la courbe sont donc horizontales.

Coordonnées x, y, z de la courbe. — On les obtient par l'intégration des équations (30). Posons

$$\operatorname{arc\,tang} \frac{c}{\tau} \sin \varpi s = \omega \qquad \text{ou} \qquad \frac{c}{\tau} \sin \varpi s = \operatorname{tang} \omega.$$

Développons

$$\cos\psi = \cos(ms + \omega), \qquad \sin\psi = \sin(ms + \omega);$$

substituons dans (30), en tenant compte de

$$P^2 + Q^2 = m\frac{\tau}{\varpi}\left[1 + \left(\frac{c}{\tau}\right)^2 \sin^2 \varpi s\right].$$

Ces équations deviennent

$$(31) \qquad \begin{cases} \varpi \dfrac{dx}{ds} = \tau \sin ms - c \sin \varpi s \cos ms, \\[2mm] \varpi \dfrac{dy}{ds} = \tau \cos ms + c \sin \varpi s \sin ms, \\[2mm] \varpi \dfrac{dz}{ds} = c \cos \varpi s. \end{cases}$$

Si l'on considère les trois dérivées des premiers membres comme les coordonnées d'un point, le lieu de ces points est une sorte d'herpolhodie non fermée, en général tracée sur une sphère de rayon unité; ses rayons vecteurs sont parallèles à la tangente à l'hélice déformée.

Intégrons ces équations et posons $\frac{\varpi}{m} = K$, on obtient

$$(32) \qquad \begin{cases} \varpi^2 x = -K\tau \cos ms - \dfrac{cK}{1-K^2}(K \cos ms \cos \varpi s + \sin ms \sin \varpi s), \\[2mm] \varpi^2 y = K\tau \sin ms + \dfrac{cK}{1-K^2}(K \sin ms \cos \varpi s - \cos ms \sin \varpi s), \\[2mm] \varpi^2 z = c \sin \varpi s. \end{cases}$$

On peut éliminer l'arc ms des deux premières et, entre l'équation résultante

$$(33)\quad \varpi^4(x^2+y^2)=\left(K\tau+\frac{cK^2}{1-K^2}\cos\varpi s\right)^2+\left(\frac{cK}{1-K^2}\right)\sin^2\varpi s$$

et la troisième (32), l'arc ϖs. Le résultat est une équation algébrique du quatrième degré, celle du tore sur lequel est la courbe.

§ III. — Cas de $A = B > C$.

La méthode de calcul est la même que dans le cas précédent. Les résultats différeront très peu. En place des lignes trigonométriques d'arc ϖs vont s'introduire des fonctions elliptiques jouant un rôle analogue. Je crois donc inutile de reproduire les remarques et les discussions faites précédemment et me bornerai à un simple formulaire en conservant autant que possible les mêmes notations.

Calcul des P, Q, R *et* α_3, β_3, γ_3. — Les équations (9) (avec $q_0 = 0$) deviennent

$$(34)\quad \begin{cases} A\dfrac{dP}{ds} = \quad [(A-C)R+A\tau]Q, \\ A\dfrac{dQ}{ds} = -[(A-C)R+A\tau]P+CcR, \\ C\dfrac{dR}{ds} = -AcQ. \end{cases}$$

Les intégrales (10) et (11)

$$(35)\quad \begin{cases} A^2(P^2+Q^2)+C^2R^2 = A^2m^2, \\ A(p^2+q^2)\ +C\ r^2 = A(m^2+c^2)+C\tau^2, \end{cases}$$

et en les combinant

$$(36)\qquad A^2cP+CR\left(\frac{A-C}{2}R+A\tau\right)=0.$$

Les points 2 et 4 correspondent encore à

$$P = p - c = 0, \qquad Q = q - m = \frac{M}{A}, \qquad R = r - \tau = 0,$$

valeurs qui annulent $\frac{dQ}{ds}$ et, par suite, $\frac{d^2 R}{ds^2}$.

L'élimination des PQ entre ces équations conduit à une équation contenant un polynome du quatrième degré au lieu du second

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} - A^2 C^2 \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = C^2 R^2 \left(\frac{A - C}{2} R + A\tau\right)^2 \\ + A^2 c^2 (C^2 R^2 - A^2 m^2). \end{aligned} \right.$$

Le deuxième membre égalé à zéro a toujours deux racines imaginaires qui ne joueront aucun rôle et deux racines réelles de signes contraires correspondant aux points 1 et 3.

Les valeurs de P, Q, R font connaître immédiatement α_3, β_3, γ_3 puisqu'on a, en posant $\frac{A}{C} = \varepsilon$ et supprimant l'indice 3,

$$(38) \qquad \alpha = \frac{P}{m}, \qquad \beta = \frac{Q}{m}, \qquad \gamma = \frac{R}{\varepsilon m}.$$

Ce sont ces quantités que je vais prendre pour inconnues. Je poserai pour abréger

$$\frac{c}{m} = \lambda, \qquad \frac{\tau}{\varepsilon m} = \mu, \qquad m\,\frac{\varepsilon - 1}{2}\, ds = i\, du, \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Alors les intégrales (35) et (36) deviennent

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \lambda\alpha + \gamma\left(\frac{\varepsilon - 1}{2}\gamma + \varepsilon\mu\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

et l'équation (37) :

$$(40) \quad \left(\frac{d\gamma}{du}\right)^2 = \gamma^2\left(\gamma + \frac{2\varepsilon\mu}{\varepsilon - 1}\right)^2 + \left(\frac{2\lambda}{\varepsilon - 1}\right)^2 (\gamma^2 - 1).$$

Il n'y a plus qu'à exprimer γ en fonction de pu que l'on définit comme d'ordinaire par

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} (p'u)^2 &= \begin{vmatrix} a_0 = 1 & a_1 & a^2 - 2pu \\ a_1 & a_2 + pu & a_3 = 0 \\ a_2 - 2pu & a_3 = 0 & a_4 \end{vmatrix} \\ &= 4p^3u - g_2pu - g_3, \end{aligned}\right.$$

en convenant que le deuxième membre de (40) est écrit :

$$a_0\gamma^4 + 4a_1\gamma^3 + 6a_2\gamma^2 + a_4.$$

u doit être une imaginaire pure (discriminant négatif) pour que pu et γ soient réelles.

Les points 1 et 3 de courbure et torsion réelles maxima ou minima correspondent aux racines du deuxième membre qui prend la forme

$$a_0[p(u-c) - p(u+c)] \quad (^1)$$

avec

$$p(2c) = \frac{a_1^2 - a_0a_2}{a_0^2}, \qquad p'(2c) = \frac{2a_1^3 - 3a_0a_1a_2}{a_0^3}.$$

En 1 on a

$$u = 0,$$

en 3

$$u = \omega,$$

ω étant une période imaginaire pure définie par

$$i\omega = m\,\frac{\varepsilon - 1}{2}\,l.$$

Aux points 2 et 4 on a

$$\frac{d^2\gamma}{du^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad p'(u-c) - p'(u+c) = 0,$$

égalité satisfaite par $u = \frac{\omega}{4}$ $u = \frac{3\omega}{4}$.

---

(1) Il n'y aura pas de confusion entre c représentant la courbure et l'argument c toujours précédé du signe p ou σ.

Ces points sont donc équidistants des points 1 et 3 comme dans le cas précédent; on a aussi

$$\alpha = 0, \qquad \gamma = 0;$$

la binormale et la tangente sont par suite horizontales. La valeur de γ est

$$\gamma = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\,\frac{p'(u-c) - p'2c}{p(u-c) - p2c},$$

ou encore

$$(42) \qquad \gamma = -\frac{a_1}{a_0} + \zeta(u+c) - \zeta(u-c) - 2\zeta(2c).$$

Avec cette dernière forme on peut intégrer

$$z = \int \gamma\, ds,$$

ce qui donne

$$(43) \quad m\frac{\varepsilon - 1}{2} z = -\left[\frac{a_1}{a_0} + 2\zeta(2c)\right] iu + i \log \frac{\sigma(u+c)}{\sigma(u-c)}.$$

Comme z doit reprendre les mêmes valeurs aux points homologues des diverses spires et que si un argument quelconque v croît de k périodes ω, on a

$$\sigma(v + 2k\omega) = (-1)^k e^{2k-\zeta(\omega)\,(v+k\omega)}\sigma(v);$$

la constante c devra vérifier

$$\left[\frac{a_1}{a_0} + 2\zeta(2c)\right]\omega = 2\lambda m.\zeta(\omega).$$

La valeur de α se tirera de (39) et β de la dernière (34) :

$$\frac{d\gamma}{du} = \frac{2ic\beta}{m(\varepsilon - 1)}.$$

P, Q, R sont donc des fonctions elliptiques de première espèce de s.

Calcul de ψ. — L'équation (15), à l'aide de la seconde (39), se transforme ainsi

$$\frac{\varepsilon-1}{2}\frac{d(i\psi)}{du}=1+\frac{\lambda\alpha}{\alpha^2+\beta^2}=1-\frac{\gamma\left(\frac{\varepsilon-1}{2}\gamma+\varepsilon\mu\right)}{1-\gamma^2},$$

ou en décomposant le deuxième membre en fractions simples :

$$\frac{di\psi}{du}=\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{2\varepsilon\mu}{\varepsilon-1}}{1-p\gamma}+\frac{1-\frac{2\varepsilon\mu}{\varepsilon-1}}{1+p\gamma}\right). \tag{44}$$

Il reste à mettre cette expression sous forme de fractions simples rationnelles de pu. On sait qu'on peut poser

$$\left\{\begin{aligned}1-\gamma&=-\frac{p'c(pu-pa)}{(pa-pc)(pu-pc)},\\ 1+\gamma&=\frac{p'c(pu-pb)}{(pb-pc)(pu-pc)},\end{aligned}\right. \tag{45}$$

les arguments étant convenablement choisis.

Remarquons que, pour $\gamma=\pm 1$, les valeurs de $\frac{d\gamma}{du}$ sont, d'après l'équation (40),

$$\frac{d\gamma}{du}=\pm 1+\frac{2\varepsilon\mu}{\varepsilon-1},$$

et d'après (45)

$$\frac{d\gamma}{du}=\frac{p'ap'c}{(pa-pc)^2}\qquad\text{ou}\qquad\frac{p'bp'c}{(pb-pc)^2}.$$

Ces quantités sont les numérateurs de l'égalité (44) qui devient ainsi :

$$\frac{di\psi}{du}=\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{p'a}{pa-pc}\,\frac{pu-pc}{pu-pa}+\frac{p'b}{pb-pc}\,\frac{pu-pc}{pu-pb}\right).$$

Mais le premier terme de la parenthèse est

$$\frac{p'a}{pa-pc}+\frac{p'a}{pu-pc}$$

dont l'intégrale est

$$[\zeta(a-c)+\zeta(a+c)]\,u-\log\frac{\sigma(u+a)}{\sigma(u-a)};$$

si donc on pose

$$2k=\zeta(a-c)+\zeta(a+c)+\zeta(b-c)+\zeta(b+c)+2\,\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1},$$

on obtient

$$i\psi=ku-\frac{1}{2}\log\frac{\sigma(u+a)\sigma(u+b)}{\sigma(u-a)\sigma(u-b)},$$

d'où

$$e^{i\psi}=\left[\frac{\sigma(u-a)\sigma(u-b)}{\sigma(u+a)\sigma(u+b)}\right]^{\frac{1}{2}}e^{ku},$$

$$e^{-i\psi}=\left[\frac{\sigma(u+a)\sigma(u+b)}{\sigma(u-a)\sigma(u-b)}\right]^{\frac{1}{2}}e^{-ku}.$$

A l'aide de cette expression de ψ, on peut obtenir γ_1, γ_2 par les fonctions σ. Ces cosinus sont en effet les dérivées en s de x, y; on a donc par le Tableau (2)

$$x'+iy'=\sin\theta(\cos\psi+i\sin\psi)=\sqrt{1-\gamma^2}\,e^{i\psi},$$
$$x'-iy=\sin\theta(\cos\psi-i\sin\psi)=\sqrt{1-\gamma^2}\,e^{-i\psi}.$$

Mais en tenant compte de la relation connue

$$pu-pa=\frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a)}{\sigma^2 a},$$

on a, en multipliant entre elles les égalités (45) et en posant pour abréger

$$\mu^2=-\frac{\sigma^2(2c)}{\sigma(a-c)\sigma(a+c)\sigma(b-c)\sigma(b+c)},$$

$$1-\gamma^2=\mu^2\,\frac{\sigma(u-a)\sigma(u+a)\sigma(u-b)\sigma(u+b)}{\sigma^2(u-c)\sigma^2(u+c)},$$

et par suite

$$\frac{d(x+iy)}{du}=-\frac{2\mu}{m(\varepsilon-1)}\,\frac{\sigma(u-a)\sigma(u-b)}{\sigma(u-c)\sigma(u-c)}\,e^{ku},$$

$$\frac{d(x-iy)}{du}=-\frac{2\mu}{m(\varepsilon-1)}\,\frac{\sigma(u+a)\sigma(u+b)}{\sigma(u-c)\sigma(u+c)}\,e^{-ku}.$$

Ce sont des fonctions elliptiques de deuxième espèce. L'intégration ne pourra se faire qu'en les développant en série. La décomposition en éléments simples ne servirait à rien puisque l'on n'a pas étudié les fonctions dont ces éléments sont les dérivées. Nous arrivons donc à cette conclusion que, dans le cas d'un fil isotrope $\left(\frac{A}{C} > 1\right)$, on ne peut actuellement obtenir les coordonnées x et y de la courbe sous forme finie en fonction de s.

[B10]

USAGE DES FORMES QUADRATIQUES DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS;

PAR M. H. LAURENT.

Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les racines d'une équation de degré n à coefficients réels

$$f(x) = 0,$$

et par $s_0, s_1, s_2, \ldots$ les sommes

$$\sum a^0, \quad \sum a, \quad \sum a^2, \quad \ldots.$$

Considérons la forme quadratique

$$\begin{aligned} &\varphi(a_1)(z_0 + z_1 a_1 + \ldots + z_{n-1} a_1^{n-1})^2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \varphi(a_n)(z_0 + z_1 a_n + \ldots + z_{n-1} a_n^{n-1})^2 = V. \end{aligned}$$

Si les racines $a_1, a_2, \ldots$ sont toutes réelles, et si la fonction $\varphi(x)$ est réelle, V sera tout décomposé en n carrés réels; mais si, parmi les racines a, il s'en trouve d'imaginaires, on pourra encore décomposer V en n carrés réels, mais une petite transformation sera nécessaire. Or, je dis qu'*à chaque couple de racines imaginaires conjuguées correspondront deux carrés de signes contraires réels.*

Supposons, en effet, a_1 et a_2 imaginaires conjuguées et soit

$$\varphi(a_1) = P + Q\sqrt{-1};$$

on aura

$$\varphi(a_2) = P - Q\sqrt{-1}.$$

Soit

$$z_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_1^{n-1} z_{n-1} = X + Y\sqrt{-1};$$

on aura

$$z_0 + a_2 z_1 + \ldots + a_2^{n-1} z_{n-1} = X + Y\sqrt{-1},$$

et la somme de nos deux premiers carrés sera

$$\begin{aligned}&(P + Q\sqrt{-1})(X + Y\sqrt{-1})^2 \\ &+ (P - Q\sqrt{-1})(X - Y\sqrt{-1})^2 = P(X^2 - Y^2) - 4QXY,\end{aligned}$$

ce qui est bien une somme de carrés réels, l'un positif, l'autre négatif.

En second lieu, les carrés dont la somme fait V ne seront distincts que si les racines de $f = 0$ sont inégales, et V sera la somme de μ carrés distincts si les racines de f se réduisent à μ distincts, c'est-à-dire si l'on compte pour *une* un ensemble de k racines égales.

Ceci posé, nous allons tirer de la remarque précédente une foule de conséquences plus ou moins intéressantes.

1. Supposons $\varphi(a) = 1$; on aura

$$V = \sum (z_0 + a_i z_1 + \ldots + a_i^{n-1} z_{n-1})^2 = \sum z_i z_j S_{i+j}.$$

Soient

ϖ le nombre des racines positives de $f = 0$;
ν le nombre des racines négatives;
$2\mathrm{I}$ le nombre des racines imaginaires, abstraction faite de leur degré de multiplicité;
$r = \varpi + \nu$ le nombre des racines réelles;
P le nombre des carrés positifs;
N le nombre des carrés négatifs de $\mathrm{V} = \sum z_i z_j \mathrm{S}_{i+j}$ décomposé en carrés réels.

On aura

$$r + \mathrm{I} = \mathrm{P}, \qquad \mathrm{I} = \mathrm{N},$$
$$r = \mathrm{P} - \mathrm{N}.$$

Et si l'on forme le polynome en x

$$\begin{vmatrix} s_0 - x & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 - x & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \mathrm{X},$$

en appelant v le nombre de ses variations, on aura

$$v = \mathrm{P},$$

et N sera égal à $n - \mathrm{P} - \omega$, ω désignant le nombre des racines nulles de $\mathrm{X} = 0$.

2. Prenons $\varphi = x - a$, on aura

$$\mathrm{V} = \sum (x - a_i)(z_0 + a_i z_1 + \ldots + a_i^{n-1} z_{n-1})^2$$
$$= \sum z_i z_j (x s_{i+j} - s_{i+j+1}).$$

Soient toujours

P le nombre des carrés positifs réels;
N le nombre des carrés négatifs de V;

ρ le nombre des racines de $f(x) = 0$ supérieures à x;
ρ' le nombre des racines de $f(x) = 0$ inférieures à x.

On aura

$$N = 1 + \rho, \qquad P = 1 + \rho',$$
$$N - P = \rho - \rho',$$

et, si l'on appelle P_1, N_1, ρ_1, ρ'_1 ce que deviennent P, N, ρ, ρ' quand on change x en x_1,

$$N_1 = 1 + \rho_1, \qquad P_1 = 1 + \rho'_1,$$

et, par suite,

$$P - P_1 = \rho' - \rho'_1;$$

donc le nombre des racines de $f = 0$ comprises entre x et x_1 est la différence entre le nombre des carrés positifs que présentent les polynomes $V(x)$ et $V(x_1)$ ou, si l'on veut, la différence du nombre de variations des polynomes en t

$$\begin{vmatrix} s_0 x - s_1 - t & s_1 x - s_2 & \dots & s_{n-1} x - s_n \\ s_1 x - s_2 & s_2 x - s_3 - t & \dots & s_n x - s_{n-1} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix},$$

lorsque l'on suppose successivement $x = x$, $x = x_1$, théorème analogue au théorème de Sturm, et que j'ai donné dans mon *Traité d'Algèbre*.

3. Supposons toujours $\varphi = (x - a)$ et

$$V = \sum (x - a_i)(z_0 + \dots + z_{n-1} a_i^{n-1})^2$$
$$= \sum z_i z_j (x s_{i+j} - s_{i+j+1});$$

le discriminant de V pourra se calculer de deux manières :

1° Soit directement, et ce sera

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_0 x - s_1 & s_1 x - s_2 & \dots & s_{n-1} x - s_n \\ s_1 x - s_2 & s_2 x - s_3 & \dots & s_n x - s_{n+1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \end{vmatrix};$$

2° Soit en observant que le discriminant de

$$\sum (x - a_i) X^2$$

est égal à $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ multiplié par le carré du déterminant de la substitution

$$X_1 = z_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_1^{n-1} z_{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui est égal à

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \mathrm{D},$$

en sorte que

$$\Delta = \mathrm{D}(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n),$$

il en résulte qui si D est différent de zéro, $\Delta = 0$ sera une des formes de l'équation $f = 0$. Mais, si $\mathrm{D} = 0$, notre conclusion est inexacte.

Si $f(x)$ a toutes ses racines inégales, D ne sera pas nul et $f(x) = 0$ pourra être remplacé par $\Delta = 0$.

Si $f = 0$ a *une* racine double, V se réduit à $n - 1$ carrés, son discriminant Δ est nul, mais ses mineurs ne le sont pas, ce sont les discriminants de V obtenus en annulant la variable z_{n-1} et en faisant abstraction d'un carré correspondant à la racine double, mais en le doublant, en sorte que $f = 0$ débarrassé de sa racine double, ou plutôt réduit à n'avoir plus cette racine qu'en qualité de racine simple, sera

$$\begin{vmatrix} s_0 x - s_1 & \ldots & s_{n-2} x - s_{n-1} \\ s_1 x - s_2 & \ldots & s_{n-1} x - s_n \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0,$$

et, en général, si $\mathrm{F}(x) = 0$ désigne ce que devient $f = 0$ quand toutes ses racines multiples sont remplacées par les mêmes racines réduites à être simples, F s'obtiendra en supprimant les p dernières lignes et les p dernières colonnes de Δ, p désignant le nombre des facteurs premiers de f que l'on doit supprimer pour qu'ils deviennent simples.

Nous avons ainsi un moyen de supprimer les facteurs multiples d'une équation.

4. Si nous faisons $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{f'(x)}$, $\psi(x)$ désignant un polynome entier, nous trouvons

$$\begin{aligned} V &= \sum \frac{\psi(a_k)}{f'(a_k)} (z_0 + z_1 a_k + \ldots + z_{n-1} a_k^{n-1})^2 \\ &= \sum z_i z_j \frac{\psi(a_k)}{f'(a_k)} a_k^{i+j}. \end{aligned}$$

Le discriminant de V est $\psi(a_1)\psi(a_2)\ldots$, c'est le premier membre de la résultante de $f(x) = 0$ et $\psi(x) = 0$, on a donc

$$R = \begin{vmatrix} \sum \frac{\psi(a_k)}{f'(a_k)} & \sum \frac{\psi(a_k) a_k}{f'(a_k)} & \cdots \\ \sum \frac{\psi(a_k) a_k}{f'(a_k)} & \sum \frac{\psi(a_k) a_k^2}{f'(a_k)} & \cdots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \cdots \end{vmatrix},$$

et les fonctions symétriques qui sont les éléments du déterminant R sont très faciles à calculer.

$\sum \frac{\psi(a_k)}{f'(a_k)} a_k^p$ est le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le quotient

$$\frac{\psi(x) x^p}{f(x)}.$$

Il y a, dans ce qui précède, non pas des théorèmes isolés, mais une véritable méthode que l'on peut appliquer dans une foule de circonstances. Ainsi, dans l'exemple du n° 2, j'ai fait connaître un théorème analogue à celui de Sturm, mais il existe une infinité de théorèmes analogues permettant de séparer les racines d'une équation algébrique; on peut en effet remplacer la fonction V par une quelconque des suivantes :

$$\sum (x-a)a^{2p}(z_0+z_1 a+\ldots+z_{n-1}a^{n-1})^2,$$

$$\sum \frac{a^{2p}}{x-a}(z_0+z_1 a+\ldots+z_{n-1}a^{n-1})^2,$$

$$\sum (x-a)\frac{1}{a^{2p}}(z_0+z_1 a+\ldots+z_{n-1}a^{n-1})^2,$$

. . . .

Enfin les considérations précédentes, en faisant usage du calcul intégral, peuvent s'appliquer également aux équations transcendantes, et même aux systèmes d'équations à plusieurs inconnues. La méthode une fois indiquée, le lecteur pourra considérablement augmenter le nombre des applications.

[L²14a]

SUR UN CONTOUR HEXAGONAL VARIABLE CIRCONSCRIT A UNE QUADRIQUE;

PAR M. G. FONTENÉ.

En étudiant de nouveau la question que j'avais proposée dans les *Nouvelles Annales* (1899, p. 485) pour le premier concours de 1900, j'ai obtenu ce résultat :

Si trois tangentes α, β, γ *en trois points* A, B, C *d'une sphère font, avec les tangentes en* A, B, C *au cercle* ABC *des angles* λ, μ, ν *qui vérifient la relation*

$$\cos\lambda+\cos\mu+\cos\nu=\cos(\lambda+\mu+\nu),$$

la sphère étant orientée, le cercle ABC *étant dirigé,* *les tangentes* α, β, γ *étant dirigées convenablement, il existe une série indéfinie de contours hexagonaux* $A'B''C'A''B'C''A'$ *dont les couples de sommets opposés sont respectivement sur les droites* α, β, γ, *et qui sont circonscrits à la sphère, les points de contact étant dans un même plan pour chacun des trois contours quadrangulaires* $A'A''B'B''A'$, ...

La démonstration peut se faire ainsi. Le pôle du plan ABC étant D, si l'on prend comme tétraèdre de référence le tétraèdre ABCD, la quadrique supposée quelconque a pour équation

$$Ayz + Bzx + Cxy - t^2 = 0,$$

et les équations des tangentes α, β, γ peuvent être mises sous la forme

$$\frac{t}{\sqrt{ABC \operatorname{tang}\lambda}} = \frac{y}{B} = \frac{z}{-C},$$

$$\frac{t}{\sqrt{ABC \operatorname{tang}\mu}} = \frac{z}{C} = \frac{x}{-A},$$

....

Si l'on considère le contour ouvert $A'B''C'A''$, et si l'on écrit que l'une des huit relations homographiques qui ont lieu entre A' et A'' est involutive, comme cela doit avoir lieu, on obtient, avec $\varepsilon = \pm 1$, ...,

$$\varepsilon \cos\lambda + \varepsilon' \cos\mu + \varepsilon'' \cos\nu = \cos(\lambda + \mu + \nu);$$

on doit d'ailleurs prendre

$$\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = +1,$$

l'hypothèse contraire donnant des solutions parasites. En remplaçant au besoin λ et μ par $\lambda + \pi$ et $\mu + \pi$, on a d'ailleurs $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = +1$, par suite $\varepsilon'' = +1$.

Si G_1 et G_2 sont les génératrices en A de la quadrique, le rapport anharmonique (G_1, G_2, α, AD) est celui de quatre plans $\frac{t}{y} = m$, m ayant des valeurs proportionnelles à i, $-i$, $\tang\lambda$, ∞. Donc, si la quadrique est une sphère, λ est l'angle indiqué dans l'énoncé donné au début.

Voici une conséquence :

La quadrique étant donnée, soient α, β, γ *trois tangentes dont les points de contact sont* A, B, C, *telles qu'un hexagone gauche circonscrit à la quadrique puisse varier en ayant ses couples de sommets sur ces droites. Si l'on considère les trois hyperboloïdes qui sont circonscrits à la quadrique le long de la conique* ABC, *et qui contiennent respectivement les droites* α, β, γ, *on peut remplacer* α *par une génératrice quelconque de même système du premier hyperboloïde, etc. On peut remplacer simultanément* α, β, γ *par trois génératrices appartenant à l'autre système.*

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTES DES SCIENCES.

SOLUTION D'UNE ÉPREUVE PRATIQUE DE MÉCANIQUE RATIONNELLE (TOULOUSE, JUILLET 1900);

Par M. AUDIBERT.

Calculer l'attraction newtonienne d'un solide homogène limité par un paraboloïde de révolution et par un plan perpendiculaire à l'axe sur un point matériel situé au foyer de la parabole génératrice.

Soit AB *la trace du plan sécant qui limite le segment. On donne le paramètre* p *de la parabole,* *l'angle* AFH $= \alpha$, *la densité* ρ *du paraboloïde, le coefficient* μ *d'attraction.*

Pour quelle valeur de l'angle α *l'attraction du segment sur le foyer est-elle nulle?*

L'équation polaire de la génératrice, le pôle étant en F, est

$$r = \frac{p}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

L'élément de volume est

$$r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\omega;$$

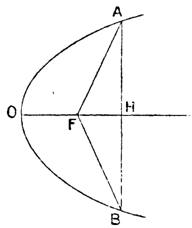
il exercera sur F une attraction dont la composante suivant l'axe sera

$$\mu\rho \sin\theta \cos\theta \, dr \, d\theta \, d\omega;$$

celle de l'anneau matériel élémentaire qu'il détermine par une rotation de 2π autour de l'axe sera

$$2\pi\mu\rho \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, dr.$$

En laissant θ constant, si l'anneau élémentaire est situé à l'intérieur du cône AFB, le rayon vecteur r



variera de zéro à $\frac{p}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$ et dans le reste du solide, en dehors du cône, de zéro à $\frac{p}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$.

L'action totale du segment est égale à la somme des deux intégrales

$$I_1 = 2\pi\mu\rho p \int_0^\alpha \frac{\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \sin\theta\, d\theta = 2\pi\mu\rho p \cos\alpha,$$

$$I_2 = 2\pi\mu\rho p \int_\alpha^\pi \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= -2\pi\mu\rho p\left(1 + \cos\alpha + 2\log\sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$I_1 + I_2 = -2\pi\mu\rho p\left(1 + 2\log\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Cette attraction sera nulle pour

$$\log\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \qquad \frac{\alpha}{2} = 37°20'21''.$$

En adoptant les coordonnées cartésiennes, l'origine étant au sommet du paraboloïde, on aurait à intégrer

$$2\pi\mu\rho\left\{\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\right)^2} dx\left(x-\frac{p}{2}\right)\int_0^{(2px)^{\frac{1}{2}}} \frac{y\,dy}{\left[y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{p}{2}} dx\left(\frac{p}{2}-x\right)\int_0^{(2px)^{\frac{1}{2}}} \frac{y\,dy}{\left[y^2+\left(\frac{p}{2}-x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Le calcul conduit au même résultat.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1901.

Composition de Mathématiques spéciales.

Étant donné un ellipsoïde E et une sphère S concentrique à l'ellipsoïde, on prend le plan polaire P d'un point quelconque M par rapport à l'ellipsoïde E, puis le pôle p du plan P par rapport à la sphère S. Soit D la droite qui joint le point M au point p.

1° On demande le lieu C que doit décrire le point M pour que les droites D passent par un même point donné. Trouver le cône décrit par les droites D.

2° Trouver le lieu que doit décrire le point M pour que les droites D soient situées dans un plan donné ϖ, et l'enveloppe des droites D dans ce plan.

3° Trouver la surface engendrée par les droites D quand le point M décrit une droite donnée quelconque.

4° On assujettit les droites D à rencontrer une droite donnée Δ et à rester parallèle à un plan donné ϖ; trouver le degré de la surface Σ engendrée par ces droites D. Chercher les conditions dans lesquelles la surface Σ se décompose.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1901.

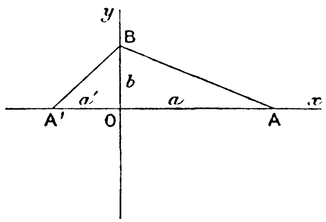
Composition de Mathématiques.

Soient Ox, Oy deux axes de coordonnées rectangulaires; soient a et a' les abscisses de deux points A et A' de l'axe Ox, et b l'ordonnée d'un point B de l'axe Oy.

On considère toutes les hyperboles équilatères (H_λ) circonscrites au triangle A A' B.

I. Calculer les coordonnées x_1, y_1 du quatrième point M de rencontre de la circonférence circonscrite au triangle AA′B avec l'hyperbole (H_λ). Montrer qu'en désignant par λ un para-

Fig. 1.



mètre variable, ces coordonnées peuvent être mises sous la forme

$$x_1 = \frac{A + B\lambda}{1 + \lambda^2}, \qquad y_1 = \lambda x_1 + b,$$

et donner les valeurs des constantes A et B.

II. Vérifier par le calcul que le diamètre de l'hyperbole qui est mené par le point M passe par un point fixe, quel que soit λ.

Le démontrer géométriquement.

III. Trouver le lieu géométrique des points de contact des tangentes menées aux hyperboles (H_λ) parallèlement à une direction donnée, et examiner en particulier les cas où cette direction est celle des axes de coordonnées.

N. B. — Les candidats conserveront toutes les notations indiquées.

ÉPURE.

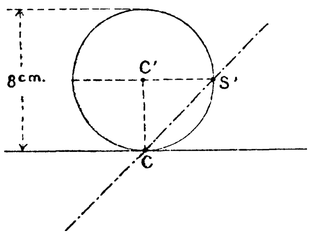
Intersection d'un cône et d'un hyperboloïde de révolution.

Le cône a pour base un cercle de front CC′ situé dans la partie supérieure du plan vertical, tangent au plan horizontal, et qui a $0^{m},08$ de diamètre. Son sommet, S, S′, est en avant du cercle, à une distance égale au diamètre, et sur la ligne debout menée par le point S′ le plus à droite du cercle.

Cette ligne debout sert de génératrice à l'hyperboloïde : l'axe de révolution est la droite du plan horizontal qui est confondue avec la ligne CS′ de l'épure.

Le point C′ sera placé à $0^m,15$ à gauche du bord droit de la

Fig. 2.



feuille, et $0^m,15$ au-dessous du trait le plus bas de l'en-tête.

On demande de représenter en traits noirs la projection horizontale du solide commun au cône et à l'hyperboloïde.

On indiquera en traits rouges les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point, ainsi que les points remarquables.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1901.

Mathématiques.

On considère l'hyperboloïde (H) représenté en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

et les deux systèmes de génératrices rectilignes définis par les équations

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= u\left(1 + \frac{z}{c}\right), \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{1}{u}\left(1 - \frac{z}{c}\right), \end{aligned}\right.$$

et

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{a}-\frac{y}{b} &= v\left(1-\frac{z}{c}\right),\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b} &= \frac{1}{v}\left(1+\frac{z}{c}\right). \end{aligned}\right.$$

A chaque système de valeurs attribuées aux paramètres u et v correspond un point de l'hyperboloïde (H), intersection des génératrices (I) et (II); réciproquement, à chaque point de l'hyperboloïde correspond un système de valeurs pour u et v.

Former la relation qui doit exister entre les paramètres u et v pour que le point de l'hyperboloïde qui correspond au système de valeurs (u, v) appartienne à l'un des conoïdes (C) représentés par l'équation

$$z = \frac{2abcxy}{(1+m)b^2x^2+(1-m)a^2y^2},$$

où m désigne un paramètre variable. De quoi se compose l'intersection complète de l'un de ces conoïdes et de l'hyperboloïde quand m^2-1 est différent de zéro et quand m^2-1 est nul?

Déterminer les points où la courbe (Q), commune à (H) et à l'un des conoïdes, coupe les génératrices du système (II); exprimer les coordonnées des points de cette courbe en fonction du paramètre v.

En combien de points la courbe (Q) rencontre-t-elle chaque génératrice du système (I)? Déterminer le lieu décrit par le centre des moyennes distances des points situés sur une de ces génératrices, lorsque celle-ci se déplace sur l'hyperboloïde.

Démontrer qu'il existe un conoïde (C) pour lequel le plan tangent à l'hyperboloïde en chaque point de la courbe (Q) est perpendiculaire au plan déterminé par la génératrice du système (II) qui passe en ce point et par la génératrice parallèle de (H).

Distinguer, suivant la valeur du paramètre m, ceux des conoïdes (C) pour lesquels les points d'intersection d'une génératrice du système (I) et de la courbe (Q) sont tous réels, ceux pour lesquels un seul point d'intersection est toujours réel, ceux enfin pour lesquels le nombre des points réels varie avec la génératrice.

N. B. — Il est inutile de reproduire l'énoncé.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

597.

(1861, p. 399.)

Si l'on prend les polaires des points milieux des côtés d'un triangle, relativement à une conique quelconque inscrite dans le triangle, ces polaires déterminent un triangle qui a une surface constante. (FAURE.)

SOLUTION

Par M. NICOLAI, à Pistoia.

Prenons pour axes de coordonnées les deux côtés OA, OB, du triangle OAB et posons $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$; l'équation d'une conique tangente aux deux arcs de coordonnées est de la forme

$$\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1\right)^2 + 2\lambda xy = 0,$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que la droite AB soit une tangente est

$$\lambda = \frac{2(p-a)(b-q)}{abpq}.$$

On trouve alors pour les coordonnées des polaires des points milieux des côtés du triangle OAB, relativement à une conique quelconque inscrite dans le triangle, les expressions

$$A_1 = \frac{b}{2pq}\left[1 - \frac{2(a-p)(b-q)}{ab}\right] - \frac{1}{p},$$

$$A_2 = \frac{b}{2pq}\left[1 - \frac{2(a-p)(b-q)}{ab}\right] + \frac{1}{p}\left(\frac{a}{2p} - 1\right),$$

$$A_3 = \frac{1}{p}\left(\frac{a}{2p} - 1\right),$$

$$B_1 = \frac{1}{q}\left(\frac{b}{2q} - 1\right),$$

$$B_2 = \frac{a}{2pq}\left[1 - \frac{2(a-p)(b-q)}{ab}\right] + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{2q} - 1\right),$$

$$B_3 = \frac{a}{2pq}\left[1 - \frac{2(a-p)(b-q)}{ab}\right] - \frac{1}{p},$$

$$C_1 = 1 - \frac{b}{2q},$$

$$C_2 = -\frac{a}{2p} - \frac{b}{2q} + 1,$$

$$C_3 = 1 - \frac{a}{2p}.$$

Soient T la surface du triangle en question, θ l'angle que OA fait avec OB; pour évaluer T, utilisons la formule

$$T = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2 \sin\theta}{2\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}};$$

de là, en développant après quelques réductions,

$$T = \frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

Les polaires des points milieux des côtés d'un triangle, relativement à une conique quelconque inscrite dans le triangle, déterminent donc un triangle ayant même surface que le triangle donné.

1804.

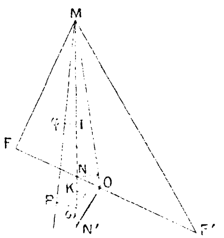
(1898, p. 340.)

Soit M *un point variable situé sur une ellipse de foyers* F *et* F′. *La parabole qui est tangente à* MF *et* MF′ *en* F *et* F′ *a même axe et même foyer que la parabole osculatrice à l'ellipse en* M. (Barisien.)

SOLUTION

Par M. Duporcq.

Soit ω le centre du cercle osculateur en M à l'ellipse donnée, et soit I le milieu du segment $M\omega$: on sait que le cercle de diamètre MI est le lieu des foyers des paraboles qui admettent ω comme centre de courbure relatif au point M. Le diamètre, MO, de l'ellipse donnée étant d'ailleurs évidemment parallèle



à l'axe de la parabole osculatrice en M à cette ellipse, cette parabole admet pour foyer la projection, φ, du point I sur la droite $M\varphi$, symétrique de MO par rapport à la normale $M\omega$.

La direction MO étant évidemment aussi celle de l'axe de la parabole tangente en F et F′ aux droites MF et MF′, il nous reste à prouver que le point φ coïncide avec le foyer φ' de cette parabole : or, ce point est, comme on sait, le milieu de la corde interceptée sur la droite $M\varphi$ par la circonférence MFF′. La question revient donc à montrer que la projection P du point ω sur $M\varphi$ appartient à la circonférence MFF′ : il suffit pour cela de prouver l'égalité

$$(1) \qquad MO.MP = MN.MN',$$

N et N′ étant les points où la normale $M\omega$ coupe l'axe focal et le petit axe de l'ellipse donnée, car le point N′ appartient au cercle MFF'. Soit K la projection de O sur $M\omega$, on a visiblement

$$MO.MP = M\omega.MK.$$

D'ailleurs, on sait que les parallèles menées repectivement de ω et N aux droites NO et KO se coupent sur MO : on a donc

$$\frac{MN}{M\omega} = \frac{MK}{MN'},$$

et l'égalité (1) se déduit immédiatement des deux précédentes. La propriété énoncée en résulte.

Autre réponse de M. Lez.

1806.

(1898, p. 388.)

On considère une série d'ellipses concentriques et ayant même direction d'axes et un point fixe M *de leur plan. Soit* TT' *la corde polaire de l'une de ces ellipses par rapport à* M. *Le lieu du foyer des paraboles bitangentes à l'ellipse en* T *et* T' *est la droite qui joint les projections de* M *sur les axes des ellipses.* (Barisien.)

SOLUTION

Par M. Duporcq.

Transformons homographiquement la figure, de sorte que les points à l'infini des axes des coniques considérées deviennent les points cycliques. Ces coniques se transformeront en hyperboles équilatères concentriques, et, aux points cycliques de la première figure, correspondront les points à l'infini de deux directions rectangulaires, de sorte qu'on aura à démontrer la propriété suivante :

On considère une série d'hyperboles équilatères de même centre O, *et un point fixe m de leur plan. Soit tt' la polaire de m par rapport à l'une de ces hyperboles : il existe une parabole bitangente en t et t' à l'hyperbole. On considère l'angle droit circonscrit à cette parabole, dont les côtés sont parallèles à deux axes fixes donnés : le lieu du sommet de cet angle est la normale au milieu de m*O.

Je vais, en effet, démontrer que cette normale est la directrice commune à toutes les paraboles envisagées. On sait, en effet, que si l'on considère toutes les coniques tangentes en t et t' aux droites mt et mt', le point m a la même polaire par rapport à leurs cercles orthoptiques, et que cette polaire est la perpendiculaire abaissée sur mO de l'orthocentre du triangle mtt'. Comme le cercle orthoptique de l'hyperbole équilatère se réduit à son centre, et celui de la parabole, à sa directrice, la propriété annoncée devient immédiate.

Autres réponses de MM. Audibert, Durlimbert, Lez, Merlin.

1807.

(1898, p. 388.)

Soient M *un point du plan d'une ellipse et* PQ *la corde polaire de cette ellipse par rapport à* M. *Le lieu des points* M, *tels que la parabole bitangente à l'ellipse en* P *et* Q *ait son foyer sur l'ellipse, se compose des deux cercles de Chasles concentriques à l'ellipse et ayant pour diamètres la somme ou la différence des axes de l'ellipse.*

(Barisien.)

SOLUTION

Par M. Duporcq.

On sait que si, sur une normale à une ellipse en un point φ, on porte de part d'autre de φ des longueurs φM et φM' égales au demi-diamètre conjugué du diamètre Oφ, les points M et M' engendrent les cercles de Chasles : les droites OM et OM' sont également inclinées sur les axes de l'ellipse et, comme φ est le milieu de MM', on voit que ces droites sont les asymptotes de l'hyperbole, homofocale à l'ellipse, qui passe par φ.

Cela posé, supposons que le point φ de l'ellipse donnée soit le foyer d'une parabole bitangente à cette conique en P et Q, et soit M le pôle de PQ. Considérons l'involution des tangentes menées de φ aux coniques bitangentes en P et Q à l'ellipse; dans cette involution se correspondent les droites isotropes issues de φ; les rayons doubles sont d'ailleurs évidemment la droite φM et la tangente en φ à l'ellipse; ces droites sont donc rectangulaires; autrement dit, φM est normale à l'ellipse en φ.

D'autre part, la droite MO est évidemment parallèle à l'axe de la parabole considérée; par suite, les droites MO et Mφ

sont également inclinées sur les tangentes MP et MQ : il en résulte qu'elles sont tangentes à une même conique homofocale à l'ellipse donnée; autrement dit, la droite MO est une des asymptotes de l'hyperbole, homofocale à l'ellipse, menée par φ. Par suite de notre remarque préliminaire, le point M est donc sur un des cercles de Chasles de l'ellipse.

Réciproquement, si M est un des deux points correspondant à φ sur les cercles de Chasles, la conique de foyer φ, bitangente en P et Q à l'ellipse, est une parabole; car, MO et Mφ étant alors également inclinées sur les tangentes MP et MQ, la droite MO passe par le second foyer de cette conique, dont elle est bien évidemment un diamètre.

Autres solutions de MM. Durlimbert et Lez.

1804, 1806 et 1807 (1).

SOLUTIONS ANALYTIQUES

Par M. L. Ripert.

1. Résolvons d'abord la question 1806. L'équation générale des coniques bitangentes à $(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0)$ aux extrémités de la corde polaire $(b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0)$ du point $M(\alpha, \beta)$ est

$$\lambda(b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2)^2 + b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

ou

$$b^2(\lambda b^2\alpha^2 + 1)x^2 + 2\lambda a^2b^2\alpha\beta xy + a^2(\lambda a^2\beta^2 + 1)y^2 + \ldots = 0.$$

La parabole correspond à $\lambda = -\dfrac{1}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}$; son équation développée est

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \beta^2x^2 - 2\alpha\beta xy + \alpha^2y^2 + 2b^2\alpha x + 2a^2\beta y \\ \qquad\qquad - (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 + a^2b^2) = 0. \end{array}\right.$$

D'une manière générale, on sait que, les coordonnées étant rectangulaires, le foyer de la parabole

$$(AX^2 + 2BXY + \ldots + F' = 0)$$

---

(1) Ces trois questions sont connexes et dépendent des mêmes calculs.

a pour coordonnées

$$x = \frac{C(AF + CF + D^2 - E^2) - 2BDE}{2(A + C)(BE - CD)},$$

$$y = \frac{A(AF + CF - D^2 + E^2) - 2BDE}{2(A + C)(BD - AE)}.$$

Par application, les coordonnées du foyer de (1) sont, avec $c^2 = a^2 - b^2$,

$$(2) \qquad x = \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)}, \qquad y = \frac{\beta(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)},$$

et elles satisfont, quels que soient a et b (et même a^2 et b^2) à l'équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1.$$

L'arc de la parabole (1) est la droite

$$(3) \qquad \alpha y - \beta x + \frac{c^2 \alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = 0.$$

II. Si M est un point variable de l'ellipse fixe (question 1804), la *parabole polaire* de M devient la parabole osculatrice en M; les équations (1), (2), (3) restent les mêmes [en remplaçant, si l'on veut, le dernier terme de (1) par $-2a^2b^2$]. La parabole tangente à MF et MF' en F et F' a pour équation

$$(\alpha y - \beta x)^2 + 2\beta c^2 y - \beta^2 c^2 = 0.$$

Elle a même axe (3) et même foyer (2). La propriété s'applique aussi bien à la parabole polaire d'un point M du plan qu'à la parabole osculatrice d'un point de la conique.

III. A cause des coordonnées (2), l'équation du lieu de la question 1807 est

$$b^2\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)^2$$
$$+ a^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2)^2 = 0.$$

Cette équation se décompose ainsi :

$$(4) \quad (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)[\alpha^2 + \beta^2 - (a + b)^2][\alpha^2 + \beta^2 - (a - b)^2] = 0.$$

C. Q. F. D.

Réciproquement et plus généralement, la conique étant ellipse ou hyperbole, si le point M décrit un cercle concentrique ($\alpha^2 + \beta^2 = R^2$), le foyer (2) devient une ellipse

$$\frac{x^2}{(R^2 + c^2)^2} + \frac{y^2}{(R^2 - c^2)^2} = \frac{1}{4R^2},$$

la même pour toutes les coniques homofocales, et qui, dans les cas (ellipse) de $R = a + b$ ou $R = a - b$, devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le foyer d'une parabole polaire par rapport à une hyperbole ne peut jamais se trouver sur cette hyperbole.

Remarques. — Toutes les paraboles polaires d'un point M par rapport à une famille de coniques homofocales ont même axe (3) et même foyer (2). Il en est ainsi en particulier des deux paraboles osculatrices à deux coniques homofocales en chacun de leurs points communs.

On peut être tenté de dire, à cause de l'équation (4), que, dans le cas de l'hyperbole, le lieu (III) de M est le système des asymptotes ($a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = 0$, a^2 et b^2 étant de signes contraires). Mais un point pris sur une asymptote n'a pas de parabole polaire; car, s'il en avait une, elle admettrait l'asymptote de l'hyperbole pour asymptote *finie,* ce qui est absurde.

Toute propriété de la parabole osculatrice en un point d'une conique paraît devoir donner naissance à une propriété de la parabole polaire d'un point du plan. C'est un fait remarquable, analogue à celui des propriétés de la tangente en un point que l'on retrouve, souvent identiques, parfois généralisées, dans la polaire d'un point.

QUESTIONS.

1915. Étudier les polynomes à deux variables

$$P_{2m,\,2n} = \frac{\partial^{m+n}[x^m y^n(1 - x^2 - y^2)^{m+n}]}{\partial x^m\,\partial y^n}.$$

On pourra en particulier étudier la position de la courbe

$$P_{2m,2n} = 0$$

par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Par exemple le polynome $P_{2,0}$ est

$$\frac{\partial[x(1 - x^2 - y^2)]}{\partial x} = 1 - 3x^2 - y^2$$

et la courbe $P_{2,0} = 0$ est tout entière dans le cercle. Ce fait est général.

(Appell, *Archiv der Math. und Physik*, 1901.)

1916. Le sommet A d'un triangle ABC et le pied H de la hauteur issue de A sont fixes. Les autres sommets B et C sont tels que

$$\overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = \text{const.}$$

1° Le centre du cercle circonscrit et le centre du cercle des neuf points du triangle ABC parcourent chacun une parabole;

2° L'axe radical de ces deux cercles enveloppe une conique.

(E.-N. Barisien.)

1917. On joint un point M quelconque d'une hyperbole équilatère à ses deux sommets A et A′, et l'on considère le cercle circonscrit au triangle MAA′ et son cercle des neuf points.

1° Le lieu des centres de similitude de ces deux cercles se compose de deux hyperboles équilatères;

2° La droite des centres est normale à une hyperbole fixe;

3° L'axe radical de ces deux cercles enveloppe une hyperbole;

4° Le lieu des centres des cercles tritangents au triangle MAA′ se compose de deux hyperboles équilatères.

(E.-N. Barisien.)

1918. Construire le point où une normale à une parabole coupe la développée de cette parabole, en dehors du point où elle est tangente à cette développée. (M. d'Ocagne.)

[B6a]

SUR L'APOLARITÉ DES FORMES BINAIRES;

PAR M. VOGT,
Professeur à l'Université de Nancy.

1. Je me propose de donner dans cet article quelques aperçus sur certaines parties importantes de la théorie des formes algébriques binaires; ces parties ont été étudiées sous le nom d'*apolarité* par plusieurs mathématiciens, parmi lesquels je citerai Reye, Rosanes, Sturm, Meyer, Picquet ([1]), et elles présentent des applications intéressantes à la théorie des courbes unicursales dans le plan ou dans l'espace. Je reviendrai plus tard sur ces applications; je me contente pour le moment de traiter certaines questions au point de vue de la théorie des formes binaires; les développements qui suivent peuvent être considérés comme une solution du problème proposé au premier concours des *Nouvelles Annales* pour 1899 (année 1898, p. 485).

2. Considérons deux variables x et y et une substitution linéaire

$$x = ax' + by', \qquad y = cx' + dy',$$

effectuée sur ces variables; nous désignons par δ le déterminant $ad - bc$ de la substitution, et nous le supposons différent de zéro.

([1]) On trouvera des renseignements bibliographiques assez complets sur cette question et sur ses applications, à la fin de l'Ouvrage de Franz Meyer, *Apolarität und rationale Curven* (Tubingen).

Si nous écrivons que l'on a identiquement

$$ux + vy = u'x' + v'y',$$

nous trouvons, en remplaçant x et y par leurs valeurs,

$$au + cv = u', \qquad bu + dv = v',$$

et en résolvant par rapport à u et v ce système d'équations, nous avons

$$\delta v = av' - bu', \qquad -\delta u = cv' - du';$$

nous en concluons que, au facteur δ près, les variables v et $-u$ subissent la même substitution que x et y.

Cela posé, soit $F(x, y)$ une forme homogène des variables x et y, ou, plus généralement, un covariant d'une ou de plusieurs formes données; nous supposons que sa valeur après la substitution, valeur que nous désignons par $F'(x', y')$, soit égale au produit de $F(x, y)$ par la puissance $p^{\text{ième}}$ de δ, c'est-à-dire que l'on ait

$$F'(x', y') = \delta^p F(x, y).$$

En appliquant le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, nous avons identiquement

$$x' \frac{\partial F'}{\partial x'} + y' \frac{\partial F'}{\partial y'} = \delta^p \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right);$$

nous en concluons que les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ s'expriment au moyen de $\frac{\partial F'}{\partial x'}$ et $\frac{\partial F'}{\partial y'}$ de la même manière que u et v au moyen de u' et v', au facteur δ^p près, et, par suite, que les symboles de dérivation $\frac{\partial}{\partial y}$ et $-\frac{\partial}{\partial x}$ sont soumis, à une puissance près de δ, à la même substitution que x et y.

Ce résultat s'étend aux symboles de dérivations d'ordres supérieurs; nous avons en effet l'identité symbolique

$$\left(x'\frac{\partial F'}{\partial x'}+y'\frac{\partial F'}{\partial y'}\right)^{(h)}=\delta^p\left(x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(h)},$$

dans laquelle nous devons développer les deux membres d'après la formule du binome, puis remplacer tout produit tel que $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^i\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{h-i}$ par la dérivée d'ordre h,

$$\frac{\partial^h F}{\partial x^i\,\partial y^{h-i}};$$

en comparant cette identité à l'égalité ordinaire

$$(u'x'+v'y')^h=(ux+vy)^h,$$

nous voyons que les symboles de dérivation $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ et leurs puissances symboliques sont soumis à la même substitution que u et v et leurs puissances, et par suite que $\frac{\partial}{\partial y}$ et $-\frac{\partial}{\partial x}$ sont soumis à la même substitution que x et y, à une puissance près de δ.

Si donc $\Phi(x, y)$ est une forme covariante quelconque et si l'on y remplace les variables par les symboles de dérivation $\frac{\partial}{\partial y}$ et $-\frac{\partial}{\partial x}$, le résultat de l'opération symbolique $\Phi\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)$ effectuée sur une forme covariante quelconque $F(x, y)$ est lui-même un invariant ou un covariant.

Supposons que Φ soit la polaire d'ordre h d'une forme $\varphi(x, y)$ par rapport à x_1, y_1, c'est-à-dire que l'on ait

$$\Phi(x, y, x_1, y_1)=\left(x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{(h)},$$

la puissance étant symbolique; Φ est un covariant relatif aux substitutions effectuées simultanément sur (x, y)

et (x_1, y_1); si nous remplaçons x_1 et y_1 par les symboles de dérivation $\frac{\partial}{\partial y}$ et $-\frac{\partial}{\partial x}$, appliqués à une forme donnée $f(x, y)$, nous aurons un covariant simultané de f et φ, qui s'écrit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^{(h)}.$$

Ce covariant est identique, à un facteur numérique près, à ce que l'on appelle le $h^{\text{ième}}$ composé de f et de φ; si h est égal à l'ordre de φ, ce covariant est le résultat de l'opération $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)$ effectuée sur f; si m et p sont les ordres de f et de φ, c'est alors une forme d'ordre $m-p$; elle se réduit à une constante si $m = p$, et n'existe plus si $m < p$. Dans le cas particulier où φ est une puissance $p^{\text{ième}}$ exacte, et est égal à $(xy_1 - yx_1)^p$, le covariant précédent est égal à $\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{(p)}$, et représente la $p^{\text{ième}}$ polaire de f par rapport à (x_1, y_1).

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons désormais que les formes f et φ sont écrites de la façon suivante :

$$(1) \qquad f = a_0 x^m + \frac{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} y^2 + \ldots,$$

$$(2) \qquad \varphi = \alpha_0 x^p + \alpha_1 x^{p-1} y + \alpha_2 x^{p-2} y^2 + \ldots,$$

les coefficients du binome étant mis en évidence dans la première et non dans la seconde; nous avons alors

$$\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \alpha_0 \frac{\partial^p f}{\partial y^p} - \alpha_1 \frac{\partial^p f}{\partial y^{p-1}\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial^p f}{\partial y^{p-2}\partial x^2} - \ldots.$$

En remplaçant les dérivées d'ordre p de f par leurs valeurs, nous pouvons mettre en facteur le produit

$$m(m-1)\ldots(m-p+1);$$

nous écrirons

$$\frac{\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{m(m-1)\ldots(m-p+1)} = b_0 x^{m-p} + b_1 x^{m-p-1} y + \ldots + b_{m-p} y^{m-p},$$

les coefficients b ayant pour valeurs

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} b_0 \quad\;\, = \alpha_0 a_p \quad\;\; - \alpha_1 a_{p-1} + \alpha_2 a_{p-2} - \ldots + (-1)^p \alpha_p a_0, \\ b_1 \quad\;\, = \alpha_0 a_{p+1} - \alpha_1 a_p \quad\; + \alpha_2 a_{p-1} - \ldots + (-1)^p \alpha_p a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{m-p} = \alpha_0 a_m \quad\; - \alpha_1 a_{m-1} + \alpha_2 a_{m-2} - \ldots + (-1)^p \alpha_p a_{m-p}. \end{array}\right.$$

3. Lorsque tous les coefficients b sont nuls, on dit que la forme φ est *apolaire* par rapport à f; nous nous proposons d'indiquer quelques propriétés des formes apolaires par rapport à une ou plusieurs formes données.

Étant donnée une forme f d'ordre m, pour qu'il existe une forme φ qui lui soit apolaire, il faut et il suffit qu'on puisse trouver des coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ satisfaisant aux équations obtenues en annulant les seconds membres des relations (3); ces équations sont en nombre $m-p+1$ et renferment $p+1$ inconnues d'une manière homogène; elles ont toujours des solutions si $m-p+1$ est inférieur à $p+1$, c'est-à-dire si p est supérieur à $\frac{m}{2}$. Nous allons considérer deux cas suivant que m est impair ou pair.

Premier cas : m impair. — Si les coefficients de f ne sont soumis à aucune restriction, la plus petite valeur que l'on puisse attribuer à p est $\frac{m+1}{2}$; pour cette valeur, les coefficients de φ sont déterminés, à un facteur constant près, car leur nombre est supérieur d'une unité à celui des équations qui servent à les déterminer. Il existe donc une seule forme φ apolaire à f et d'ordre $\frac{m+1}{2}$; on l'obtient en éliminant les coefficients α entre les équations (2) et (3) où b_0, b_1, ... sont nuls; nous les écrirons de la façon suivante

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} a_0\alpha_p - a_1\alpha_{p-1} + a_2\alpha_{p-2} - \ldots \pm a_p\alpha_0 = 0, \\ a_1\alpha_p - a_2\alpha_{p-1} + a_3\alpha_{p-2} - \ldots \pm a_{p+1}\alpha_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m-p}\alpha_p - a_{m-p+1}\alpha_{p-1} + a_{m-p+2}\alpha_{p-2} - \ldots \pm a_m\alpha_0 = 0, \end{array}\right.$$

$$(5)\qquad y^p\alpha_p + y^{p-1}x\alpha_{p-1} + y^{p-2}x^2\alpha_{p-2} - \ldots + x^p\alpha_0 = \varphi;$$

on a ainsi, à un coefficient numérique près

$$(6)\qquad \varphi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_p \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m-p} & a_{m-p+1} & a_{m-p+2} & \ldots & a_m \\ +y^p & -y^{p-1}x & +y^{p-2}x^2 & \ldots & \pm x^p \end{vmatrix},$$

p ayant la valeur $\frac{m+1}{2}$.

Lorsque l'on donne à p une valeur supérieure à $\frac{m+1}{2}$, il existe une infinité de formes d'ordre p apolaires par rapport à f, et elles renferment $2p-m-1$ coefficients arbitraires non homogènes. Pour qu'il existe des formes d'ordre inférieur à $\frac{m+1}{2}$ apolaires à f, il faut que les équations (4) soient compatibles, c'est-à-dire que tous les déterminants d'ordre $p+1$ tirés du tableau des coefficients de ces équations soient nuls.

Par exemple, si $m=3$, il existe dans le cas général une forme d'ordre 2 apolaire à la forme f, et elle est

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ y^2 & -xy & x^2 \end{vmatrix}.$$

c'est la hessienne de la forme cubique donnée; pour qu'il existe une forme linéaire apolaire à f, il faut que tous les déterminants tirés du tableau

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{matrix} \right\|$$

soient nuls, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3},$$

ou bien que la hessienne soit identiquement nulle.

Second cas : m pair. — Lorsque les coefficients de f sont quelconques, la plus petite valeur qu'on puisse attribuer à p est $\frac{m}{2}+1$; la forme φ contient alors un paramètre arbitraire; pour qu'il existe une forme φ d'ordre $\frac{m}{2}$, il est nécessaire que les coefficients de f satisfassent à la condition

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{\frac{m}{2}} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{\frac{m}{2}+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\frac{m}{2}} & a_{\frac{m}{2}+1} & \dots & a_m \end{vmatrix} = 0,$$

et si elle est seule remplie, il existe une forme φ et une seule répondant à la question, à un facteur près; on l'obtient en remplaçant l'une des lignes du déterminant précédent par

$$+y^{\frac{m}{2}}, \quad -y^{\frac{m}{2}-1}x, \quad \dots, \quad \pm x^{\frac{m}{2}}.$$

Par exemple dans le cas de $m=2$, il existe une infinité de formes quadratiques telles que

$$\varphi = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 xy + \alpha_2 y^2,$$

apolaires par rapport à la forme

$$f = a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2;$$

il faut et il suffit que α_0, α_1, α_2 satisfassent à la relation

$$\alpha_0 a_2 - \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_0 = 0,$$

c'est-à-dire que les racines des deux formes soient en situation harmonique. Pour qu'il existe une forme φ linéaire apolaire par rapport à f, il faut et il suffit que le discriminant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

soit nul; on a alors

$$\varphi = a_0 x + a_1 y.$$

Dans le cas de $m = 4$, il existe une infinité de formes φ d'ordre égal ou supérieur à 3 apolaires par rapport à f; pour que l'on puisse trouver une forme φ quadratique jouissant de cette propriété, il faut que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire que l'invariant T de la forme biquadratique soit nul; pour que l'on puisse trouver une forme φ linéaire, il faut que l'on ait

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4}.$$

4. L'intérêt que présente la théorie des formes apolaires par rapport à une forme f d'ordre m réside dans la réduction de cette dernière forme à une somme de puissances $m^{\text{ièmes}}$ de facteurs linéaires; nous allons, à ce sujet, démontrer le théorème suivant :

Si l'on connaît une forme φ, d'ordre p, apolaire *par rapport à une forme donnée f d'ordre m; si φ est décomposable en un produit de p facteurs linéaires distincts, et si l'on a, par exemple,*

$$(8) \qquad \varphi = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2)\ldots(xy_p - yx_p),$$

on peut mettre f sous la forme de la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de ces p facteurs, affectées de coefficients constants, c'est-à-dire sous la forme

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} f = \mathrm{A}_1(xy_1 - yx_1)^m + \mathrm{A}_2(xy_2 - yx_2)^m + \ldots \\ + \mathrm{A}_p(xy_p - yx_p)^m, \end{aligned} \right.$$

et cela d'une seule manière.

Réciproquement, si f est donnée sous la forme (9) *la forme φ donnée par l'équation* (8) *lui est apolaire.*

Nous commencerons par faire les remarques générales suivantes :

1° Pour qu'une fonction φ, écrite sous la forme (8), soit apolaire par rapport à une fonction donnée f, il faut et il suffit que l'expression symbolique

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x} + y_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(x_p \frac{\partial}{\partial x} + y_p \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

appliquée à f donne un résultat nul ; ce résultat est celui que l'on obtient en appliquant à f la formation polaire successivement par rapport à

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_p, y_p).$$

2° Pour qu'une forme φ soit apolaire par rapport à une puissance $m^{\text{ième}}$ telle que $(xy_i - yx_i)^m$, il faut et il suffit que cette forme φ soit divisible par le facteur

$$xy_i - yx_i;$$

en effet, les polaires successives de cette puissance sont, à un facteur constant près, des puissances de même nature; pour que le résultat des formations polaires successives soit nul, il faut et il suffit que l'un des éléments par rapport auxquels on prend la polaire soit identique à (x_i, y_i).

3° Si une forme φ est apolaire par rapport à plusieurs formes $f_1, f_2, \ldots, f_p$, elle est apolaire par rapport à toute combinaison linéaire de ces formes, telle que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_p f_p;$$

les équations (4) sont, en effet, satisfaites pour cette combinaison si elles le sont pour chacune des formes f.

Il résulte de ces remarques que la forme (8) est toujours apolaire par rapport à la forme (9) quels que soient les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_p$; par suite, la réciproque du théorème énoncé est vérifiée. Pour démontrer la proposition directe, il suffit de faire voir que si la forme (8) d'ordre p est apolaire par rapport à une forme donnée f d'ordre m telle que (1), on peut toujours déterminer les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_p$ entrant dans l'expression (9) de manière à identifier cette expression avec la forme donnée; nous allons voir que cela est possible et d'une seule manière.

Les relations d'identification sont

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} a_0 = A_1 y_1^m + A_2 y_2^m + \ldots + A_p y_p^m, \\ -a_1 = A_1 y_1^{m-1} x_1 + A_2 y_2^{m-1} x_2 + \ldots + A_p y_p^{m-1} x_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm a_m = A_1 x_1^m + A_2 x_2^m + \ldots + A_p x_p^m; \end{array}\right.$$

or, les relations (4) sont satisfaites identiquement par hypothèse; elles sont en nombre $m - p + 1$, et peuvent remplacer $m - p + 1$ des équations précédentes, par exemple les $m - p + 1$ dernières; il suffit alors de satisfaire aux p premières. Ces p équations déterminent les inconnues $A_1, A_2, \ldots, A_p$ d'une manière unique; en effet, le déterminant des coefficients des inconnues est, à un facteur près différent de zéro, le déterminant de Vandermonde des p systèmes (x_i, y_i) et il n'est pas nul puisque ces systèmes sont distincts; il existe donc un seul système de valeurs de $A_1, A_2, \ldots, A_p$, et la proposition est démontrée. On obtiendrait l'expression de f en éliminant $A_1, A_2, \ldots, A_p$ entre l'équation (9) et les p premières équations (10).

5. Comme conséquence des résultats précédents, nous pouvons énoncer ce théorème :

Une forme f, dont l'ordre m est impair, et dont les coefficients ne sont soumis à aucune restriction, se ramène toujours d'une manière et d'une seule à la somme de $\frac{m+1}{2}$ puissances $m^{\text{ièmes}}$ de formes linéaires, affectées de coefficients constants; ces formes sont les diviseurs du déterminant (6), *où p a la valeur $\frac{m+1}{2}$.*

Par exemple, toute forme cubique se ramène à la somme de deux cubes de formes linéaires, et ces formes sont les diviseurs de la hessienne; on retrouve ainsi un résultat bien connu.

Toute forme f d'ordre quelconque se ramène d'une infinité de manières à la somme d'un nombre p de puissances $m^{\text{ièmes}}$ de forme linéaire, p étant supérieur à $\frac{m+1}{2}$. Pour qu'elle se ramène à la somme de p puissances $m^{\text{ièmes}}$, p étant inférieur à $\frac{m+1}{2}$, il faut et il suffit que les équations (4) soient compatibles. En particulier, si m est pair, f se ramène à la somme de $\frac{m}{2}$ puissances $m^{\text{ièmes}}$ si le déterminant (7) est nul.

Par exemple, une forme quadratique est réductible d'une infinité de manières à la somme de deux carrés, et une forme biquadratique à celle de trois carrés; pour que, dans ce dernier cas, le nombre des carrés se réduise à deux, il faut et il suffit que l'invariant T soit nul.

6. Nous allons supposer plus généralement que la forme φ d'ordre p apolaire par rapport à f ait des racines multiples, et soit égale à

$$(11)\quad \varphi = (xy_1 - yx_1)^{p_1}(xy_2 - yx_2)^{p_2}\ldots(xy_q - yx_q)^{p_q},$$

$p_1 + p_2 + \ldots + p_q$ étant égal à p; nous allons montrer que f est réductible à la forme

$$(12)\quad \begin{cases} f = (xy_1 - yx_1)^{m-p_1+1}f_1 + (xy_2 - yx_2)^{m-p_2+1}f_2 + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + (xy_q - yx_q)^{m-p_q+1}f_q, \end{cases}$$

$f_1, f_2, \ldots, f_q$ étant des formes particulières d'ordres respectifs $p_1 - 1$, $p_2 - 1$, $\ldots$, $p_q - 1$, et réciproquement.

Nous allons d'abord voir que φ est apolaire par rapport à chacune des parties de la somme dont se compose f; cela résulte de ce fait qu'en appliquant l'opération symbolique

$$\left(x_i\frac{\partial}{\partial x} + y_i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{p_i}\varphi_i\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

où φ_i est d'ordre $p - p_i$, à la forme

$$(xy_i - yx_i)^{m-p_i+1}f_i(x, y),$$

où f_i est d'ordre $p_i - 1$, on obtient une quantité identiquement nulle. Si l'on commence, en effet, par effectuer l'opération $\varphi_i\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)$, le résultat est de la forme

$$(xy_i - yx_i)^{m-p+1}\,\psi_i(x, y),$$

où ψ est une forme d'ordre $p_i - 1$; en prenant ensuite p_i fois successivement la polaire de cette quantité par rapport à (x_i, y_i), on constate que le résultat est identiquement nul, comme nous l'avons annoncé.

La forme φ étant, d'après ce qui précède, apolaire par rapport à chacune des parties de f, est apolaire par rapport à f elle-même; il nous reste à montrer inversement que si φ est apolaire par rapport à une forme f donnée telle que (1), celle-ci peut être mise sous la forme (12); nous allons voir que cela est toujours possible, et d'une seule manière.

Les formes $f_1, f_2, \ldots, f_q$ entrant dans l'équation (12) contiennent $p_1 + p_2 + \ldots + p_q$, c'est-à-dire p coefficients indéterminés; ces coefficients doivent satisfaire aux $m+1$ relations d'identification de (1) et de (12); mais $m-p+1$ de ces relations peuvent être remplacées par les équations (4) qui sont identiquement satisfaites par hypothèse; il suffit donc de considérer p équations d'identification, par exemple celles qui donnent les valeurs de a_0, a_1, a_2, ..., a_{p-1}, et de montrer qu'elles donnent un système unique de valeurs des p coefficients inconnus.

Pour ne pas compliquer l'écriture nous nous placerons dans un cas particulier, ce qui ne change rien aux raisonnements; nous supposerons que l'on ait $q=3$, $p_1=3$, $p_2=2$, $p_3=1$, d'où $p=6$; nous ferons de plus les quantités y égales à l'unité, et nous supposerons f_1, f_2 et f_3 développés suivant les puissances respectives de $x-x_1$, $x-x_2$ et $x-x_3$, sous la forme

$$\begin{aligned} f_1 &= A_1(x-x_1)^2 + A_2(x-x_1) + A_3, \\ f_2 &= A_4(x-x_1) + A_5, \\ f_3 &= A_6; \end{aligned}$$

nous écrirons alors l'identité suivante,

$$\begin{aligned} & a_0 x^m + C_m^1 a_1 x^{m-1} + C_m^2 a_2 x^{m-2} + \ldots \\ & \quad = A_1(x-x_1)^m + A_2(x-x_1)^{m-1} + A_3(x-x_1)^{m-2} \\ & \quad + A_4(x-x_2)^m + A_5(x-x_2)^{m-1} + A_6(x-x_3)^m, \end{aligned}$$

et nous égalerons les coefficients des six plus hautes puissances de x dans les deux membres.

Le déterminant des coefficients de $A_1, A_2, \ldots, A_6$ dans les six équations obtenues est, au signe près,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ C_m^1 x_1 & 1 & 0 & C_m^1 x_2 & 1 & C_m^1 x_3 \\ C_m^2 x_1^2 & C_{m-1}^1 x_1 & 1 & C_m^2 x_2^2 & C_{m-1}^1 x_2 & C_m^2 x_3^2 \\ C_m^3 x_1^3 & C_{m-1}^2 x_1^2 & C_{m-2}^1 x_1 & C_m^3 x_2^3 & C_{m-1}^2 x_2^2 & C_m^3 x_3^3 \\ C_m^4 x_1^4 & C_{m-1}^3 x_1^3 & C_{m-2}^2 x_1^2 & C_m^4 x_2^4 & C_{m-1}^3 x_2^3 & C_m^4 x_3^4 \\ C_m^5 x_1^5 & C_{m-1}^4 x_1^4 & C_{m-2}^3 x_1^3 & C_m^5 x_2^5 & C_{m-1}^4 x_2^4 & C_m^5 x_3^5 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est la généralisation de celui de Vandermonde; nous allons voir qu'il ne diffère que par un coefficient numérique du produit

$$(x_2 - x_1)^6 (x_3 - x_1)^3 (x_3 - x_2)^2.$$

Considéré comme fonction de x_1, il s'annule pour $x_1 = x_2$, je dis qu'il en est de même de ses dérivées successives jusqu'à la cinquième; formons sa dérivée par rapport à x_1; elle est la somme des déterminants obtenus en remplaçant les éléments d'une des colonnes par leurs dérivées par rapport à cette lettre; les dérivées des éléments de la première colonne sont, comme on le voit immédiatement, égales aux produits par C_m^1 des éléments correspondants de la seconde, et le déterminant qui en résulte est nul; on voit de même que la dérivation des éléments de la seconde colonne donne encore un résultat identiquement nul, il suffit donc de remplacer les éléments de la troisième colonne par leurs dérivées; on constate bien que le résultat ainsi obtenu s'annule encore pour $x_1 = x_2$. On verrait de la même façon que les dérivées suivantes du déterminant par rapport à x_1 jusqu'à la cinquième jouissent de la même propriété, et que ce déterminant est divisible par $(x_2 - x_1)^6$.

Pour une raison analogue, il contient en facteur $(x_3 - x_1)^3$ et $(x_3 - x_2)^2$; en examinant les degrés par rapport à l'ensemble des lettres et les coefficients du terme fourni par la diagonale principale, on voit que le déterminant a pour valeur

$$C_m^3 C_{m-1}^3 C_m^5 (x_2 - x_1)^6 (x_3 - x_1)^3 (x_3 - x_2)^2;$$

par conséquent il n'est pas nul et il existe un seul système de valeurs de $A_1, A_2, \ldots, A_6$, ce que nous voulions établir.

Comme exercice de calcul, on peut vérifier qu'un déterminant analogue au précédent, renfermant x_1 dans les p_1 premières colonnes, x_2 dans les p_2 suivantes, et ainsi de suite, ne diffère que par un facteur numérique du produit

$$(x_2 - x_1)^{p_2 p_1} (x_3 - x_1)^{p_3 p_1} \ldots (x_i - x_k)^{p_i p_k} \ldots.$$

Comme application de ce qui précède, on voit que si une forme cubique f a une hessienne φ égale au carré de $xy_1 - yx_1$, f est réductible d'une manière et d'une seule à la forme

$$f = (xy_1 - yx_1)^2 (A_1 x + A_2 y).$$

7. Considérons le cas de $p = m$; les relations (4), qui expriment que φ est apolaire par rapport à f, se réduisent à une seule, qui est

$$(13) \qquad a_0 \alpha_m - a_1 \alpha_{m-1} + a_2 \alpha_{m-2} - \ldots \pm a_m \alpha_0 = 0.$$

En introduisant les coefficients du binome dans les termes de φ, c'est-à-dire en écrivant, par exemple,

$$\varphi = b_0 x^m + \frac{m}{1} b_1 x^{m-1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} b_2 x^{m-2} y^2 + \ldots,$$

la condition précédente s'écrit

$$a_0 b_m - \frac{m}{1} a_1 b_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 b_{m-2} - \ldots \pm a_m b_0 = 0;$$

comme elle est symétrique par rapport aux coefficients a et b, on en conclut que f est inversement apolaire par rapport à φ.

Si les deux formes f et φ sont identiques, la condition précédente se réduit à

$$a_0 a_m - \frac{m}{1} a_1 a_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a_2 a_{m-2} - \ldots \pm a_m a_0 = 0;$$

le premier membre est un invariant, car il est le résultat du calcul symbolique $f\left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)$ appliqué à la forme f elle-même.

Dans le cas de m impair, cet invariant est identiquement nul, et la forme f est toujours apolaire par rapport à elle-même.

Dans le cas de m pair l'invariant renferme deux fois les mêmes termes, à égale distance des extrêmes, sauf le terme du milieu, qui intervient une seule fois; par exemple, dans le cas de la forme quadratique il est égal au double du discriminant et dans le cas de la forme biquadratique, il a pour valeur

$$2(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) = 2S;$$

en l'annulant, on a la condition nécessaire et suffisante pour que f soit apolaire par rapport à elle-même.

8. Nous allons maintenant considérer un système de formes f d'ordre m; nous nous placerons d'abord dans le cas où le nombre de ces formes est égal à m, et nous

les écrirons

$$(14)\quad \begin{cases} f_1 = a_0 x^m + \dfrac{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \ldots, \\ f_2 = b_0 x^m + \dfrac{m}{1} b_1 x^{m-1} y + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m = l_0 x^m + \dfrac{m}{1} l_1 x^{m-1} y + \ldots; \end{cases}$$

nous supposons qu'elles sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun système de nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ non tous nuls tels que l'on ait identiquement

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_m f_m = 0;$$

pour qu'une telle identité ne soit pas possible, il faut et il suffit que les déterminants d'ordre m tirés du tableau des coefficients $a, b, \ldots, l$, ne soient pas tous nuls; c'est ce que nous admettrons désormais.

Il existe une forme φ et une seule apolaire par rapport à chacune des formes f; les coefficients de cette forme doivent, en effet, satisfaire à la relation (13) et aux relations analogues relatives aux coefficients $b, c, \ldots, l$; on obtient ainsi m équations homogènes à $m+1$ inconnues $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$, et elles déterminent à un facteur numérique près un système unique de valeurs de ces inconnues, d'après l'hypothèse faite que les formes sont indépendantes.

L'élimination des coefficients α entre l'équation (2) qui définit φ et les relations telles que (13) fournit, comme expression de φ, la suivante

$$(15)\quad \varphi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_0 & l_1 & l_2 & \ldots & l_m \\ y^m & -y^{m-1}x & y^{m-2}x^2 & \ldots & \pm x^m \end{vmatrix};$$

nous allons voir qu'elle ne diffère que par un facteur numérique du déterminant des dérivées d'ordre $m-1$ des formes f:

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^{m-1} f_1}{\partial x^{m-1}} & \frac{\partial^{m-1} f_1}{\partial x^{m-2}\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{m-1} f_1}{\partial y^{m}} \\ \frac{\partial^{m-1} f_2}{\partial x^{m-1}} & \frac{\partial^{m-1} f_2}{\partial x^{m-2}\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{m-1} f_2}{\partial y^{m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^{m-1} f_m}{\partial x^{m-1}} & \frac{\partial^{m-1} f_m}{\partial x^{m-2}\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{m-1} f_m}{\partial y^{m}} \end{vmatrix};$$

si nous multiplions, en effet, les éléments de la première colonne du déterminant (15) par x, et si nous leur ajoutons ceux de la suivante multipliés par y, puis si nous répétons le même calcul pour la deuxième colonne, la troisième, etc., nous obtenons un déterminant qui se réduit au signe près à

$$\begin{vmatrix} a_0 x + a_1 y & a_1 x + a_2 y & \ldots & a_{m-1} x + a_m y \\ b_0 x + b_1 y & b_1 x + b_2 y & \ldots & b_{m-1} x + b_m y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_0 x + l_1 y & l_1 x + l_2 y & \ldots & l_{m-1} x + l_m y \end{vmatrix}$$

et ce dernier est identique à (16) à un facteur numérique près.

Dans le cas général, φ a ses racines distinctes; supposons que l'on ait

$$\varphi = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2)\ldots(xy_m - yx_m);$$

nous savons que chacune des formes f par rapport auxquelles φ est apolaire peut être mise sous la forme d'une somme de m puissances $m^{\text{ièmes}}$, et cela d'une seule manière; nous pourrons de cette façon écrire

$$\begin{aligned} f_1 &= A_1(xy_1 - yx_1)^m + A_2(xy_2 - yx_2)^m + \ldots + A_m(xy_m - yx_m)^m, \\ f_2 &= B_1(xy_1 - yx_1)^m + B_2(xy_2 - yx_2)^m + \ldots + B_m(xy_m - yx_m)^m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m &= L_1(xy_1 - yx_1)^m + L_2(xy_2 - yx_2)^m + \ldots + L_m(xy_m - yx_m)^m. \end{aligned}$$

les coefficients A, B, ..., L étant déterminés d'une manière unique; nous énoncerons ce résultat de la façon suivante :

m formes binaires d'ordre m telles que (14) *peuvent en général être ramenées simultanément à la somme de m puissances $m^{\text{ièmes}}$ des mêmes formes linéaires; ces dernières sont les diviseurs du premier degré des déterminants* (15) *ou* (16).

Dans le cas particulier où φ a des racines multiples et se met, par exemple, sous la forme (11), les formes f sont réductibles simultanément à la forme (12).

Comme exemple, deux formes quadratiques f_1 et f_2 sont, en général, réductibles simultanément à des sommes de deux carrés des mêmes formes linéaires; ces formes sont les diviseurs de la jacobienne de deux formes données

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix};$$

si cette jacobienne est le carré parfait d'une forme linéaire f_1 et f_2 ont cette forme comme diviseur commun.

9. Nous considérons maintenant le cas où l'on donne q formes f d'ordre m, q étant inférieur à m; nous allons chercher les formes φ d'ordre m qui sont apolaires par rapport à ces formes f. Pour simplifier l'écriture des coefficients, nous supposerons cette fois que les coefficients du binome sont mis en évidence dans φ, et nous poserons

$$\varphi = \alpha_0 x^m + C_m^1 \alpha_1 x^{m-1} y + C_m^2 \alpha_2 x^{m-2} y^2 + \ldots + \alpha_m y^m;$$

nous écrirons de même, comme dans les formules (14),

$$\begin{aligned} f_1 &= a_0 x^m + C_m^1 a_1 x^{m-1} y + \ldots + a_m y^m, \\ f_2 &= b_0 x^m + C_m^1 b_1 x^{m-1} y + \ldots + b_m y^m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_q &= h_0 x^m + C_m^1 h_1 x^{m-1} y + \ldots + h_m y^m. \end{aligned}$$

Pour que φ soit apolaire par rapport à ces formes f, il faut que les q conditions suivantes soient remplies

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_m a_0 - C_m^1 \alpha_{m-1} a_1 + C_m^2 \alpha_{m-2} a_2 - \ldots \pm \alpha_0 a_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_m h_0 - C_m^1 \alpha_{m-1} h_1 + C_m^2 \alpha_{m-2} h_2 - \ldots \pm \alpha_0 h_m = 0; \end{array} \right.$$

comme les formes f sont supposées linéairement indépendantes, les déterminants d'ordre q tirés du tableau de leurs coefficients ne sont pas tous nuls; si l'on suppose, par exemple, que le déterminant

$$d = \begin{vmatrix} a_0 & C_m^1 a_1 & \ldots & C_m^{q-1} a_{q-1} \\ b_0 & C_m^1 b_1 & \ldots & C_m^{q-1} b_{q-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_0 & C_m^1 h_1 & \ldots & C_m^{q-1} h_{q-1} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, les équations (17) fournissent les valeurs de q des coefficients α, celles de $\alpha_m, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_{m-q+1}$ au moyen des $m-q+1$ autres; il en résulte que la forme φ répondant à la question a ses coefficients fonctions linéaires et homogènes de $m-q+1$ paramètres arbitraires; autrement dit, il existe $m-q+1$ formes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-q+1}$ apolaires par rapport aux formes f, et toutes les formes φ sont données par la formule générale

$$(18) \qquad \varphi = \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \ldots + \mu_{m-q+1} \varphi_{m-q+1},$$

où les coefficients μ sont arbitraires.

Dans le cas que nous avons considéré, où d n'est pas nul, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-q+1}$ peuvent être représentés par des déterminants d'ordre $q+1$ tirés du Tableau

$$(19) \qquad \left\| \begin{array}{ccccc} a_0 & C_m^1 a_1 & C_m^2 a_2 & \ldots & a_m \\ b_0 & C_m^1 b_1 & C_m^2 b_2 & \ldots & b_m \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ h_0 & C_m^1 h_1 & C_m^2 h_2 & \ldots & h_m \\ y^m & -C_m^1 y^{m-1} x & C_m^2 y^{m-2} x^2 & \ldots & \pm x^m \end{array} \right\|,$$

et formés en adjoignant aux q premières colonnes chacune des suivantes respectivement. Ces fonctions sont linéairement indépendantes, car elles contiennent chacune un terme différent dans la suite des termes

$$x^q y^{m-q}, \quad x^{q+1} y^{m-q-1}, \quad \ldots, \quad x^m.$$

Il y a réciprocité entre les formes f et φ, d'après les formules (17); l'ensemble des formes f apolaires par rapport à toutes les formes (18) est représenté par

$$(20) \qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_q f_q,$$

où les λ sont des paramètres arbitraires.

10. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Le déterminant fonctionnel constitué par les dérivées partielles d'ordre $q-1$ des formes f, et le déterminant analogue constitué par les dérivées partielles d'ordre $m-q$ des formes φ ne diffèrent l'un de l'autre que par un facteur constant.

Nous commencerons par mettre le premier de ces déterminants sous une autre forme, en montrant que les deux déterminants

$$(21) \qquad \left| \begin{array}{cccc} \dfrac{\partial^{q-1} f_1}{\partial x^{q-1}} & \dfrac{\partial^{q-1} f_1}{\partial x^{q-2}\, \partial y} & \ldots & \dfrac{\partial^{q-1} f_1}{\partial y^{q-1}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^{q-1} f_q}{\partial x^{q-1}} & \dfrac{\partial^{q-1} f_q}{\partial x^{q-2}\, \partial y} & \ldots & \dfrac{\partial^{q-1} f_q}{\partial y^{q-1}} \end{array} \right|$$

et

$$
(22)\quad \begin{vmatrix}
a_0 & C_m^1 a_1 & C_m^2 a_2 & .. & .. & .. & \dots & a_m \\
.. & \dots.. & \dots.. & .. & .. & .. & \dots & \dots \\
h_0 & C_m^1 h_1 & C_m^2 h_2 & .. & .. & .. & \dots & h_m \\
y^q & -C_q^1 y^{q-1} x & C_q^2 y^{q-2} x^2 & .. & \pm x^q & 0 & \dots & 0 \\
0 & y^q & -C_q^1 y^{q-1} x & .. & \dots.. & \pm x^q & \dots & 0 \\
.. & \dots & \dots\dots\dots. & .. & \dots.. & \dots.. & \dots & .. \\
0 & 0 & \dots\dots\dots. & y^q & \dots.. & \dots.. & \dots & \pm x^q
\end{vmatrix}
$$

ne diffèrent que par un facteur constant; c'est la généralisation de la propriété démontrée dans le cas des déterminants (15) et (16).

Nous multiplierons pour cela le déterminant (22) par le suivant

$$
\begin{vmatrix}
A_m^{q-1} x^{m-q+1} & 0 & 0 & \dots \\
A_{m-1}^{q-1} x^{m-q} y & A_{m-1}^{q-2} A_1^1 x^{m-q+1} & 0 & \dots \\
A_{m-2}^{q-1} x^{m-q-1} y^2 & A_{m-2}^{q-2} A_2^1 x^{m-q} y & A_{m-2}^{q-3} A_2^2 x^{m-q+1} & \dots \\
\dots\dots\dots\dots.. & \dots\dots\dots\dots.. & \dots\dots\dots\dots.. & \dots \\
A_{q-1}^{q-1} y^{m-q+1} & A_{q-1}^{q-2} A_{m-q+1}^1 x y^{m-q} & A_{q-1}^{q-3} A_{m-q+1}^2 x^2 y^{m-q-1} & \dots \\
0 & A_{q-2}^{q-2} A_{m-q+2}^1 y^{m-q+1} & A_{q-2}^{q-3} A_{m-q+2}^2 x y^{m-q} & \dots \\
0 & 0 & A_{q-3}^{q-3} A_{m-q+3}^2 y^{m-q+1} & \dots \\
.. & .. & \dots\dots\dots\dots\dots. & \dots
\end{vmatrix}
$$

les q premières colonnes de ce dernier déterminant sont constituées par des éléments dont la loi de formation est mise en évidence, A_r^s désignant le nombre des arrangements de r objets s à s; les colonnes suivantes contiennent seulement l'unité sur la diagonale principale, et leurs autres éléments sont nuls; ce déterminant est égal au produit de $x^{q(m-q+1)}$ par un facteur constant.

En effectuant la multiplication, on obtient d'abord, dans les q premières lignes et les q premières colonnes du produit, les éléments du déterminant (21); on constate ensuite que les lignes suivantes ont leurs q premiers éléments égaux à zéro; on vérifie, en effet, que l'élément situé dans la $q+r^{\text{ième}}$ ligne et la $s^{\text{ième}}$ colonne ($s \leqq q$) contient $x^{m-q-r+s+1}y^{q+r-s}$ en facteur, et le coefficient de ce produit est égal à la valeur que prend l'expression

$$\frac{\partial^{q-1}}{\partial u^{q-s}\,\partial v^{s-1}}\,u^{m-q-r+1}v^{r-1}(u-v)^q,$$

lorsqu'on y fait $u=v$; cette valeur est toujours nulle.

Le produit effectué se trouve, de cette façon, être égal au déterminant (21) multiplié par un déterminant d'ordre $m-q+1$; ce dernier renferme x^q dans tous les éléments de la diagonale principale et se réduit à $\pm x^{q(m-q+1)}$; comme le déterminant par lequel on a multiplié (22) a cette même valeur, à un coefficient numérique près, l'identité des expressions (21) et (22) se trouve bien démontrée à un facteur constant près.

M. Andoyer, dans ses *Leçons sur la théorie des formes,* a mentionné la transformation précédente des déterminants (21) et (22) l'un dans l'autre, et a indiqué que l'évanouissement identique de l'une ou l'autre de ces expressions est la condition nécessaire et suffisante pour que les q formes f ne soient pas linéairement indépendantes.

Ceci étant posé, nous avons vu que les formes indépendantes φ, en nombre $m-q+1$ sont représentées par des déterminants d'ordre $q+1$ tirés du Tableau (19), ces déterminants ayant en commun les q premières colonnes de ce Tableau, et différant par la $q+1^{\text{ième}}$. Les dérivées partielles d'ordre $m-q$ de ces formes se déduisent de la même manière, à des facteurs numériques près, de Tableaux analogues à (19); il suffit d'y remplacer la dernière ligne successivement par les dernières lignes du déterminant (22). Ces dérivées sont donc à des facteurs constants près égales à des déterminants d'ordre $q+1$, mineurs de (22), et obtenus en bordant le mineur désigné précédemment par d au moyen des éléments de la $q+r^{\text{ième}}$ ligne et de la $q+s^{\text{ième}}$ colonne.

D'après un théorème démontré dans un précédent article [*Théorème relatif aux mineurs d'un déterminant* (*Nouvelles Annales,* mai 1901, p. 211)], le déterminant Δ de ces mineurs a pour valeur $\mathrm{D}d^{m-q-1}$, D représentant le déterminant (22); l'identité du déterminant (21) et de celui qui est formé par les dérivées d'ordre $m-q$ des formes φ, déterminant que nous représenterons par

$$(23)\qquad \left|\frac{\partial^{m-q}\varphi_r}{\partial x^{m-q-s}\,\partial y^s}\right|,$$

se trouve ainsi démontrée, à un facteur constant près.

11. Nous allons donner de ce théorème une démonstration plus courte que la précédente, en supposant toutefois que les coefficients ne sont soumis à aucune restriction, et nous indiquerons en même temps la signification du déterminant (21) et de son analogue (23) relatif aux formes φ. Cherchons parmi le système des formes

$$f=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_q f_q,$$

celles qui ont une racine multiple d'ordre q; si (x_1, y_1) est cette racine, elle annule les dérivées partielles d'ordre $q-1$ de f, et satisfait aux équations

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}&\lambda_1\frac{\partial^{q-1}f_1}{\partial x^{q-1-s}\,\partial y^s}+\lambda_2\frac{\partial^{q-1}f_2}{\partial x^{q-1-s}\,\partial y^s}+\ldots\\&\qquad\qquad+\lambda_q\frac{\partial^{q-1}f_q}{\partial x^{q-1-s}\,\partial y^s}=0,\end{aligned}\right.$$

pour les valeurs successives de s. L'élimination des quantités λ entre ces équations fournit précisément l'équation obtenue en annulant le déterminant (21); on voit donc que les racines multiples d'ordre q des formes f annulent ce déterminant. Réciproquement, si (x_1, y_1) rend nul le covariant (21), les équations (24) ont pour $x = x_1$ et $y = y_1$ au moins une solution en λ_1, λ_2, ..., λ_q, et il existe une ou plusieurs formes f ayant (x_1, y_1) comme racine multiple d'ordre au moins égal à q.

Cela posé, toutes les formes représentées par

$$\varphi = \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \ldots + \mu_{m-q+1} \varphi_{m-q+1}$$

sont apolaires par rapport à toutes les formes f, et ce sont les seules; or nous avons démontré (n° 6) que si une forme f contient $(xy_1 - yx_1)^q$ en facteurs, toute forme φ contenant $(xy_1 - yx_1)^{m-q+1}$ en facteur est apolaire par rapport à la première f; par suite on doit trouver parmi les formes φ renfermées dans la formule précédente une forme au moins ayant (x_1, y_1) comme racine multiple d'ordre $m - q + 1$.

Comme les racines multiples d'ordre $m - q + 1$ que peuvent présenter les formes φ annulent le déterminant (23), d'après un raisonnement analogue au précédent on voit que toutes les racines de (21) doivent annuler (23); la réciproque est évidente d'après la réciprocité qui existe entre les systèmes f et φ. Si les racines (x_1, y_1), en nombre $q(m - q + 1)$, sont toutes simples, l'identité des déterminants (21) et (23) à un facteur près se trouve par cela même démontrée. Nous n'insisterons pas sur le cas où deux ou plusieurs racines (x_1, y_1) sont égales, et nous admettrons que la proposition est générale; le raisonnement du numéro précédent s'applique du reste à tous les cas.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Étant données q formes binaires d'ordre m, linéai-

rement indépendantes : $f_1, f_2, \ldots, f_q$ $(q \leqq m)$, *parmi les combinaisons linéaires de ces formes, telles que*

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_q f_q,$$

il existe en général $q(m - q + 1)$ *formes qui possèdent une racine multiple d'ordre* q; *les systèmes de valeurs* (x, y) *qui sont les racines d'ordre* q *de ces formes s'obtiennent en annulant le déterminant fonctionnel* (21) *et sont les racines de l'équation ainsi formée.*

Il existe $m - q + 1$ *formes linéairement indépendantes d'ordre* m, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-q+1}$, *apolaires par rapport aux formes* f; *parmi les combinaisons linéaires de ces formes, telles que*

$$\varphi = \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \ldots + \mu_{m-q+1} \varphi_{m-q+1},$$

il y a le même nombre $q(m - q + 1)$ *de formes possédant une racine multiple d'ordre* $m - q + 1$; *ces racines multiples s'obtiennent en annulant le déterminant* (23) *et sont les mêmes que les précédentes.*

12. Nous allons appliquer les considérations précédentes à la réduction simultanée des formes f et φ à une forme canonique; nous nous limiterons au cas général, où les coefficients des formes f ne sont soumis à aucune restriction particulière.

Désignons par q' le nombre $m - q + 1$, par ν le degré $qq' = q(m - q + 1)$ des déterminants (21) ou (23) et par (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_ν, y_ν) leurs racines, qui sont les mêmes comme nous l'avons vu; à l'une quelconque d'entre elles, telle que (x_i, y_i), correspondent des systèmes de nombres λ_r^i et μ_s^i tels que les formes $\Sigma\lambda_r^i f_r$ et $\Sigma\mu_s^i \varphi_s$ aient comme racine (x_i, y_i), la première avec l'ordre q, la deuxième avec l'ordre $q' = m - q + 1$ de multiplicité; nous aurons donc des identités de la forme

$$\lambda_1^i f_1 + \lambda_2^i f_2 + \ldots + \lambda_q^i f_q = (xy_i - yx_i)^q g_i,$$
$$\mu_1^i \varphi_1 + \mu_2^i \varphi_2 + \ldots + \mu_{q'}^i \varphi_{q'} = (xy_i - yx_i)^{q'} \psi_i,$$

i variant de 1 à ν, g_i et ψ_i étant des formes d'ordres respectifs $m - q$ et $m - q' = q - 1$.

Nous déduirons de là, pour les formes f et φ, des expressions telles que

$$\begin{aligned} f_r = (xy_1 - yx_1)^q h_{r1} + (xy_2 - yx_2)^q h_{r2} + \ldots \\ + (xy_q - yx_q)^q h_{rq}, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \varphi_s = (xy_1 - yx_1)^{q'} \chi_{s1} + (xy_2 - yx_2)^{q'} \chi_{s2} + \ldots \\ + (xy_{q'} - yx_{q'})^{q'} \chi_{sq'}; \end{aligned}$$

les quantités h et χ étant des formes d'ordres respectivement égaux à $m - q$ et $m - q'$; dans chaque groupe de formes, nous pourrons remplacer les racines qui interviennent dans les parenthèses par d'autres racines des déterminants (21) ou (23); nous aurons ainsi, lorsque q est différent de 1 ou de m, plusieurs réductions possibles analogues à la précédente.

Par exemple, étant données deux formes cubiques f_1 et f_2, on a $m = 3$, $q = 2$, $q' = 2$; parmi les combinaisons linéaires telles que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ on peut trouver quatre formes ayant une racine double, ainsi que parmi les combinaisons linéaires telles que $\mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2$ des formes cubiques apolaires par rapport aux premières; les racines doubles des premières ainsi que celles des secondes formes sont les racines du jacobien de f_1 et de f_2.

13. Nous avons peu de chose à ajouter en ce qui concerne la *généralisation* des théories précédentes au cas où les formes φ apolaires aux q formes f d'ordre m sont d'ordre p inférieur à m; nous remarquons, d'après les équations (4), que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme φ d'ordre p soit apolaire par rapport à une forme f d'ordre $m > p$, est qu'elle soit apolaire par rapport aux $m - p + 1$ dérivées

$$\frac{\partial^{m-p} f}{\partial x^{m-p}}, \quad \frac{\partial^{m-p} f}{\partial x^{m-p-1}\,\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-p} f}{\partial y^{m-p}};$$

les formes φ apolaires aux q formes f doivent donc satisfaire à $(m - p + 1)q$ conditions, et comme elles renferment $p + 1$ coefficients d'une manière homogène, on voit que les formes φ répondant à la question dépendent de

$$q' = p + 1 - q(m - p + 1)$$

paramètres homogènes; ce nombre q' doit être égal ou supérieur à 1, ou bien p doit être égal ou supérieur à $\dfrac{q(m+1)}{q+1}$, pour que le problème soit possible dans le cas général; si q' est nul ou négatif, le problème n'est possible que si les formes f sont soumises à certaines restrictions qu'il serait facile de former.

Par exemple il existe une forme φ d'ordre 4 apolaire par rapport à deux formes d'ordre 5

$$f_1 = a_0 x^5 + 5 a_1 x^4 y + \ldots + a_5 y^5,$$
$$f_2 = b_0 x^5 + 5 b_1 x^4 y + \ldots + b_5 y^5;$$

c'est

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ y^4 & -xy^3 & x^2y^2 & -x^3y & x^4 \end{vmatrix}.$$

Si (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_4, y_4) sont les quatre racines de φ, les deux formes f_1 et f_2 sont réductibles simultanément à la somme de quatre puissances cinquièmes, telles que

$$f_1 = A_1(xy_1 - yx_1)^5 + \ldots + A_4(xy_4 - yx_4)^5,$$
$$f_2 = B_1(xy_1 - yx_1)^5 + \ldots + B_4(xy_4 - yx_4)^5;$$

lorsque φ a des racines multiples, les considérations du n° 5 s'appliquent à chacune des formes f.

[O2e]

SUR LES TRANSFORMATIONS POLAIRES DE LA COURBURE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Nous appelons *transformations polaires des courbes planes* toutes celles qui utilisent un pôle fixe O dans le plan.

Si l'on veut, pour une telle transformation, étudier la relation qui lie les rayons de courbure en deux points correspondants, on est tout naturellement amené à se servir des coordonnées polaires en prenant le pôle O pour origine. La question revient alors à un simple changement de variables; mais ce changement de variables, étendu à des dérivées du second ordre, comporte, en général, des calculs assez compliqués et qui ne sont pas toujours d'une traduction géométrique immédiate. Voici quelques formules qui permettent dans bien des cas d'y introduire une notable simplification.

Appelons ρ et ω les coordonnées polaires d'un point courant M, ν et θ les angles que la tangente en M fait respectivement avec le rayon vecteur OM et l'axe polaire Ox, s l'arc, N et n la normale et la sous-normale polaire, R le rayon de courbure, enfin γ le rapport $\frac{c\mathrm{O}}{c\mathrm{M}}$, pris avec son signe, dans lequel la projection c sur OM du centre de courbure, répondant au point M, divise ce rayon vecteur.

On connaît les formules fondamentales

$$(1) \qquad d\rho = \rho \cot v . d\omega,$$

et

$$(2) \qquad d\rho = \cos v . ds,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$(3) \qquad ds = \rho \sin v . d\omega.$$

Les formules (1) et (3) peuvent d'ailleurs s'écrire

$$(1') \qquad d\rho = n . d\omega,$$

et

$$(3') \qquad ds = \mathrm{N}\, d\omega.$$

Remplaçant ds par sa valeur en fonction de $d\theta$, on a, en retranchant de part et d'autre la quantité $\mathrm{R}\, d\omega$,

$$\mathrm{R}(d\theta - d\omega) = (\mathrm{N} - \mathrm{R})\, d\omega$$

ou

$$\mathrm{R}\, dv = (\mathrm{N} - \mathrm{R})\, d\omega,$$

qu'on peut écrire, comme on le voit, en se reportant à la définition de γ donnée ci-dessus,

$$(4) \qquad dv = - \gamma\, d\omega.$$

Il est aisé d'apercevoir que cette formule (4) permet de trouver la relation entre les rayons de courbure dans une transformation polaire.

En effet, en différentiant les deux équations qui lient ρ et ω à ρ' et ω' on obtient deux équations dans lesquelles la formule (1) permet de ne conserver que $d\omega$ et $d\omega'$, et comme ces équations sont homogènes par rapport à ces différentielles, elles se prêtent à leur élimination, ce qui conduit à la relation entre les tangentes correspondantes.

Si l'on différentie à son tour l'équation obtenue, les formules (1) et (4) permettront encore de n'y laisser subsister que $d\omega$ et $d\omega'$, qui pourront encore être éliminés au moyen d'une des équations précédentes, et l'on aura cette fois la relation entre les centres de courbure.

Nous donnerons à titre d'application la démonstration d'un théorème que nous avons énoncé ailleurs ([1]). Il s'agit de la transformation définie par les équations

$$a^{m-1}\rho' = \rho^m, \qquad \omega' = m\omega,$$

qui pourrait être dite *transformation potentielle d'exposant m*, puisqu'elle fait correspondre au point M, dont l'affixe est $x+yi$, le point M', dont l'affixe est $\frac{(x+yi)^m}{a^{m-1}}$.

Les équations de définition différentiées donnent ici

$$a^{m-1}\,d\rho' = m\rho^{m-1}\,d\rho,$$
$$d\omega' = m\,d\omega,$$

ou, en divisant membre à membre et tenant compte de (1),

$$a^{m-1}\rho'\cot v' = \rho^m \cot v,$$

c'est-à-dire

$$\cot v' = \cot v.$$

On trouve ainsi que *la transformation conserve les angles*, propriété bien connue remarquée d'abord par W. Roberts et qui n'est qu'un cas particulier du célèbre théorème de Riemann, puisque la fonction $(x+yi)^m$ est monogène. Les angles v' et v étant égaux, nous avons maintenant

$$dv' = dv,$$

([1]) *Bull. de la Soc. Math. de France*, t. XVIII, p. 108; 1890.

ou, en vertu de (4),

$$\gamma' d\omega' = \gamma \, d\omega,$$

c'est-à-dire

$$m\gamma' = \gamma.$$

Si nous appelons P le point où la droite MM', qui joint les deux points correspondants, est coupée par la droite qui joint les projections c et c' des centres de courbure répondant à M et M' respectivement sur les vecteurs OM et OM', nous voyons, d'après le théorème des transversales, que

$$\frac{PM'}{PM} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Donc, d'après la dernière formule écrite, on a

$$\frac{PM'}{PM} = m,$$

ce qui constitue le théorème en question.

Supposons, par exemple, que la courbe (M) soit un cercle de diamètre a passant par l'origine O et ayant son centre sur Ox. Son équation est

$$\rho = a \cos \omega,$$

et celle de sa potentielle d'exposant m

$$\rho'^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \cos \frac{\omega'}{m}.$$

Dans ce cas le point c étant le milieu de OM, on a $\gamma = -1$, et la formule précédente devient

$$\gamma' = -\frac{1}{m}.$$

Pour $m = 2$, la courbe obtenue est un limaçon de Pascal; pour $m = \frac{1}{2}$, une lemniscate de Bernoulli;

pour $m = -\frac{1}{2}$, une hyperbole équilatère. On a ainsi des déterminations très simples des centres de courbure de ces trois courbes que nous avons déjà fait connaître ailleurs.

[Q2]

SUR LES COURBES EN S_n (1) ET PARTICULIÈREMENT SUR CELLES A COURBURES CONSTANTES;

Par M. HENRI PICCIOLI.

---

1. Une courbe L en S_n étant donnée, nous appellerons $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ les surfaces à deux dimensions lieux des directions principales premières, secondes, ..., $n^{\text{ièmes}}$.

Cela posé, déplaçons-nous d'une longueur constante h_i le long de la direction principale $i^{\text{ième}}$, à partir du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de L; nous obtiendrons une nouvelle courbe que nous indiquerons par L_i. L'indice i variant de 1 jusqu'à n, nous aurons n lignes $L_1, L_2, \ldots, L_n$ et si nous considérons les angles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ qu'elles font respectivement avec les génératrices de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ on trouvera, après des calculs très simples,

$$(1) \qquad \cos\theta_p = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{h_p}{R_p}\right)^2 + \left(\frac{h_p}{R_{p-1}}\right)^2}},$$

p étant un des nombres 3, 4, 5, ..., $n-1$; tandis que

---

(1) Nous rappelons que courbe en S_n veut dire : courbe dans un espace à n dimensions.

pour p égal à 1, 2, n on a :

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\cos\theta_1 &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{h_1}{R_1}\right)^2}},\\
\cos\theta_2 &= \frac{1-\dfrac{h_2}{R_1}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{h_2}{R_1}\right)^2+\left(\dfrac{h_2}{R_2}\right)^2}},\\
\cos\theta_n &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{h_n}{R_{n-1}}\right)^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Il s'ensuit que, pour que les angles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ soient constants, il faut et il suffit que $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ soient constants, c'est-à-dire que la courbe L soit à courbures constantes.

Nous avons donc ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que, si on se déplace d'une longueur constante le long des directions principales d'une courbe, les lignes lieux des extrémités soient trajectoires isogonales des génératrices des surfaces à deux dimensions qui les contiennent, est que la courbe initiale soit à courbures constantes.

La nature des formules (1) et un examen spécial des formules (2) nous permettent d'ajouter que :

Parmi les courbes lieux des extrémités des segments constants mesurés à partir des points d'une ligne sur ses directions principales, celle qui est relative aux normales principales peut seule être trajectoire orthogonale des génératrices de la surface qui la contient.

Cela arrive lorsque le segment est égal au rayon de première courbure; alors cette trajectoire n'est autre chose que le lieu des centres de première courbure de L.

Et même on peut énoncer cette proposition :

En S_3, *si les courbes* L_1, L_3, *en deux points correspondants au même point de* L, *coupent sous le même angle (variable de point à point) les génératrices de* Σ_1, Σ_3 *respectivement, la ligne* L *est une hélice cylindrique; et réciproquement, pour toute hélice cylindrique, on peut toujours trouver deux courbes* L_1, L_3 *qui jouissent de cette propriété.*

Remarquons encore que lorsque

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_p(\theta_n, \theta_{n-1}, \ldots, \theta_{n-p})$$

sont constants, il en est de même de

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_p(R_{n-1}, R_{n-2}, \ldots, R_{n-p-1});$$

et que de la constance de $n-1$ des angles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ résulte la constance du $n^{\text{ième}}$.

2. Conservant les mêmes notations que plus haut, cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que les courbes L_1, L_2, ..., L_n soient des lignes hypersphériques. En nous référant à la courbe générique L_p dont les équations sont :

$$z_i = x_i + h_p \alpha_{pi} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ représentant un point fixe dans S_n, posons

$$\sum_1^n {}_i (y_i - x_i - h_p \alpha_{pi})^2 = R^2 \qquad (\text{R const.}).$$

En dérivant par rapport à l'arc, on trouve aisément la relation

$$\frac{dA_p}{ds} + \frac{A_1}{h_p} = 0$$

qui est aussi une condition suffisante pour que L_p soit une courbe hypersphérique.

Pour toute courbe, les quantités $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont liées par n équations du type

$$(3) \qquad \frac{dA_t}{ds} = \frac{A_{t+1}}{R_t} - \frac{A_{t-1}}{R_{t-1}},$$

tout A dont l'indice est différent de $1, 2, \ldots, n$, étant nul; mais si nous voulons, par exemple, qu'une courbe jouisse de la propriété que L_t soit hypersphérique, il suffira de garder les $t-1$ premières et les $n-t$ dernières des relations (3), et de changer la $t^{\text{ième}}$ avec la suivante

$$(4) \qquad \frac{dA_t}{ds} = \frac{A_{t+1}}{R_t} - \frac{A_{t-1}}{R_{t-1}} = -\frac{A_1}{h_t}.$$

Nous donnerons un exemple de ce qui précède en nous proposant de chercher les courbes de S_2 telles que, si l'on se déplace d'une longueur constante sur les tangentes, le lieu des extrémités soit un cercle.

Nous aurons le système d'équations

$$\frac{dA_1}{ds} = \frac{A_2}{R_1} - 1 = -\frac{A_1}{h_1}, \qquad \frac{dA_2}{ds} = -\frac{A_1}{R_1}.$$

On trouve, après des calculs tout à fait simples [1],

$$\frac{d}{ds}\left[R_1\left(1 - \frac{c}{h_1}e^{-\frac{s}{h_1}}\right)\right] + \frac{c}{R_1}e^{-\frac{s}{h_1}} = 0,$$

formule qui nous fournit l'équation intrinsèque des lignes cherchées. Pour c égal à zéro, on a un cercle.

---

[1] Cela avait été trouvé autrement par M. Pirondini dans son Travail : *Sulle linee a doppia curvatura* (*Giornale di Matematiche*, 1888). Le premier théorème du premier paragraphe de cette Note est la généralisation de celui que M. Pirondini a donné dans ce Travail.

Remarquons que les équations (4) se trouvent vérifiées quand on y fait

$$A_{2h-1} = 0, \qquad A_{2h} = \text{const.} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

$n = 2m$ étant la dimension de l'espace ambiant. Il est très facile de voir, d'après des résultats connus, que l'on a l'énoncé que voici :

Si l'on se déplace d'une longueur constante le long des directions principales d'une ligne hypersphérique à courbures constantes, on obtient une courbe hypersphérique.

3. Le théorème du premier paragraphe nous donne une propriété caractéristique des courbes à courbures constantes de S_n. Ici je me bornerai aux hélices cylindriques à courbures constantes (qui, d'après un théorème dû à M. Brunel, ne peuvent exister que dans un espace à un nombre impair de dimensions), renvoyant pour les lignes hypersphériques à courbures constantes à une Note insérée dans ce Journal ([1]).

Nous pouvons trouver une propriété des courbes à courbures constantes de S_{2p+1} en appliquant un théorème que j'ai énoncé dans la Note précitée, et qui est ainsi exprimé :

Les courbes de S_{2p+1} définies par les équations

$$(5) \qquad \frac{R_2}{R_1} = h_1, \qquad \frac{R_4}{R_3} = h_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{R_{2p}}{R_{2p-1}} = h_p,$$

les quantités h étant des constantes, sont telles que leurs directions impaires coupent sous un angle con-

---

([1]) *Sur les développantes de certaines lignes en S_n et sur une propriété caractéristique des courbes hypersphériques à courbures constantes* (*N. A.*, septembre 1900, p. 385).

stant une direction donnée, pendant que les autres lui sont perpendiculaires.

Il suffit d'y joindre la condition que les H d'indice pair soient zéro et de remarquer que de ces conditions, au nombre de p, avec les relations (5), également au nombre de p, il s'ensuit que tous les rayons de courbure sont constants, pour en déduire le théorème que voici :

Les hélices à courbures constantes de S_{2p+1} *sont caractérisées par ce fait que les directions impaires coupent sous un angle constant une direction donnée, pendant que les autres lui sont perpendiculaires et que les* $2p$ *lignes* $b_1, b_2, \ldots, b_{2p}$ *lieux des centres de première, deuxième, ...,* $2p^{\text{ième}}$ *courbure se réduisent à* p, b_1 *coïncidant avec* b_2, b_3 *avec* $b_4, \ldots, b_{2p-1}$ *avec* b_{2p}.

[K8b]

PROPRIÉTÉ DU QUADRILATÈRE INSCRIPTIBLE;

PAR M. E. LEGRAND.

Dans un polygone inscriptible quelconque il est un point jouissant de diverses propriétés intéressantes : c'est le point de coordonnées

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} x = \mathrm{R}(\cos\alpha + \cos\beta + \ldots + \cos\lambda), \\ y = \mathrm{R}(\sin\alpha + \sin\beta + \ldots + \sin\lambda), \end{cases}$$

$2\mathrm{R}$ étant le rayon du cercle circonscrit, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant les coordonnées angulaires des sommets A, B, ..., L, par rapport au centre O de ce cercle.

Si l'on examine, en particulier, le cas du quadrilatère ABCL, et que l'on transporte l'origine au point A, on reconnaît facilement les résultats suivants :

O cercle circonscrit

$$\equiv [x + R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\lambda)]^2 + [y + R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\lambda)]^2 - 4R^2 = 0,$$

point H_4 orthocentre de

$$\text{ABC} \begin{cases} x = R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \cos\lambda), \\ y = R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin\lambda) \end{cases}$$

(*symétrique de* L);

Ω_4 cercle des neuf points de

$$\text{ABC} \equiv x^2 + y^2 + 2Rx\cos\lambda + 2Ry\sin\lambda = 0$$

(*passe en* A);

Ω'_4 cercle des neuf points de

$$H_1H_2H_3 \text{ (orthocentres de BCL, CLA, LAB)} \equiv x^2 + y^2 - 2Rx\cos\lambda - 2Ry\sin\lambda = 0$$

(*symétrique de* Ω_4),

point Π_4^1 pied de la normale abaissée de L sur BC

$$\Pi_4^1 \begin{cases} x = -R[\cos\alpha + \cos(\beta + \gamma - \lambda)], \\ y = -R[\sin\alpha + \sin(\beta + \gamma - \lambda)] \end{cases}$$

$$\left(\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\frac{\alpha + \beta + \gamma - \lambda}{2}\right).$$

Expression symétrique en α, β, γ qui fait apparaître la droite de Simson, donne son équation simple, et montre que *cette* droite de Simson Σ_4 passe au point A.

Le quadrilatère des orthocentres H_1, H_2, H_3, H_4 étant symétrique du quadrilatère ABCL, par rapport au point A, *ses quatre droites de Simson se confondent respectivement avec celles de ce quadrilatère.*

Le milieu de OA *est le milieu des droites joignant* *les milieux des côtés du quadrilatère,* d'où construction simple de A.

En résumé, on reconnaît que, dans le quadrilatère inscriptible, les quatre droites de Simson passent par un même point, centre de symétrie du quadrilatère donné et du quadrilatère des orthocentres, commun aux huit cercles des neuf points de ces deux figures, et relié à la figure par une relation simple.

Si l'on passe à l'hexagone, on voit immédiatement que son point A est le point milieu des dix droites joignant deux à deux les orthocentres des vingt triangles que l'on peut former sur la figure.

Dans tous les cas, le point A est sur la droite joignant le centre du cercle circonscrit au barycentre et à une distance du premier qui est dans un rapport simple avec la distance au second.

La démonstration détaillée de tout ce qui précède se fait par les calculs ordinaires sans difficulté et par de simples transformations d'expressions trigonométriques. L'Auteur se propose de la donner ultérieurement dans les *Nouvelles Annales,* en même temps que de nouveaux développements sur la question.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1683.

(1894, p. 5*.)

On donne une ellipse de foyers F *et* F'. *Par l'un des foyers l'on mène une sécante quelconque rencontrant l'ellipse aux points* M *et* M' :

1° *Enveloppe des cercles de diamètres* MM', FM, F'M ;

2° *Soit* N *le point de concours des normales en* M *et* M'.

Lieu du point de rencontre de la sécante MFM′ *avec la parallèle au grand axe, menée par le point* N;

3° *Soit* P *le point de rencontre des tangentes à l'ellipse en* M *et* M′. *Lieu du centre de gravité du quadrilatère* MNM′F. (André Cazamian.)

SOLUTION

Par M. E.-N. Barisien.

On pourrait traiter la question en rapportant l'ellipse à son centre et à ses axes. Mais il est préférable de mettre l'origine des coordonnées au foyer F et de prendre le grand axe pour axe des x. De cette façon on pourra passer, sans nouveaux calculs, du cas de la conique à centre au cas de la parabole.

L'équation de l'ellipse en coordonnées polaires étant

$$(1)\qquad r = \frac{p}{1 - e\cos\theta},$$

dans laquelle

$$(2)\qquad p = \frac{b^2}{a}, \qquad e = \frac{c}{a},$$

l'équation (1), transformée en coordonnées rectilignes, devient

$$(3)\qquad x^2(1-e^2) + y^2 - 2epx - p^2 = 0.$$

Soient $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ les coordonnées des points M et M′, et m le coefficient angulaire de la corde MM′. Si l'on pose $m = \operatorname{tang}\theta$, on a, d'après (1),

$$(4)\qquad x_1 = \frac{p\cos\theta}{1 - e\cos\theta}, \qquad y_1 = \frac{p\sin\theta}{1 - e\cos\theta},$$

$$(5)\qquad x_2 = \frac{-p\cos\theta}{1 + e\cos\theta}, \qquad y_2 = \frac{-p\sin\theta}{1 + e\cos\theta}.$$

L'équation de MM′ étant

$$(6)\qquad y = mx,$$

on a aussi, en résolvant (3) et (6),

$$(7)\qquad x_1 + x_2 = \frac{2ep}{1 - e^2 + m^2}, \qquad x_1 x_2 = \frac{-p^2}{1 - e^2 + m^2},$$

$$(8)\qquad y_1 + y_2 = \frac{2epm}{1 - e^2 + m^2}, \qquad y_1 y_2 = \frac{-m^2p^2}{1 - e^2 + m^2}.$$

1° *Enveloppe du cercle de diamètre* MM′. — L'équation de ce cercle est

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4}$$

ou

$$(9)\qquad x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0,$$

ou encore, d'après (4) et (5),

$$(1-e^2\cos^2\theta)(x^2+y^2)-2epx\cos^2\theta-2epy\sin\theta\cos\theta-p^2=0,$$

et puisque $\tang\theta=m$, cette équation devient, en fonction du paramètre variable m,

$$\begin{aligned}&m^2(x^2+y^2-p^2)-2epy\,m\\&\quad+(1-e^2)(x^2+y^2)-2epx-p^2=0.\end{aligned}$$

Comme m entre au second degré, l'enveloppe du cercle est immédiatement

$$(10)\qquad (x^2+y^2-p^2)[(1-e^2)(x^2+y^2)-2epx-p^2]-e^2p^2y^2=0.$$

A première vue, ce lieu semble être une quartique : mais, avec un peu d'attention, on voit que l'équation (10) se décompose en les deux facteurs du second degré

$$\begin{aligned}&[(1-e)(x^2+y^2)-epx-p^2]\\&\quad\times[(1+e)(x^2+y^2)-epx-p^2]=0.\end{aligned}$$

Le lieu se compose donc des deux cercles dont les équations sont

$$(11)\qquad (1-e)(x^2+y^2)-epx-p^2=0,$$

$$(12)\qquad (1+e)(x^2+y^2)-epx-p^2=0.$$

Si A est l'abscisse du centre de (11) et R son rayon; si A′ est l'abscisse du centre du cercle (12) et R′ son rayon, on a

$$(13)\qquad 2\alpha=c+\frac{c^2}{a},\qquad 2\alpha'=c-\frac{c^2}{a},$$

$$(14)\qquad \mathrm{R}=\frac{(a+c)(2a-c)}{2a},\qquad \mathrm{R}'=\frac{(a-c)(2a+c)}{2a}.$$

Si donc S et S′ sont les points de rebroussement de la développée de l'ellipse, situés sur le grand axe, les centres de chacun des deux cercles sont les milieux de FS et FS′. On remarque ainsi que l'on a

$$R - R' = c.$$

Enveloppe du cercle de diamètre FM. — L'équation de ce cercle est

$$x^2 + y^2 - xx_1 - yy_1 = 0,$$

ou, d'après (4),

$$(1 - e\cos\theta)(x^2 + y^2) - px\cos\theta - py\sin\theta = 0,$$

ou encore

$$[e(x^2 + y^2) + px]\cos\theta + py\sin\theta = x^2 + y^2.$$

Ce cercle enveloppe donne la courbe d'équation

$$[e(x^2 + y^2) + px]^2 + p^2y^2 = (x^2 + y^2)^2,$$

laquelle développée s'écrit

$$(x^2 + y^2)[(1 - e^2)(x^2 + y^2) - 2epx - p^2] = 0.$$

L'enveloppe de FM est donc le cercle d'équation

$$(15) \qquad (1 - e^2)(x^2 + y^2) - 2epx - p^2 = 0.$$

D'après (2), cette équation s'écrit

$$(16) \qquad (x - c)^2 + y^2 = a^2.$$

On reconnaît le cercle principal de l'ellipse.

Il est évident, d'après la symétrie, que l'enveloppe des cercles de diamètre F′M est aussi le cercle principal [1].

2° Les équations des normales en M et en M′ sont

$$(17) \qquad Xy_1 - Y[(1 - e^2)x_1 - ep] = ey_1(ex_1 + p),$$

$$(18) \qquad Xy_2 - Y[(1 - e^2)x_2 - ep] = ey_2(ex_2 + p).$$

---

[1] L'enveloppe des cercles de diamètres FM et FM′ a déjà été proposée dans ce Recueil. (Question 1620, t. X, 3e série, p. 43*; 1891.)

En tenant compte de (7) et de ce que

$$y_1 = mx_1, \qquad y_2 = mx_2,$$

on trouve pour les coordonnées (XY) de N

$$(19) \qquad X = \frac{ep(2 + m^2)}{1 - e^2 + m^2},$$

$$(20) \qquad Y = \frac{emp}{1 - e^2 + m^2}.$$

Si donc on élimine m entre (20) et

$$Y = mX,$$

on aura l'équation du lieu du point de rencontre de la corde MM' avec la parallèle au grand axe menée par le point N.

On trouve ainsi la conique d'équation

$$(21) \qquad (1 - e^2)X^2 + Y^2 - epX = 0,$$

qui est homothétique à la conique donnée.

On voit accessoirement qu'en éliminant m entre (19) et (20), on trouve pour lieu du point N la conique d'équation

$$(22) \quad (1 - e^2)X^2 + (1 + e^2)^2 Y^2 + ep(3 - e^2)X + 2e^2p^2 = 0.$$

3° On sait que le point P est à la rencontre de la directrice relative au foyer F et de la perpendiculaire à MM' élevée en F.

Si α et β sont les coordonnées du point P, on a donc

$$(23) \qquad \alpha = -\frac{p}{e},$$

$$m\beta + \alpha = 0,$$

et par suite

$$(24) \qquad \beta = \frac{p}{em}.$$

Cherchons maintenant le lieu du centre de gravité, soit du périmètre, soit de l'aire du quadrilatère MNM'P.

Centre de gravité du périmètre du quadrilatère MNM'P. — C'est alors le lieu du centre des moyennes distances des quatre points M, N, M' et P. On a pour les coordonnées de ce centre

$$4x = x_1 + x_2 + X + \alpha,$$
$$4y = y_1 + y_2 + Y + \beta,$$

et d'après (7), (8), (19), (20), (23) et (24), on a

$$(25)\qquad 4x = \frac{ep(4+m^2)}{1-c^2+m^2} - \frac{p}{e},$$

$$(26)\qquad 4y = \frac{3emp}{1-e^2+m^2} + \frac{p}{em}.$$

On a ainsi l'équation du lieu sous forme unicursale. La courbe lieu du centre de gravité est donc une courbe unicursale.

Si l'on élimine m entre les équations (25) et (26), on trouve que le lieu est la cubique d'équation

$$(27)\qquad y^2 = \frac{[3(1-e^2)x - 4ep]^2[4ex+(1-e^2)p]}{(3+e^2)^2[(5e^2-1)p - 4e(1-e^2)x]}.$$

Centre de gravité de la surface du quadrilatère MNM'P. — Si g est le centre de gravité du triangle MPM' et g' le centre de gravité du triangle MNM', on a pour les coordonnées des centres g et g'

$$(28)\qquad 3x_g = x_1 + x_2 + \alpha = \frac{2ep}{1-e^2+m^2} + \frac{p}{e},$$

$$(29)\qquad 3y_g = y_1 + y_2 + \beta = \frac{2emp}{1-e^2+m^2} + \frac{p}{em},$$

$$(30)\qquad 3x_{g'} = x_1 + x_2 + \mathrm{X} = \frac{ep(4+m^2)}{1-e^2+m^2},$$

$$(31)\qquad 3y_{g'} = y_1 + y_2 + \mathrm{Y} = \frac{3emp}{1-e^2+m^2}.$$

Or si G est le centre de gravité de la surface du quadrilatère MNM'P et si S et S' sont les aires des deux triangles MPM' et MNM', on a pour les coordonnées du point G

$$(32)\qquad (\mathrm{S}+\mathrm{S}')\mathrm{X}_\mathrm{G} = \mathrm{S}x_g + \mathrm{S}'x_{g'},$$

$$(33)\qquad (\mathrm{S}+\mathrm{S}')\mathrm{Y}_\mathrm{G} = \mathrm{S}x_\mathrm{G} + \mathrm{S}'y_{g'}.$$

Mais les deux triangles MPM' et MNM' ont même base MM' : leurs aires sont donc dans le rapport des hauteurs abaissées de P et N sur MM'. Donc

$$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'} = \frac{\beta - m\alpha}{m\mathrm{X} - \mathrm{Y}} = \frac{1-e^2+m^2}{e^2m^2}.$$

Par suite (32) et (33) deviennent, en supprimant l'indice G,

$$[(1-e^2+m^2)+e^2m^2]X=(1-e^2+m^2)x_g+e^2m^2x_{g'},$$
$$[(1+e^2+m^2)+e^2m^2]Y=(1-e^2+m^2)y_g+e^2m^2y_{g'},$$

ou, en substituant les coordonnées de g et g',

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &3X[(1-e^2)+(1+e^2)m^2]\\ &\quad=2ep-\frac{p}{e}(1-e^2+m^2)+\frac{e^3pm^2(4+m^2)}{1-e^2+m^2},\end{aligned}\right.$$

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &3Y[(1-e^2)+(1+e^2)m^2]\\ &\quad=2emp+\frac{p(1-e^2+m^2)}{em}+\frac{3e^3m^3p}{1-e^2+m^2}.\end{aligned}\right.$$

Le lieu du centre G est donc une courbe unicursale. L'élimination de m entre ces deux valeurs de X et Y ne paraît pas devoir donner un résultat simple.

Remarque. — On peut encore observer que le *lieu du centre de gravité g du triangle* MPM' est la cubique d'équation

$$(36)\qquad y^2\frac{(3ex+p)[x(1-e^2)-ep]^2}{p(3e^2-1)-3e(1-e^2)x}.$$

Le lieu du centre de gravité du triangle MNM' est l'ellipse d'équation

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &9(1-e^2)x^2+(3+e^2)^2y^2\\ &\qquad\qquad -3e(5-e^2)px+4e^2p^2=0.\end{aligned}\right.$$

Cas où la conique donnée est une parabole. — On obtient immédiatement les résultats relatifs à ce cas, en faisant $e=1$ dans les résultats précédents. On trouve ainsi :

Enveloppe du cercle de diamètre MM'.

$$x+p=0\qquad \text{(directrice)},$$
$$\left(x-\frac{p}{4}\right)^2+y^2=\frac{9p^2}{16}\qquad \text{(cercle)}.$$

Enveloppe des cercles de diamètres FM et F'M.

$$2x+p=0\qquad \text{(tangente au sommet)}.$$

Lieu du point de rencontre de la sécante MFM′ *avec la parallèle au grand axe menée par* N.

$$Y^2 = pX \qquad \text{(parabole)}.$$

Lieu du point N.

$$2Y^2 - pX + p^2 = 0 \qquad \text{(parabole)}.$$

Lieu du centre de gravité du périmètre du quadrilatère MNM′P.

$$Y^2 = pX \qquad \text{(parabole)}.$$

Lieu du centre de gravité de la surface du quadrilatère MNM′P.

$$\begin{cases} X = \dfrac{p}{m^2}, \\[2mm] Y = \dfrac{p}{m}, \end{cases}$$

$$Y^2 = pX \qquad \text{(parabole)}.$$

Lieu du centre de gravité du triangle MPM′.

$$y^2 = \frac{p}{2}(3x + p) \qquad \text{(parabole)}.$$

Lieu du centre de gravité du triangle MNM′.

$$y^2 = \frac{p}{4}(3x - p) \qquad \text{(parabole)}.$$

On remarquera que, dans la parabole, l'angle MPM′ est droit : par conséquent le quadrilatère MNM′P est un rectangle. Dans ce cas, le centre de gravité du périmètre et le centre de gravité de la surface du rectangle MNM′P se confondent en un seul point, qui est le milieu de la corde MM′. Or le lieu de ce milieu est bien la parabole d'équation

$$y^2 = px.$$

Remarque. — On peut encore observer que, dans le cas d'une conique à centre, *le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* MPM′ *ou le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* MNM′ *est une cubique.*

1817.

(1899, p. 148.)

Soient K *et* H *les points d'intersection de deux cercles situés dans le même plan, dont les centres sont* C, C'; *on mène par* K *une droite mobile, et par les points où cette droite rencontre les cercles conduisons les tangentes respectives à ces courbes.*

Le lieu des points de rencontre de ces tangentes est une cardioïde. (CARDOSO-LAYNES.)

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Soient H, K, I, y les points communs à deux coniques C^2, C'^2, menons les tangentes a, a' à ces courbes en les points A, A' où elles sont coupées ultérieurement par un rayon issu du point K : les deux faisceaux de la deuxième classe $C^2(a, \ldots)$, $C'^2(a', \ldots)$ sont homographiques, car les ponctuelles du deuxième ordre $C^2(A, \ldots)$, $C'^2(A', \ldots)$ sont perspectives au faisceau (de la première classe) K; leur produit est donc une courbe du quatrième ordre (en général de la sixième classe); mais lorsque deux faisceaux de la deuxième classe, formés par les tangentes de deux coniques C^2, C'^2, sont homographiques et, en outre, les tangentes en l'un des points K commun à C^2, C'^2 forment un couple de rayons correspondants, K est un rebroussement, de la première espèce, sur le produit des deux faisceaux (théorème connu); donc, dans notre cas, la quartique lieu du point (aa') a un rebroussement en chacun des trois points H, I, y et touche les coniques données en les points où elles sont coupées par les tangentes en le point H. En prenant pour I, y les points circulaires à l'infini on obtient le théorème proposé.

Note. — La question proposée est bien connue; *voir,* par exemple, le beau travail de M. Weill : *Note sur la cardioïde et le limaçon de Pascal* (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t. XX, p. 160-171). (A. DROZ-FARNY.)

Autres solutions de MM. H. BROCARD, E. LEMOINE, CARDOSO-LAYNES, E. VALDÈS, etc.

[L[1]3]

SUR UNE DÉTERMINATION NOUVÈLE SIMPLE DE LA DIRECTION DES AXES D'UNE CONIQUE;

Par M. E. LEMOINE (1).

Lorsque l'on veut déterminer la direction des axes d'une conique donée par son équation générale en coordonées cartésiènes obliques, on est conduit à des calculs classiques mais assez compliqués et le résultat final, par exemple la valeur explicite des tangentes des angles que font les axes de la conique avec l'axe des x, contient des radicaus et manque totalement d'élégance; en outre il ne coresponꝺ, pour l'esprit, à aucune image géométrique simple. Si la conique est donée par son équation en coordonées normales raportée à un triangle de référence ABC, les calculs directs deviènent presque formidables et le résultat, inutilisable pratiquement; aussi ne les fait-on, pour ainsi dire, jamais.

Le but de la présente Note est de doner, précisément dans ce cas, une détermination imagée, simétrique, même *relativement* très simple dans sa généralité, si l'on considère que, dans le résultat, doivent figurer les six coéficients de l'équation de la conique. Les calculs, simétriques, dis-je, sont rapides, souvent imédiats.

Lemme. — *Si* M *est un point du cercle circonscrit au triangle* ABC, *les bissectrices des angles que la direction de la droite qui joint* M *à un somet fait avec la*

(1) Nous laissons à M. E. Lemoine la responsabilité de l'orthographe qu'il a adoptée.

direction du coté oposé, sont paralèles deus à deus, quel que soit le somet.

Nous n'insisterons pas sur la facile démonstration de ce téorème conu sous plusieurs formes.

Il suit de là qu'à la direction de deus droites rectangulaires corespond un point M et un seul du cercle circonscrit. La détermination de ce point *corespondant à la direction des axes d'une conique,* va nous servir à résoudre le problème.

Je dirai simplement pour abréger : point M corespondant à tèles directions.

Nous indiquons ici une marche de calcul pour ariver à l'expression des coordonées du point M. Soit

$$(1)\qquad lx^2 + my^2 + nz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

l'équation en coordonées normales de la conique (ABC triangle de référence).

Je raporte la conique à CB axe des X, CA axe des Y; j'obtiens ainsi

$$(2)\qquad AY^2 + BXY + CX^2 = 0$$

en négligeant les termes inutiles pour la détermination de la direction des axes.

Si j'apèle α l'angle que fait l'un quelconque des axes de la conique avec la direction CB de l'axe des x, j'ai par la formule classique

$$\tan g 2\alpha = \sin C \frac{2C\cos C - B}{A - B\cos C + C\cos 2C}.$$

Le coéficient angulaire des droites qui font avec CB cet angle 2α sera $\frac{2C\cos C - B}{A - 2C\cos C}$; la droite passant par C et paralèle à cète direction aura donc pour équation en coordonées cartésiènes

$$\frac{Y}{X} = \frac{2C\cos C - B}{A - 2C\cos C},$$

et en coordonées normales

$$\frac{x}{y} = \frac{2C\cos C - B}{A - 2C\cos C};$$

on en conclut que la droite menée par A et paralèle à cète direction aura pour équation

$$(3) \qquad \frac{y}{z} = \frac{c(A - 2C\cos C)}{2C(b-a)\cos C + aB - bA}.$$

Cète droite coupe le cercle circonscrit au point M corespondant aus directions des axes de la conique, puisqu'èle fait avec BC l'angle 2α et que les bissectrices des angles que fait sa direction avec la direction BC, doneront alors les angles α que les directions des axes de la conique font avec BC.

En remplaçant dans (3) A, B, C par leurs valeurs en fonction de l, m, n, f, g, h que l'on trouve dans (2), on arive finalement aus valeurs des coordonées du point M corespondant aus axes de la conique (1)

$$(4) \qquad \frac{a}{l(b^2 - c^2) + a^2(m-n) + 2gac - 2hab}, \quad \ldots,$$

c'est le résultat cherché.

Remarques. — Le point M corespondant aus axes d'une conique circonscrite $fyz + gzx + hxy = 0$ est évidament le quatrième point où èle coupe le cercle circonscrit $\frac{1}{gc - hb}$, etc.

Deus coniques concentriques, l'une inscrite, l'autre circonscrite, ont même point M corespondant à la direction de leurs axes qui est comune.

Voici quelques exemples pris sur des coniques remarquables étudiées dans la Géometrie du triangle.

1. Les coniques

$$\mathrm{H}\sum a^2x^2 \pm \mathrm{K}\sum bcyz = 0, \qquad \sum \frac{b^2+c^2}{ax} = 0, \qquad \sum \frac{\cos \mathrm{A}}{a^2x} = 0,$$

l'iperbole circonscrite qui passe par les points de Brocard $\sum \frac{a^4 - b^2c^2}{ax} = 0$, les coniques inscrites et circonscrites de Steiner, l'élipse de Lemoine

$$\sum \sqrt{ax(2b^2 + 2c^2 - a^2)} = 0,$$

qui a pour foyers le baricentre G et le point K de Lemoine, touchant BC au pied sur BC de la simédiane partant de G dans le triangle BCG, etc., la conique

$$\sum a \cos \mathrm{A}(a^2x^2 - bcyz) = 0,$$

ont pour le point M corespondant à la direction de leurs axes le point de Steiner.

2. Les coniques

$$\mathrm{H}\sum x^2 \pm \mathrm{K}\sum yz \cos \mathrm{A} = 0, \qquad \sum \sqrt{x \cos \mathrm{A}} = 0$$

qui a pour centre le point de Lemoine et touche les cotés aus pieds des hauteurs, la conique

$$\sum a\mathrm{R} \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C}(b \cos \mathrm{B} + c \cos \mathrm{C})x^2$$
$$- 2\sum \cos \mathrm{A}(a\mathrm{S} \cos \mathrm{A} + bc\mathrm{R} \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C})yz = 0$$

qui passe par les six points où les paralèles aus cotés menées par le centre du cercle ABC coupent les cotés, ont pour point M corespondant à leurs axes le point : $\frac{a}{b^2-c^2}$, etc.

Dans la plupart des cas qui se rencontrent en étudiant la Géométrie du triangle, on arive, pour ainsi dire imédiatement, sans transformations, à la détermination des coordonées de M sous une forme simple, en substituant dans les valeurs (4), ou plutôt dans l'une d'èles à cause de la simétrie, les coéficients de l'équation de la conique, mais quelquefois cependant la forme simple doit être dégagée. L'exemple le plus complexe que nous ayons rencontré, se trouve être la conique que nous venons de considérer et nous alons indiquer, pour lui, les transformations à opérer sur le résultat imédiat doné par les valeurs (4).

On trouve que le dénominateur est composé des quatre termes :

$$\begin{gathered}
a\mathrm{R}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}(b\cos\mathrm{B}+c\cos\mathrm{C})(b^2-c^2),\\
a^2[b\mathrm{R}\cos\mathrm{C}\cos\mathrm{A}(c\cos\mathrm{C}+a\cos\mathrm{A})\\
\qquad -c\mathrm{R}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}(a\cos\mathrm{A}+b\cos\mathrm{B})],\\
-2ac\cos\mathrm{B}(b\mathrm{S}\cos\mathrm{B}+ac\mathrm{R}\cos\mathrm{C}\cos\mathrm{A}),\\
2ab\cos\mathrm{C}(c\mathrm{S}\cos\mathrm{C}+ab\mathrm{R}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B});
\end{gathered}$$

le second peut s'écrire

$$a^2\cos\mathrm{A}\,.\,\mathrm{R}[bc(\cos^2\mathrm{C}-\cos^2\mathrm{B})+a\cos\mathrm{A}(b\cos\mathrm{C}-c\cos\mathrm{B})];$$

ou, en remarquant que $\cos^2\mathrm{C}-\cos^2\mathrm{B}=\frac{b^2-c^2}{4\mathrm{R}^2}$ et que $b\cos\mathrm{C}-c\cos\mathrm{B}=\frac{b^2-c^2}{a}$, il devient

$$a^2\mathrm{R}(b^2-c^2)\cos\mathrm{A}\left(\frac{bc}{4\mathrm{R}^2}+\cos\mathrm{A}\right).$$

Le troisième et le quatrième termes peuvent se grouper ainsi :

$$-2abc\,\mathrm{S}(\cos^2\mathrm{B}-\cos^2\mathrm{C})-2a^2\mathrm{R}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}(c^2-b^2),$$

de sorte que le dénominateur devient successivement

$$(b^2-c^2)\Big[a\mathrm{R}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}(b\cos\mathrm{B}+c\cos\mathrm{C})$$
$$+a^2\mathrm{R}\cos\mathrm{A}\left(\frac{bc}{4\mathrm{R}^2}+\cos\mathrm{A}\right)$$
$$+\frac{2abc\mathrm{S}}{4\mathrm{R}^2}+2a^2\mathrm{R}\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}\Big],$$

$$(b^2-c^2)\Big[a\mathrm{R}\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}\sum a\cos\mathrm{A}$$
$$+a\mathrm{R}\cos\mathrm{A}\left(\frac{abc}{4\mathrm{R}^2}+a\cos\mathrm{A}+a\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}\right)+\frac{2\mathrm{S}^2\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2}\Big],$$

et en remarquant que

$$\sum a\cos\mathrm{A}=\frac{2\mathrm{S}}{\mathrm{R}},\qquad \cos\mathrm{A}+\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}=\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}=\frac{bc}{4\mathrm{R}^2}:$$

$$2(b^2-c^2)\mathrm{S}\left(a\cos\mathrm{B}\cos\mathrm{C}+a\cos\mathrm{A}+\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}\right)$$

ou

$$2(b^2-c^2)\mathrm{S}\left(\frac{abc}{4\mathrm{R}^2}+\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}}\right)$$

ou

$$\frac{4(b^2-c^2)\mathrm{S}^2}{\mathrm{R}}.$$

Les valeurs (4) donent donc, finalement : $\frac{a}{b^2-c^2}$, etc.

Si K et G sont le point de Lemoine et le baricentre, AK, BK, CK; AG, BG, CG coupent les cotés du triangle en six points qui apartiènent à la conique $\sum x^2-\sum\frac{b^2+c^2}{bc}yz=0$ dont le centre O : $\frac{2a^2+b^2+c^2}{a}$, etc., est sur KG. On a

$$\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OK}}=-\frac{1}{3}.$$

Les axes de cète conique ont aussi pour point M le point $\frac{a}{b^2-c^2}$, etc.

Les axes de $\sum \frac{\cos A}{x} = 0$, qui a pour centre le point de Lemoine et les élipses de Cesàro qui ont pour centres le point de Lemoine et sont tèles que la some des carrés des distances de chacun de leurs points aus cotés soit constante, ont encore le point $\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc., pour point M corespondant à la direction de leurs axes.

3. *a*. Les coniques homofocales

$$\sum yz = 0 \quad \text{et} \quad \sum \sqrt{\frac{ax}{p-a}} = 0,$$

qui ont pour centres le point $p-a$, $p-b$, $p-c$;

b. La conique

$$\sum (p-a)yz = 0,$$

qui a pour centre le centre du cercle inscrit o;

c. La conique

$$\sum ax^2 - \sum (b+c)yz = 0,$$

qui passe par les milieus des cotés et par les pieds des bissectrices intérieures et a pour centre le point : $\frac{2p+a}{a}$, etc.;

d. La conique

$$\sum a(p-a)x^2 - \sum [bc + (p-b)(p-c)]yz = 0,$$

qui passe par les points où les tangentes au cercle inscrit paralèles aus cotés coupent ces cotés;

e. La conique

$$\sum a(b+c)x^2 - 2\sum (ap+bc)yz = 0,$$

qui est circonscrite à l'exagone formé par les six points où les paralèles aus cotés menées par le centre du cercle inscrit, rencontrent les cotés, ont toutes, les directions de leurs axes qui corespondent au point $\frac{1}{b-c}$, etc.

Par transformation continue en A (voir *Nouvelles Annales*, p. 20-36; 1893), on voit que :

a'. Les coniques homofocales

$$-yz+zx+xy=0, \qquad \sqrt{\frac{ax}{p}}+\sqrt{\frac{-by}{p-c}}+\sqrt{\frac{-cz}{p-b}}=0$$

qui ont pour centre le point : p, $p-c$, $p-b$;

b'. La conique

$$pyz+(p-c)zx+(p-b)xy=0,$$

qui a pour centre le centre du cercle exinscrit o_a;

c'. La conique

$$ax^2-by^2-cz^2+(b+c)yz+(a-c)zx+(a-b)xy=0,$$

qui passe par les milieus des cotés, par le pied de la bissectrice intérieure de A et par les pieds des bissectrices extérieures de B et de C et a pour centre le point : $\frac{b+c-2a}{a}$, $\frac{2b+c-a}{b}$, $\frac{b+2c-a}{c}$;

d'. La conique

$$\begin{aligned} &apx^2+b(p-c)y^2+c(p-b)z^2 \\ &\quad+[bc+(p-b)(p-c)yz] \\ &\quad+[ac+p(p-b)]zx+[ab+p(p-c)]xy=0 \end{aligned}$$

qui passe par les points où les tangentes au cercle exinscrit o_a paralèles aus cotés, coupent ces cotés;

e'. La conique

$$\begin{aligned} &a(b+c)x^2+b(a-c)y^2+c(a-b)z^2 \\ &\quad-2[a(p-a)-bc]yz \\ &\quad-2[b(p-a)+ca]zx-2[c(p-a)+ab]xy=0 \end{aligned}$$

qui est circonscrite à l'exagone formé par les six points où les paralèles aus cotés menées par le centre du cercle exinscrit o_a rencontrent les cotés ; ont toutes, les directions de leurs axes qui corespondent au point : $\frac{1}{b-c}$, $-\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$.

4. L'iperbole de Kiepert

$$\sum \frac{b^2-c^2}{ax} = 0;$$

L'iperbole équilatère

$$\sum a^2(b^2-c^2)x^2 = 0$$

qui passe par les centres des cercles tritangents, par le baricentre et a pour centre le point de Steiner ; ont pour point M corespondant à la direction de leurs axes le point de Tarry.

5. *a.* M. G. de Longchamps a le premier étudié (Congrès de Nancy, A. F. A. S., 1886) une élipse remarquable qui a pour centre le centre du cercle inscrit et passe par les pieds des bissectrices intérieures ; èle a pour équation

$$\sum (p-a)x^2 - \sum ayz = 0;$$

quand M. de Longchamps veut déterminer les directions de ses axes qui sont cèles de l'axe antiortique et de sa perpendiculaire, il y parvient d'une façon ingénieuse mais fort détournée et s'exprime ainsi : « *Cette proposition très simple ne se vérifie* DIRECTEMENT *que par des calculs très laborieux et que nous n'avons* *même pas poussés jusqu'au bout, par suite des complications qu'ils semblent présenter.* » Cependant l'équation de la conique est simple, et on peut juger de ce que serait alors la complication des calculs pour certains des cas traités plus haut ! En apliquant les valeurs (4), on trouve presque imédiatement que le point M corespondant à la direction des axes de la conique a pour coordonées : $\frac{a}{(b-c)(b+c-2a)}$, etc., c'est précisément le point M qui corespond aus directions de l'axe antiortique et de sa perpendiculaire.

Si l'on aplique la transformation continue en A, on arive imédiatement à la proposition suivante :

La conique

$$px^2-(p-c)y^2-(p-b)z^2+ayz+bzx+cxy=0$$

qui a pour centre le centre du cercle exinscrit o_a, passe par le pied de la bissectrice intérieure de A et par les pieds des bissectrices extérieures partant de B et de C, a pour point M corespondant à la direction de ses axes le point : $\frac{a}{(b-c)(b+c+2a)}$, $-\frac{b}{(c+a)(a+2b-c)}$, $\frac{c}{(a+b)(a-b+2c)}$, c'est-à-dire le point qui corespond à la direction de l'antibissectrice de A : $-x+y+z=0$ et à sa perpendiculaire.

Cète conique jouit naturèlement de toutes les propriétés énoncées par M. de Longchamps, mais modifiées suivant la loi de la transformation continue. Il y a aussi les coniques transformées en B et en C.

b. La conique inscrite

$$\sum\sqrt{x}=0,$$

tangente aus cotés aus pieds des bissectrices intérieures, a pour point M corespondant à la direction de ses axes le même point : $\frac{a}{(b-c)(b+c+2a)}$, etc.

Par transformation continue en A, on voit que la conique inscrite

$$x^2+y^2+z^2-2yz+2xz+2xy=0,$$

tangente aus cotés au pied de la bissectrice intérieure partant de A et aus pieds des bissectrices extérieures partant de B et de C, a pour point M corespondant à ces axes le point :

$$\frac{a}{(b-c)(-b-c+2a)},\quad \frac{b}{(a+c)(-c+a-2b)},$$

$$\frac{c}{(a+b)(a-b-2c)}.$$

c. Pour l'iperbole Γ_a :

$$(b^2-c^2)yz+abxz-abxy=0$$

du groupe Γ_a, Γ_b, Γ_c si souvent rencontré dans la Géométrie du triangle, le point M corespondant à la direction des axes, est le point $\cos B\cos C$, $-\cos B$, $-\cos C$ extrémité du diamètre du cercle circonscrit passant par A. Les axes font donc avec CB des angles de $45^\circ-\frac{B-C}{2}$, $135^\circ-\frac{B-C}{2}$.

d. L'élipse inscrite

$$\sum\sqrt{\frac{x}{a}}=0$$

qui a pour foyers les points de Brocard et touche les cotés aus pieds des simédianes, a pour point M corespondant à la direction de ses axes, le point :

$$\frac{a}{(a^4-b^2c^2)(b^2-c^2)},\ \text{etc.}$$

e. **La conique**

$$L(bx+ay)(cx+az)+M(cy+bz)(ay+bx) \\ +N(az+cx)(bz+cy)=0$$

a pour point M corespondant à la direction de ses axes le point : $\frac{a}{Lbc(b^2-c^2)+a^3(Mc-Nb)}$, etc.

f. **La conique**

$$ayz(-La+Mb+Nc)+bzx(La-Mb+Nc) \\ +cxy(La+Mb-Nc)=0$$

a pour point M corespondant à la direction de ses axes le point : $\frac{a}{Mb-Nc}$, etc.

Si l'on employait les coordonées baricentriques, on verrait que, à la direction des axes de la conique

$$l\alpha^2+m\beta^2+n\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta=0,$$

corespond le point M dont les coordonées baricentriques sont :

$$\frac{1}{l(b^2-c^2)+mb^2-nc^2+2gc^2-2hb^2}, \text{ etc.,}$$

ou

$$\frac{1}{b^2(l+m-2h)-c^2(l+n-2g)}, \text{ etc.}$$

6. On voit sans multiplier davantage ces exemples que la détermination de la direction des axes des coniques remarquables, revient à placer des points remarquables sur le cercle circonscrit, points qui ont, pour la plupart, été déjà étudiés dans la Géométrie du triangle et que cète détermination se présente, par la métode que nous venons d'exposer, dans des conditions de simplicité, de simétrie et d'élégance qu'èle n'avait pas jusqu'ici.

Nous profitons de l'ocasion de cète Note pour doner quelques propriétés que nous croyons nouvèles du point $\frac{1}{b-c}$, etc., et de ses transformés continus rencontrés ici come points M corespondant à la direction des axes de nombreuses coniques remarquables.

Nous apelons d, d_a, d_b, d_c les distances du centre du cercle circonscrit aux centres des cercles tritangents;

M étant un point du plan, nous convenons que AM, BM, CM auront le même signe que les coordonées normales du point M.

a. Si M est le point $\frac{1}{b-c}$, etc., on a :

$$MA = \frac{R}{d}(b-c).$$

b. Donc :

$$MA + MB + MC = 0.$$

c. MA, MB, MC coupent respectivement BC, CA, AB en trois points situés sur la droite $\sum x(b+c) = 0$ paralèle à l'axe antiortique et à une distance de cet axe égale à $\frac{Rr}{d}$, tiers de la distance du centre du cercle inscrit à l'axe antiortique.

La transformation continue en A montre que :

a'. Si M_a est le point $\frac{1}{b-c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$, on a

$$M_a A = \frac{R}{d_a}(b-c),$$

$$M_a B = \frac{R}{d_a}(c+a),$$

$$M_a C = -\frac{R}{d_a}(a+b).$$

b'. Donc :

$$M_a A + M_a B + M_a C = 0.$$

c'. M_aA, M_aB, M_aC coupent respectivement BC, CA, AB en trois points situés sur la droite

$$x(b+c)+y(a-c)+z(a-b)=0,$$

paralèle à l'antibissectrice $-x+y+z=0$ de A et à une distance $\frac{Rr_a}{d_a}$ de cète droite, tiers de la distance du centre du cercle exinscrit o_a à cète antibissectrice.

d. Lorsque le point M que l'on trouve par notre métode est un point déjà étudié de la Géométrie du triangle, il n'y a qu'à le construire par le moyen géométrografique, c'est-à-dire le plus simple que l'on conaisse, à le joindre à un somet du triangle et à mener les bissectrices des angles que cète droite fait avec le coté oposé au somet choisi : quand le point M n'est pas conu, on en fait l'étude et la construction par les moyens ordinaires de la Géométrie du triangle, mais nous croyons utile de faire remarquer qu'on trouve quelquefois une solution élégante par l'emploi du téorème très conu suivant :

Si une droite $Ax+By+Cz=0$ *coupe les cotés du triangle* ABC *en* A', B', C' *les courbes* $B'C'A$, $C'A'B$, $A'B'C$ *se coupent en un point* P *du cercle circonscrit dont les coordonées sont :* $\frac{a}{A(Bc-Cb)}$, $\frac{b}{B(Ca-Ac)}$, $\frac{c}{C(Ab-Ba)}$.

On identifie les coordonées du point P avec cèles du point M et l'on profite de l'indétermination du problème (puisque M apartient au cercle circonscrit) pour choisir le mieus possible cèles des valeurs de A, B, C qui donent une droite conue ou facile à construire.

7. Les exemples précédents que nous avons pris pour ainsi dire au hasard de la rencontre de coniques remar-

quables dans nos Mémoires sur la Géométrie du triangle, montrent que les points de Steiner; de Tarry; les points $\frac{a}{b^2 - c^2}$, etc.; $\frac{1}{b-c}$, etc., et ses transformés continus; le point $\frac{a}{(b-c)(b+c+2a)}$, etc., et ses transformés continus; le point $\frac{a}{(b^2-c^2)(a^4-b^2c^2)}$, etc., se rencontrent souvent parmi les points M corespondants à la direction des axes des coniques remarquables. Pour les points de Steiner et de Tarry qui ont été sufisament étudiés et pour le point $\frac{a}{(b-c)(b+c-2a)}$, etc., corespondant à la direction de l'axe antiortique et à la direction perpendiculaire laquèle (*voir* A. F. A. S., Congrès de Paris, 1900, *Suite de téorèmes et de résultats concernant la Géométrie du triangle,* A. 9) se détermine avec la plus extrême simplicité géométrografique, nous n'ajouterons rien, mais pour les points $\frac{a}{b^2-c^2}$, etc., $\frac{1}{b-c}$, etc., qui se trouvent cependant à chaque instant dans les études sur les points, droites, etc., remarquables du triangle nous croyons qu'on ne les a guère étudiés à part et nous devons indiquer quelques constructions.

a. On peut construire le point $\frac{a}{b^2-c^2}$, etc., en se servant du téorème que nous venons de doner 6. *d*., la droite à choisir est alors la droite de Lemoine $\sum \frac{x}{a} = 0$. On conduit ainsi la construction.

D'un rayon quelconque ρ je trace les trois cercles $A(\rho)$, $B(\rho)$, $C(\rho)$ $(3C_1 + 3C_3)$, puis les intersections de deus d'entre eus avec le troisième $(4R_1 + 2R_2)$ qui placent le centre O du cercle circonscrit à ABC; je trace ce cercle $(2C_1 + C_3)$; je fais du coté de AB oposé à C et en me servant des trois cercles $A(\rho)$, $B(\rho)$, $C(\rho)$

les angles $BAC_1 = ABC_1 = C(4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 2C_2)$; AC_1 et BC_1 coupent BC et CA en A′, B′; A′B′ que je ne trace pas, serait la droite de Lemoine. Je trace maintenant le cercle circonscrit au triangle A′B′C $(4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3)$, il coupe le cercle ABC au point cherché.

Op. : $(12R_1 + 6R_2 + 14C_1 + 10C_3)$;
Simplicité : 42; Exactitude : 26; 6 droites, 10 cercles.

Je pourais économiser $(C_1 + C_3)$ si je me servais de deus compas.

Cette construction est assez simple, mais ce n'est pas la construction *géométrografique* qui dérive du téorème suivant que croyons nouveau :

Si N *est le point de Tarry et* G *le baricentre, la droite* NG *coupe le cercle circonscrit au point* $\frac{a}{b^2 - c^2}$, *etc.*

Je prends dans le compas, en métant la pointe en B, la longueur $BC = a$ du plus grand coté du triangle et je trace $B(a)$ $(2C_1 + C_3)$; je trace $C(a)$, $A(a)$ $(2C_1 + 2C_3)$; puis par deus des intersections d'un de ces cercles avec les deus autres $(4R_1 + 2R_2)$, je place le centre O du cercle circonscrit et je trace ce cercle $(2C_1 + C_3)$ qui coupe en B_1, C_1 le cercle ABC; je trace B_1C_1 $(2R_1 + R_2)$ qui coupe BC en A_2; je trace AA_2 $(2R_1 + R_2)$ qui coupe le cercle ABC au point R de Steiner; je trace RO $(2R_1 + R_2)$ qui place le point N de Tarry sur le cercle circonscrit. Je place G en traçant deus médianes $(4R_1 + 2R_2)$ puisque les milieus de deus cotés ont été marqués pour placer O; je trace GN $(2R_1 + R_2)$ qui coupe le cercle ABC au point cherché.

Op. : $(16R_1 + 8R_2 + 6C_1 + 4C_3)$;
Simplicité : 34; Exactitude : 22; 8 droites, 4 cercles.

Remarque. — La droite GN est paralèle à la droite de de Longchamps $\sum a^3 x = 0$ et a pour point à l'infini $\frac{b^2 - c^2}{a}$, etc.

b. Le point $\frac{1}{b-c}$, etc., se construit facilement soit avec le téorème que nous avons doné (*voir* plus haut 6. *a.*), soit avec l'autre téorème signalé (*voir* 6. *d.*) au moyen de la droite $\sum a^2 x = 0$, soit en remarquant que le raport de ses distances à BC et à AC est $\frac{b-a}{b-c}$, ce qui done un lieu de ce point, puis prenant l'intersection de ce lieu avec le cercle ABC; mais je crois que la véritable construction géométrografique est encore à trouver et je n'ai pas analisé ces constructions.

c. Le point $\frac{a}{(b^2-c^2)(b^2c^2-a^4)}$, etc., corespondant à la direction des axes, conue *a priori*, de la conique $\sum \sqrt{\frac{x}{a}} = 0$ se construit également au moyen du téorème doné (6. *d.*) en employant la droite qui joint les points de Brocard.

[M¹3jα]

AIRE DE LA PODAIRE OBLIQUE DE LA DÉVELOPPÉE OBLIQUE DE L'ELLIPSE;

PAR M. E.-N. BARISIEN,
Commandant d'Infanterie,
en mission à Constantinople.

Le but de cette Note est de doner quelques résultats intéressants concernant l'ellipse et d'attirer l'attention sur ce que ce genre de questions doit pouvoir être généralisé, par exemple, pour les courbes à centre.

Il faut tout d'abord donner quelques définitions et notations.

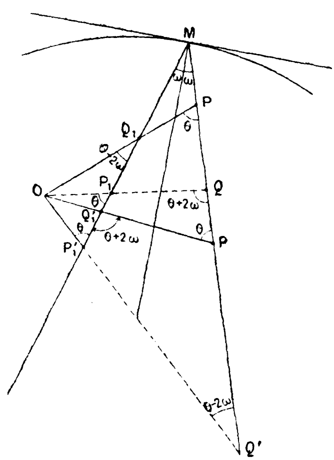
L'équation de l'ellipse est

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Nous appelons *normales obliques en un point* M les deux droites qui sont inclinées d'un angle ω sur la normale droite. Ces mêmes droites sont également des *tangentes obliques* sous l'angle $90^\circ - \omega$, et par conséquent coupent la courbe sous l'angle $90^\circ - \omega$.

Chacune de ces normales obliques a pour enveloppe une *développée oblique*.

Si, maintenant, l'on mène d'un point O des droites inclinées sur chaque normale oblique d'un angle constant θ, on aura sur l'une des normales des points P



et P', et sur l'autre des points P_1 et P'_1. Le lieu de chacun de ces points est une *podaire oblique* (*sous l'angle* θ) *des normales obliques* (*sous l'angle* ω), ou pour parler plus exactement, ces courbes sont des *podaires obliques (sous l'angle θ) des deux développées obliques (sous l'angle ω).*

Formons l'équation de l'une des normales obliques.

Si λ est le coefficient angulaire de la normale droite et μ celui d'une normale oblique, on a

$$\mu = \lambda \pm \omega.$$

Prenons la normale pour laquelle $\mu = \lambda + \omega$. L'équation de cette normale est

$$y - b\sin\varphi = \operatorname{tang}(\lambda + \omega)(x - a\cos\varphi),$$

φ étant l'anomalie excentrique du point M. Cette équation s'écrit

$$\begin{aligned} &x\sin(\lambda+\omega) - y\cos(\lambda+\omega) \\ &\quad = a\cos\varphi\sin(\lambda+\omega) - b\sin\varphi\cos(\lambda+\omega). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\lambda &= \frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}, \\ \sin\lambda &= \frac{a\sin\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}, \\ \cos\lambda &= \frac{b\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}. \end{aligned}$$

L'équation de l'une des normales obliques sous l'angle ω est donc

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &x(a\cos\omega\sin\varphi + b\sin\omega\cos\varphi) \\ &-y(b\cos\omega\cos\varphi - a\sin\omega\sin\varphi) \\ &\quad = c^2\cos\omega\sin\varphi\cos\varphi + ab\sin\omega. \end{aligned}\right.$$

L'équation de la seconde normale s'obtient en changeant ω en $-\omega$, ce qui donne

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &x(a\cos\omega\sin\varphi - b\sin\omega\cos\varphi) \\ &-y(b\cos\omega\cos\varphi + a\sin\omega\sin\varphi) \\ &\quad = c^2\cos\omega\sin\varphi\cos\varphi - ab\sin\omega. \end{aligned}\right.$$

Formons maintenant les équations des deux projetantes obliques sous l'angle θ, abaissées du point O sur la normale (1). Soient (α, β) les coordonnées du point O et ν le coefficient angulaire de l'une des projetantes. On a

$$\nu = \theta + \lambda + \omega - 180^\circ.$$

Par conséquent l'équation de l'une des projetantes sur la normale (1) est

$$y - \beta = \operatorname{tang}\nu(x - \alpha)$$

ou

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &x[b\sin(\theta+\omega)\cos\varphi + a\cos(\theta+\omega)\sin\varphi] \\ &\qquad - y[b\cos(\theta+\omega)\cos\varphi - a\sin(\theta+\omega)\sin\varphi] \\ &= \quad \alpha[b\sin(\theta+\omega)\cos\varphi + a\cos(\theta+\omega)\sin\varphi] \\ &\qquad - \beta[b\cos(\theta+\omega)\cos\varphi - a\sin(\theta+\omega)\sin\varphi]. \end{aligned}\right.$$

On a l'équation de la seconde projetante en changeant θ en $-\theta$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &x[b\sin(\omega-\theta)\cos\varphi + a\cos(\omega-\theta)\sin\varphi] \\ &\qquad - y[b\cos(\omega-\theta)\cos\varphi - a\sin(\omega-\theta)\sin\varphi] \\ &= \quad \alpha[b\sin(\omega-\theta)\cos\varphi + a\cos(\omega-\theta)\sin\varphi] \\ &\qquad - \beta[b\cos(\omega-\theta)\cos\varphi + a\sin(\omega-\theta)\sin\varphi]. \end{aligned}\right.$$

On trouve de même, pour les équations des projetantes de O sur la normale (2), en changeant ω en $-\omega$ dans les équations (3) et (4),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &x[-b\sin(\omega-\theta)\cos\varphi + a\cos(\omega-\theta)\sin\varphi] \\ &\qquad - y[b\cos\varphi\cos(\omega-\theta) + a\sin(\omega-\theta)\sin\varphi] \\ &= \alpha[-b\sin(\omega-\theta)\cos\varphi + a\cos(\omega-\theta)\sin\varphi] \\ &\qquad - \beta[b\cos\varphi\cos(\omega-\theta) + a\sin(\omega-\theta)\sin\varphi], \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &x[-b\sin(\omega+\theta)\cos\varphi + a\cos(\omega+\theta)\sin\varphi] \\ &\qquad - y[b\cos\varphi\cos(\omega+\theta) + a\sin(\omega+\theta)\sin\varphi] \\ &= \alpha[-b\sin(\omega+\theta)\cos\varphi + a\cos(\omega+\theta)\sin\varphi] \\ &\qquad - \beta[b\cos\varphi\cos(\omega+\theta) + a\sin(\omega+\theta)\sin\varphi]. \end{aligned}\right.$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour calculer l'aire de *l'une des quatre podaires obliques sous l'angle* θ *des développées obliques sous l'angle* ω.

Ce calcul étant fort long, nous nous contenterons d'en indiquer l'esprit.

Cherchons, par exemple, l'aire de la podaire dont les équations (1) et (3) fourniraient l'équation de la courbe par l'élimination de φ.

On obtiendrait l'équation de cette courbe en posant, pour abréger l'écriture, $\theta + \omega = \varepsilon$, et l'on trouverait une courbe du sixième degré.

Les quatre podaires obliques des développées obliques sont donc des sextiques.

Mais pour le calcul de l'aire, il vaut mieux se servir de la formule

$$dU = \frac{1}{2}\left(y\frac{dx}{d\varphi} - x\frac{dy}{d\varphi}\right). \tag{7}$$

En résolvant les équations (1) et (3) par rapport à x et à y, on trouve que ces coordonnées sont des fonctions rationnelles de $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, ce qui montre que les podaires sont des courbes unicursales. On trouve ainsi que le dénominateur commun de x et y est

$$(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)\sin\theta,$$

de sorte que x et y sont de la forme

$$x = \frac{F(\sin\varphi, \cos\varphi)}{\sin\theta(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)},$$

$$y = \frac{F_1(\sin\varphi, \cos\varphi)}{\sin\theta(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}.$$

On forme alors $\frac{dx}{d\varphi}$ et $\frac{dy}{d\varphi}$. On trouve alors pour dU une expression très compliquée. Mais en intégrant de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$, on voit qu'un grand nombre d'intégrales du genre de celle-ci

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2}$$

s'annulent. Et il reste

$$\begin{aligned} U = \frac{ab}{2\sin^2\theta}\Bigg[& c^4 \cos^2\omega \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} \\ & + a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\omega \frac{d\varphi}{(a^2 \sin^2 + b^2 \cos^2\varphi)^2} \\ & + b^2 \alpha^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} \\ & + a^2 \beta^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} \Bigg]. \end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{ab(a+b)^2},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi(a^2+b^2)}{a^3 b^3},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{ab^3}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \, d\varphi}{(a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^2} = \frac{\pi}{a^3 b}.$$

U devient donc

$$U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}\left[(a-b)^2 \cos^2\omega + (a^2+b^2)\sin^2\omega + \alpha^2 + \beta^2\right]$$

ou

$$(8) \qquad U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2ab\cos^2\omega).$$

Comme cette formule ne change pas en changeant θ en $-\theta$ et ω en $-\omega$, il en résulte que l'aire des quatre podaires obliques des développées obliques est la même pour un même point (α, β).

On voit, d'autre part, que le lieu des points (α, β) tels que l'aire (8) soit constante, est un cercle concentrique à l'ellipse.

En d'autres termes, on a la propriété suivante :

Si, d'un point quelconque d'un cercle fixe concentrique à une ellipse, on construit les podaires (sous l'angle θ*) des développées obliques (sous l'angle* θ*), toutes ces podaires ont une aire constante égale à*

$$U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a^2 + b^2 + R^2 - 2ab\cos^2\omega),$$

R *étant le rayon du cercle fixe.*

Cette propriété, qui est déjà connue lorsque la podaire est droite et la développée est droite (c'est-à-dire lorsque $\theta = 90^\circ$ et $\omega = 90^\circ$), est donc tout à fait généralisée.

La formule (8) donne donc l'aire commune aux courbes lieux des quatre points P, P', P_1, P'_1.

Mais les droites OP_1 et OP'_1 rencontrent la droite MPP' en Q et Q' : les droites OP et OP' rencontrent la droite $MP_1P'_1$ en Q_1 et Q'_1. Or la droite OQ rencontre PP' sous l'angle $(\theta + 2\omega)$. De même, la droite OQ'_1 rencontre $P_1P'_1$ sous le même angle $(\theta + 2\omega)$. De même, les droites OQ_1 et OQ' sont aussi *anti-parallèles* par rapport aux droites PP' et $P_1P'_1$, et coupent, l'une $P_1P'_1$, l'autre PP', sous l'angle $(\theta - 2\omega)$.

Il en résulte donc immédiatement que les courbes lieux des points Q et Q'_1, en substituant dans la formule (8) $\theta + 2\omega$ à θ, ont pour aire commune

$$(9)\qquad V = \frac{\pi}{2\sin^2(\theta + 2\omega)}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2ab\cos^2\omega).$$

De même les courbes lieux des points Q' et Q_1 ont pour aire

$$(10)\qquad W = \frac{\pi}{2\sin^2(\theta - 2\omega)}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2ab\cos^2\omega).$$

On a aussi la relation

$$(11)\qquad U\sin^2\theta = V\sin^2(\theta + 2\omega) = W\sin^2(\theta - 2\omega).$$

En résumé, sur les huit courbes lieux des points P, P', P_1, P'_1, Q, Q', Q_1, Q'_1, quatre ont pour aire (8), deux ont pour aire (9) et les deux autres ont pour aire (10).

Lorsque la podaire est droite et la développée est droite, ces huit points se confondent en un seul.

Il y a donc intérêt à envisager divers cas particuliers.

I. *Podaire oblique par rapport au point* (α, β) *de la développée oblique.* — Formules générales (8), (9), (10).

Si (α, β) est au centre de l'ellipse,

$$(12)\qquad U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a^2 + b^2 - 2ab\cos^2\omega),$$

$$(13)\qquad V = \frac{\pi}{2\sin^2(\theta + 2\omega)}(a^2 + b^2 - 2ab\cos^2\omega),$$

$$(14)\qquad W = \frac{\pi}{2\sin^2(\theta - 2\omega)}(a^2 + b^2 - 2ab\cos^2\omega).$$

II. *Podaire droite par rapport au point* (α, β) *de la développée oblique* : $\theta = 90°$.

$$(15)\qquad U = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2ab\cos^2\omega),$$

$$(16)\qquad V = W = \frac{\pi}{2\cos^2 2\omega}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2ab\cos^2\omega).$$

Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$,

$$(17)\qquad U = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 - 2ab\cos^2\omega),$$

$$(18)\qquad V = W = \frac{\pi}{2\cos^2 2\omega}(a^2 + b^2 - 2ab\cos^2\omega).$$

III. *Podaire oblique par rapport au point* (α, β) *de la développée droite :* $\omega = 0$.

$$U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}[(a-b)^2 + \alpha^2 + \beta^2] = V = W. \tag{19}$$

Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$,

$$U = V = W = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a-b)^2. \tag{20}$$

IV. *Podaire droite par rapport au point* (α, β) *de la développée droite :* $\omega = 0$.

$$U = V = W = \frac{\pi}{2}[(a-b)^2 + \alpha^2 + \beta^2]. \tag{21}$$

Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$,

$$U = V = W = \frac{\pi}{2}(a-b)^2. \tag{22}$$

V. Lorsque $\omega = 90^\circ$, la développée oblique devient l'ellipse.

Par conséquent, la *podaire oblique de l'ellipse par rapport au point* (α, β) a pour aire

$$U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2), \tag{23}$$

et sa podaire droite

$$U = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2). \tag{24}$$

Lorsque le point (α, β) est le centre de l'ellipse, on trouve pour la *podaire oblique* du centre de l'ellipse

$$U = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a^2 + b^2), \tag{25}$$

et pour sa podaire droite

$$U = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2). \tag{26}$$

Voici encore quelques propriétés relatives à ces aires :

1° Si l'on considère l'aire (8) de la podaire oblique de la développée oblique sous l'angle ω et l'aire suivante de la podaire oblique de la développée oblique sous l'angle perpendiculaire au premier, $90° + \omega$,

$$(27) \qquad U_1 = \frac{\pi}{2\sin^2\theta}(a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2ab\sin^2\omega),$$

on en déduit

$$(28) \qquad U_1 - U = \frac{\pi ab\cos 2\omega}{\sin^2\theta}.$$

Donc, *quel que soit le point* (α, β), *la différence des aires* $U_1 - U$ *est constante.*

Lorsque la podaire et la développée sont droites,

$$(29) \qquad U_1 - U = \pi ab,$$

et, quel que soit (α, β), la différence $U_1 - U$ est égale à l'aire de l'ellipse.

2° La formule générale (8) de l'aire peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$\sin^2\theta \times U = \left[\frac{\pi}{2}(a - b)^2 + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]\cos^2\omega + \left[\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) + \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]\sin^2\omega.$$

Or, si nous désignons par P_E la podaire du centre de l'ellipse, par P_D la podaire du centre de sa développée et par Σ la demi-aire du cercle ayant pour rayon la distance de O au centre de l'ellipse, cette expression devient

$$(30) \qquad U = \frac{1}{\sin^2\theta}(P_E\sin^2\omega + P_D\cos^2\omega + \Sigma),$$

car

$$P_E = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2), \qquad P_D = \frac{\pi}{2}(a - b)^2, \qquad \Sigma = \frac{\pi}{2}(\alpha^2 + \beta^2).$$

3° On trouve pour l'équation de la podaire droite de la développée oblique, par rapport au centre de l'ellipse,

$$(31)\quad \begin{cases} (x^2+y^2)^2[\quad (b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega)x^2 \\ \qquad\qquad + (b^2\sin^2\omega + a^2\cos^2\omega)y^2 \\ \qquad\qquad\qquad - 2c^2xy\sin\omega\cos\omega] \\ \quad = [(a^2x^2+b^2y^2)\sin\omega - c^2xy\cos\omega]^2. \end{cases}$$

Cette courbe est en général une sextique et a pour aire l'expression (17).

Lorsque $\omega = 0$, on retrouve l'équation connue de la podaire du centre de la développée

$$(32)\qquad (b^2x^2+a^2y^2)(x^2+y^2)^2 = c^4x^2y^2.$$

Pour $\omega = 90°$, on a la podaire du centre de l'ellipse, c'est-à-dire la quartique

$$(33)\qquad (x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2.$$

4° *Aire d'une développée oblique de l'ellipse.* — Considérons la développée oblique qui est l'enveloppe de la droite (1). Si l'on prend la dérivée de l'équation (1) par rapport à φ et si l'on résout ces deux équations par rapport à x et y, on trouve pour les coordonnées d'un point de la développée oblique

$$\begin{aligned} x &= \sin\omega(b\cos\omega\sin\varphi + a\sin\omega\cos\varphi) \\ &\quad + \frac{c^2}{ab}\cos\omega(b\cos\omega\cos^3\varphi + a\sin\omega\sin^3\varphi), \\ y &= \sin\omega(b\sin\omega\sin\varphi - a\cos\omega\cos\varphi) \\ &\quad + \frac{c^2}{ab}\cos\omega(b\sin\omega\cos^3\varphi - a\cos\omega\sin^3\varphi). \end{aligned}$$

Ce point qui est le *centre de courbure oblique* s'obtient d'ailleurs par une propriété connue, en projetant le centre de courbure en M relatif à la normale droite, sur la normale oblique. De sorte que si R' est le rayon de courbure oblique et R le rayon de courbure droit, on a

$$R' = R \cos \omega.$$

L'aire A s'obtient au moyen de la formule

$$dA = \frac{1}{2}\left(y\frac{dx}{d\varphi} - x\frac{dy}{d\varphi}\right).$$

On trouve, par un calcul facile, en intégrant de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$:

$$A = \pi ab \sin^2 \omega - \frac{3\pi c^4}{8ab}\cos^2 \omega. \tag{34}$$

Telle est l'aire de la développée oblique. On voit que la développée oblique, enveloppe de la normale (2), a même aire (34). Si l'on pose

$$E = \pi ab, \qquad D = \frac{3\pi c^4}{8ab},$$

E et D étant les aires de l'ellipse et de sa développée, l'aire de la développée oblique sous l'angle ω prend la forme remarquable suivante :

$$A = E \sin^2 \omega - D \cos^2 \omega. \tag{35}$$

Cette formule est à rapprocher de celle qui donne l'aire de la podaire droite du centre de la développée oblique

$$U = P_E \sin^2 \omega + P_D \cos^2 \omega. \tag{36}$$

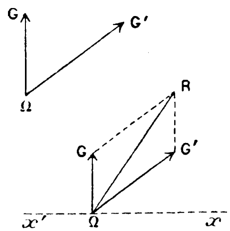
[R3]

REMARQUES AU SUJET DES DROITES DE NUL MOMENT;

PAR UN ANONYME.

I. Considérons un système (S) de forces appliquées à un solide. Ces forces peuvent être décomposées en une infinité d'autres, à l'aide des règles bien connues.

Soit (D) une de ces décompositions, et imaginons que l'on distingue dans le système (D) deux groupes (G) et (G′) de forces. Au groupe (G) on peut faire corres-



pondre un complexe (c) lieu des droites de nul moment relatives à (G). De même, au groupe (G′) on peut faire correspondre un complexe (c').

D'ailleurs, soient ΩG et $\Omega G'$ les axes des couples résultants de (c) et de (c') pour un point Ω de l'espace.

Par le point Ω passe un plan du complexe (c) et un plan du complexe (c'). Ces plans se coupent suivant une droite $x'x$ perpendiculaire à ΩG et à $\Omega G'$ et, par suite, à ΩR, axe du couple résultant du système primitif.

II. On peut faire une infinité de décompositions de forces telles que (D) et, chaque fois, considérer un ensemble de deux groupes arbitraires tels que (G) et (G′). On obtient ainsi, en considérant le même point Ω de l'espace, un faisceau de droites $x'x$ contenues dans un même plan, puisque ce plan est précisément le plan du complexe (c) qu'on obtiendrait en cherchant directement les droites de nul moment du système primitif.

On peut en déduire immédiatement que le lieu de la congruence (γ) commune à deux quelconques des complexes précédemment définis est le complexe (c).

III. En particulier, si p systèmes de forces sont équivalents, le lieu des congruences (γ), obtenues par la considération de deux groupements quelconques des forces de l'un des p systèmes, est un complexe linéaire, ...

IV. Ces remarques donnent la solution de la question suivante :

On considère deux complexes c et c' et la congruence (γ) correspondante. Trouver la loi la plus générale liant (c) et (c') en sorte que le lieu de (γ) soit un troisième complexe (c).

[B12c]

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE GRASSMANN A UNE DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE;

PAR UN ANONYME.

La méthode de Grassmann conduit très aisément aux théorèmes suivants démontrés par M. C. Lamioni dans le numéro de décembre des *Nouvelles Annales* :

1° *Si une ligne de courbure est géodésique elle est plane;*

2° *Chaque ligne géodésique plane est de courbure.*

Un point P fonction de deux variables indépendantes u et v appartient à une surface; u et v étant exprimées en fonction d'un paramètre, la variation de ce paramètre entraîne le déplacement de P le long d'une courbe de la surface.

Soient : T le vecteur unité parallèle à la tangente à cette courbe, N la normale principale, B la binormale; soit enfin n le vecteur unité normal à la surface en P.

La condition qui exprime que P décrit une ligne géodésique est la suivante ([1]) :

$$(1) \qquad n\mathrm{NT} = 0,$$

en prenant comme paramètre la longueur de l'arc décrit et dérivant il vient

$$\frac{dn}{ds}\mathrm{NT} + n\frac{d\mathrm{N}}{ds}\mathrm{T} + n\mathrm{N}\frac{d\mathrm{T}}{ds} = 0,$$

ou en tenant compte des formules de Frenet :

$$(2) \qquad \frac{dn}{ds}\mathrm{NT} + \frac{1}{\tau}n\mathrm{TB} = 0.$$

Supposons que cette ligne géodésique soit de courbure, nous aurons comme condition :

$$(3) \qquad n\frac{dn}{ds}\mathrm{T} = 0;$$

mais la relation (1), qui exprime que n, N et T sont complanaires, peut se mettre sous la forme

$$n = \alpha\mathrm{N} + \beta\mathrm{T},$$

par suite (3) devient

$$\frac{dn}{ds}\mathrm{NT} = 0,$$

et comparée à (2) donne finalement

$$\frac{1}{\tau}n\mathrm{TB} = 0, \qquad \frac{1}{\tau} = 0,$$

car nTB est forcément différent de zéro. La ligne proposée est donc bien plane.

([1]) *Voir* Henri Fehr, *Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la Géométrie infinitésimale* (Thèse).

Inversement supposons que la ligne géodésique soit plane; on a successivement

$$\frac{dn}{ds}\,\mathrm{NT} = 0,$$

$$\mathrm{N} = \alpha\frac{dn}{ds} + \beta\mathrm{T},$$

$$n\,\mathrm{NT} = \alpha\frac{dn}{ds}\,n\,\mathrm{T} = 0,$$

$$n\,\frac{dn}{ds}\,\mathrm{T} = 0,$$

qui exprime qu'elle est de courbure.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1900). SOLUTION ANALYTIQUE ET GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

1° L'équation du cône C est

$$\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}yz = 0.$$

En désignant par α, β, γ les paramètres directeurs de la droite D et par x_1 l'abscisse de son point de rencontre avec OX, les équations de D sont

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \rho.$$

L'équation d'une surface S tangente au cône C en tous les points d'une courbe plane est de la forme

$$\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}yz + \lambda(ux + vy + wz + h)^2 = 0.$$

La droite D devant être située sur S, l'équation suivante en ρ doit être identique

$$A(x_1+\alpha\rho)^2+2B\beta\gamma\rho^2+\lambda[ux_1+h+\rho(u\alpha+v\beta+w\gamma)]^2=0.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&A\alpha^2+2B\beta\gamma+\lambda(u\alpha+v\beta+w\gamma)^2 = 0,\\
&A\alpha x_1+\lambda(ux_1+h)(u\alpha+v\beta+w\gamma) = 0,\\
&Ax_1^2+\lambda(ux_1+h)^2=0.
\end{aligned}$$

Ces trois relations s'écrivent

$$\frac{A\alpha^2+2B\beta\gamma}{A\alpha x_1}=\frac{u\alpha+v\beta+w\gamma}{ux_1+h}=\frac{\alpha}{x_1}, \qquad \lambda=\frac{-Ax_1^2}{(ux_1+h)^2}.$$

Les deux premières simplifiées sont

$$2B\beta\gamma=0. \tag{1}$$

$$x_1(v\beta+w\gamma)-\alpha h=0. \tag{2}$$

La relation (1) signifie que la droite D doit être, soit dans le plan xOy pour $\gamma=0$, soit dans xOz pour $\beta=0$, c'est-à-dire, dans l'un ou l'autre cas, *tangente au cône*.

La relation (2) exprime que la droite D perce le plan $x=0$ sur la droite d'intersection $x=0$, $vy+wz+h=0$ du plan yOz et du plan de la conique de raccordement de S et de C. Dans le cas où la droite D est dans le plan xOy elle rencontrera donc Oy en un point I appartenant à cette conique.

2° Supposons $\gamma=0$, D est dans le plan xOy. Pour trouver le lieu géométrique des centres des surfaces S, on élimine u, v, w, λ, h entre les équations

$$v\beta x_1-\alpha h=0 \quad \text{ou} \quad \frac{v}{\alpha}=\frac{h}{\beta x_1}, \tag{2)'}$$

$$\lambda=-\frac{Ax_1^2}{(ux_1+h)^2},$$

$$Ax+\lambda uR=0, \qquad Bz+\lambda vR=0, \qquad By+\lambda wR=0,$$

en posant $R\equiv ux+vy+wz+h$.

Ces équations s'écrivent

$$\frac{Ax}{u} = \frac{Bz}{v} = \frac{By}{w} = -\lambda R = \frac{Ax_1^2(ux + vy + wz + h)}{(ux_1 + h)^2}.$$

On en déduit

$$u = v\frac{Ax}{Bz}, \qquad w = \frac{vy}{z},$$

$$ux + vy + wz + h = \frac{vAx^2}{Bz} + 2vy + h,$$

$$ux_1 + h = \frac{vAxx_1}{Bz} + h,$$

$$\frac{Bz}{v} = \frac{Ax_1^2(Avx^2 + 2Bvyz + Bhz)Bz}{(Avxx_1 + Bhz)^2}.$$

Remplaçant, dans cette équation homogène en v et h, v par α et h par βx_1, on a, après suppression du facteur $x_1^2 Bz$,

$$(A\alpha x + B\beta z)^2 = A\alpha(A\alpha x^2 + 2B\alpha yz + B\beta x_1 z).$$

Développant et supprimant le facteur Bz, on obtient

$$\text{(P)} \qquad 2A\alpha(\beta x - \alpha y) + B\beta^2 z - A\alpha\beta x_1 = 0$$

pour l'équation du plan P.

La trace du plan P sur le plan xOy, savoir

$$\beta x - \alpha y - \frac{\beta x_1}{2} = 0,$$

est une droite δ parallèle à D et équidistante de D et de O.

De plus, le plan

$$2A\alpha(\beta x - \alpha y) + B\beta^2 z = 0,$$

parallèle à P en passant par O, est tangent au cône C, comme on le vérifie aisément; de sorte que P est parallèle au deuxième plan tangent au cône C parallèle à la droite D (le premier étant xOy); le plan P est ainsi défini géométriquement.

3° Quand la droite D se déplace dans le plan xOy de façon que le plan P passe par un point donné $A(x_0, y_0, z_0)$, on a

$$(3) \qquad 2A\alpha(\beta x_0 - \alpha y_0) + B\beta^2 z_0 - A\alpha\beta x_1 = 0.$$

Les coordonnées de plan P sont

$$u = 2A\alpha\beta, \qquad v = -2A\alpha^2, \qquad w = B\beta^2, \qquad h = -A\alpha\beta x_1.$$

L'élimination de α, β donne

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{u^2}{4A^2} = -\frac{vw}{2AB}$$

ou

$$Bu^2 + 2Avw = 0;$$

c'est l'équation tangentielle du cône C de sommet O. Donc le plan P enveloppe le cône parallèle à C de sommet A. Ce résultat était évident d'après la définition géométrique de P.

La droite D du plan xOy a pour équation

$$\beta x - \alpha y - \beta x_1 = 0$$

ou, en tirant x_1 de la relation (3),

$$A\alpha(\beta x - \alpha y) - 2A\alpha(\beta x_0 - \alpha y_0) - B\beta^2 z_0 = 0.$$

Ordonnant cette équation par rapport à α, β, elle s'écrit

$$A\alpha^2(2y_0 - y) + A\alpha\beta(x - 2x_0) - B\beta^2 z_0 = 0,$$

d'où immédiatement l'équation de l'enveloppe de D

$$A^2(x - 2x_0)^2 + 4ABz_0(2y_0 - y) = 0$$

ou

$$(x - 2x_0)^2 = \frac{4Bz_0}{A}(y - 2y_0).$$

C'est l'équation d'une parabole Q passant par le point O' de coordonnées $(2x_0, 2y_0)$; la tangente en ce point est parallèle à Ox; les diamètres sont parallèles à Oy.

4° Le paramètre p de la parabole Q est donné par la formule

$$p = \pm \frac{2 B z_0}{A} \sin^2 \theta,$$

en désignant par θ l'angle des axes Ox, Oy; si p est donné, z_0 est connu et a pour valeur $\frac{pA}{2 B \sin^2 \theta}$ ou cette valeur changée de signe; le lieu de A se compose donc de deux plans parallèles au plan xOy et équidistants de ce plan.

5° Soient

$$(\pi) \qquad u_0 x + v_0 y + w_0 z + 1 = 0$$

l'équation d'un plan quelconque π et

$$A x^2 + 2 B y z + \lambda (u x + v y + w z + 1)^2 = 0$$

celle des surfaces S qui lui sont tangentes; on a vu (1°)

$$\lambda = \frac{-A x_1^2}{(u x_1 + 1)^2}, \qquad \frac{v}{\alpha} = \frac{1}{\beta x_1}.$$

J'ai supposé $h_0 = h = 1$ pour simplifier un peu les calculs.

Les coordonnées (x, y, z) du point de contact M du plan π et d'une surface S satisfont aux équations

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{A x + \lambda u R}{u_0} = \dfrac{B z + \lambda v R}{v_0} = \dfrac{B y + \lambda w R}{w_0} = \lambda R \\ (R \equiv u x + v y + w z + 1;\ u_0 x + v_0 y + w_0 z + 1 = 0). \end{array} \right.$$

On obtient un deuxième lieu de M (le premier étant le plan π) en éliminant u et w entre les équations (4) qu'on peut écrire

$$\frac{A x}{u - u_0} = \frac{B z}{v - v_0} = \frac{B y}{w - w_0} = -\lambda R.$$

D'où

$$u - u_0 = \frac{Ax}{Bz}(v - v_0),$$

$$w - w_0 = \frac{y}{z}(v - v_0),$$

$$\frac{Bz}{v - v_0} = \frac{Ax_1^2}{(ux_1 + 1)^2}(ux + vy + wz + 1)$$
$$= \frac{Ax_1^2}{(ux_1 + 1)^2}[(u - u_0)x + (v - v_0)y + (w - w_0)z]$$

ou

$$(ux_1 + 1)^2 \frac{Bz}{v - v_0} = Ax_1^2\left(\frac{Ax^2}{Bz} + 2y\right)(v - v_0)$$

ou

$$[(u - u_0)x_1 + u_0x_1 + 1]^2 B^2z^2 = Ax_1^2(Ax^2 + 2Byz)(v - v_0)^2,$$
$$[Axx_1(v - v_0) + (u_0x_1 + 1)Bz]^2 = Ax_1^2(v - v_0)^2(Ax^2 + 2Byz).$$

En développant et supprimant le facteur Bz, on obtient

$$(\pi_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2A(v - v_0)x_1[(u_0x_1 + 1)x - (v - v_0)x_1y] \\ \qquad\qquad\qquad + (u_0x_1 + 1)^2Bz = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$v = \frac{\alpha}{\beta x_1}.$$

Le lieu des points de contact $M(x, y, z)$ est donc la droite Δ définie par les équations (π) et (π_1). Le plan π_1 est celui qui passe par Δ et l'origine O. Si l'on pose

$$\frac{u_0x_1 + 1}{(v - v_0)x_1} = \rho,$$

l'équation (π_1) s'écrit

$$(\pi_1)' \qquad Bz\rho^2 + 2Ax\rho - 2Ay = 0.$$

L'enveloppe de ce plan qui passe par O est le cône

$$A^2x^2 + 2AByz = 0,$$

c'est-à-dire le cône C. Donc la droite Δ est tangente au cône C. L'équation (π_1) s'écrit encore

$$2A(v - v_0)x_1[x_1(u_0x + v_0y) + x - vx_1y] \\ + (u_0x_1 + 1)^2Bz = 0.$$

Pour tous les points de Δ, on a

$$u_0x + v_0y = -(w_0z + 1).$$

Comme $vx_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, la droite Δ est donc située dans le plan π_2 représenté par l'équation

$$2A(v - v_0)x_1\left[-x_1(w_0z + 1) + x - \frac{\alpha}{\beta}y\right] \\ + (u_0x_1 + 1)^2Bz = 0$$

ou

$$(\pi_2)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2A(v - v_0)x_1\left(x - x_1 - \frac{\alpha}{\beta}y\right) \\ \quad + [B(u_0x_1 + 1)^2 - 2Ax_1^2(v - v_0)w_0]z = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on pose

$$\mu = \frac{B(u_0x_1 + 1)^2 - 2Ax_1^2w_0(v - v_0)}{2A(v - v_0)x_1},$$

l'équation (π_2) s'écrit

$$(\pi_2)' \qquad x - x_1 - \frac{\alpha}{\beta}y + \mu z = 0.$$

Les équations de la droite D étant

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y}{\beta}, \qquad z = 0,$$

on voit que le plan π_2 contient la droite D et, par suite, la droite Δ rencontre la droite D.

Ainsi *les droites* Δ *s'appuient sur* D *et sont tangentes au cône* C.

Quand le plan π se déplace arbitrairement dans l'espace, les droites Δ, représentées par les équations (π_1)$'$ et (π_2)$'$, forment la congruence des droites s'appuyant sur D en restant tangentes au cône C; les deux paramètres arbitraires sont ρ et μ.

Les équations $(\pi_1)'$ et $(\pi_2)'$ montrent que par un point quelconque ω de l'espace il passe *deux* droites Δ qui sont d'ailleurs les tangentes, issues de ω, à la section du cône C par le plan défini par la droite D et le point ω.

Quand Δ se déplace dans un plan π' passant par D, comme Δ reste tangente au cône C, le plan π qui passe par Δ enveloppe la section du cône par le plan π'. Ce résultat est d'ailleurs facile à établir analytiquement.

Soit

$$(\pi') \qquad x - x_1 - \frac{\alpha}{\beta} y + kz = 0$$

l'équation du plan π' passant par D. D'après l'équation (π_2) on doit avoir, entre la constante k et les coordonnées u_0, v_0, w_0 du plan π, la relation

$$B(u_0 x_1 + 1)^2 - 2A x_1^2 w_0 (v - v_0) = k.2A(v = v_0)x_1$$

ou

$$B(u_0 x_1 + 1)^2 + 2A(v_0 - v)x_1(w_0 x_1 + k) = 0,$$

c'est-à-dire, en remplaçant v par $\dfrac{\alpha}{\beta x_1}$,

$$B\beta(u_0 x_1 + 1)^2 + 2A(v_0 \beta x_1 - \alpha)(w_0 x_1 + k) = 0.$$

C'est l'équation tangentielle d'une conique située dans le plan des trois points $(x_1, 0, 0)$, $\left(0, -\dfrac{\beta x_1}{\alpha}, 0\right)$, $\left(0, 0, \dfrac{x_1}{k}\right)$ appartenant au plan π', et située aussi sur le cône C, car, en annulant la variable d'homogénéité dans l'équation de cette conique, on obtient :

$$B\beta u_0^2 x_1^2 + 2A\beta x_1^2 v_0 w_0 = 0$$

ou

$$B u_0^2 + 2A v_0 w_0 = 0,$$

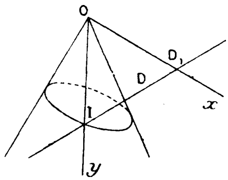
c'est-à-dire l'équation tangentielle du cône C.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Tous les résultats précédents s'obtiennent aisément par la Géométrie.

1° Le plan défini par le point O et la droite D est tangent à la surface S et par suite au cône C, de sommet O, circonscrit à cette surface (*fig.* 1); donc la droite D est

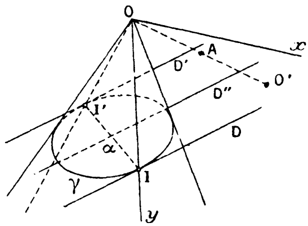
Fig. 1.



dans un plan tangent au cône C; comme elle rencontre Ox en un point D_1, elle sera dans un des plans tangents au cône C passant par la droite Ox, c'est-à-dire dans le plan xOy ou le plan xOz. Supposons la droite D située dans le plan xOy ; elle touche le cône en un certain point de Oy, soit I, qui est aussi le point de contact avec la surface S du point tangent xOy ou (O, D); donc la droite D perce le plan de raccordement de S et C sur Oy.

2° Je considère la génératrice D′ de la surface S parallèle à D (*fig.* 2); le plan (D, D′) coupe le cône C suivant une conique γ tangente en I à D et tangente aussi à D′, car le plan (O, D′) est tangent à la surface S et au cône C en un même point I′ de D′; or le plan IOI′ conjugué de D dans le cône est fixe, quand D est fixe; donc OI′ est une droite fixe. Dans le plan (D, D′) asymptote de la surface S, la droite D″, équidistante de D et D′, contient le centre de la surface S; on peut remarquer aussi que D'' contient le centre α de la conique γ, car ce centre est le milieu de II'. La droite D'' reste donc dans un plan P parallèle au plan $OI'D'$ et équidistant de ce plan et de D. La trace de P sur le plan xOy est une

Fig. 2.



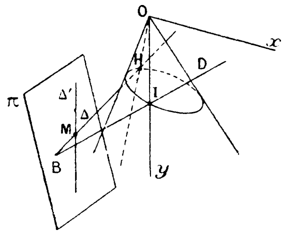
droite δ, parallèle à D et équidistante de O et de D. Ce plan P, lieu des droites D'' qui contiennent les centres des surfaces S, est aussi le lieu de ces centres ; car si l'on considère une surface S_1 se raccordant avec C le long d'une conique γ_1 passant par I et I', son centre décrit D'' quand γ_1 varie.

3° Si le plan P passe par un point donné A, il enveloppera un cône parallèle à C, de sommet A. Le plan passant par D et parallèle au plan (O, D') coupe la droite fixe OA en un point O' qui est fixe, car $AO' = OA$, de sorte que le plan (O', D) enveloppe un cône C' parallèle à C, de sommet O' ; la droite D, mobile dans le plan xOy enveloppe donc la section de ce cône C' par le plan xOy ; celui-ci étant tangent au cône C est parallèle à un plan tangent au cône C' ; donc la section est une parabole Q dont les diamètres sont parallèles à Oy.

4° Le paramètre de cette parabole ne dépend que de la distance du point O' et par suite du point A au plan xOy ; donc le paramètre restera constant quand le point A restera à une distance constante de xOy, c'est-à-dire décrira deux plans parallèles à xOy et équidistants de ce plan.

5° Soit B le point de rencontre de la droite D et du plan π (*fig.* 3); le plan π tangent à une surface S la

Fig. 3.



coupe suivant deux génératrices Δ, Δ' dont l'une Δ passe par B. Le plan (O, Δ) est tangent au cône et passe par le point B; donc il est fixe : c'est le deuxième plan tangent au cône C (le premier étant xOy) passant par B. La droite Δ étant l'intersection de deux plans fixes, π et (O, Δ), est fixe. Le point de contact M de S et π étant sur Δ, le lieu de M, quand S varie, est cette droite Δ. On voit que Δ s'appuie sur D et est tangente au cône C.

Quand le plan π se déplace arbitrairement dans l'espace, les droites Δ forment la congruence des droites qui s'appuient sur D et sont tangentes au cône.

Par un point quelconque ω de l'espace, il passe deux droites Δ qui sont les tangentes, issues de ω, à la section du cône C par le plan (ω, D).

Quand Δ se déplace dans un plan π' passant par D, comme Δ reste tangente au cône, le plan π, passant par D, enveloppe la section du cône par le plan π'.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1616.

(1891, p. 42*.)

La tangente en un point de la développée d'une conique coupe cette développée en quatre points autres que le point de contact : démontrer que les tangentes en ces points sont concourantes et se coupent sur l'ellipse ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée.

SOLUTION

Par UN ANONYME.

L'équation de la développée de la conique $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ est

$$(\Gamma)\qquad a^2v^2w^2+b^2u^2w^2-c^4u^2v^2=0.$$

Cette courbe a trois tangentes doubles : les axes de la conique et la droite de l'infini, et les deux points de contact de chacune de ces droites avec la courbe sont des points de rebroussement.

Soient u_0, v_0, w_0 les coordonnées d'une droite Δ : les tangentes aux points où Δ coupe Γ sont tangentes à la courbe

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &u_0u(b^2w^2-c^4v^2)+v_0v(a^2w^2-c^4u^2)\\ &\qquad\qquad +w_0w(a^2v^2+b^2u^2)=0.\end{aligned}\right.$$

Si nous supposons Δ tangente à Γ, et si nous désignons par A, B, C, D les tangentes à Γ, aux points où Δ coupe cette courbe, la courbe Γ et la courbe de troisième classe (1) ont les tangentes communes suivantes : A, B, C, D les axes de coordonnées, la droite de l'infini et la droite Δ, ces quatre dernières comptant deux fois. Le théorème sera démontré si nous prouvons que, dans ce cas, la courbe (1) se décompose en un point et une conique tangente aux axes, à la droite de l'infini et à Δ au point où elle touche Γ, c'est-à-dire si l'on peut déterminer α, β, γ, m, n, p, de manière que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned} &u_0 u(b^2 w^2 - c^4 v^2) + v_0 v(a^2 w^2 - c^4 u^2) + w_0 w(a^2 v^2 + b^2 u^2) \\ &\quad = (\alpha v w + \beta w u + \gamma u v)(m u + n v + p w), \end{aligned}$$

d'où

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{lll} u_0 b^2 = \beta p, & -c^4 u_0 = \gamma n, & a^2 w_0 = \alpha n, \\ v_0 a^2 = \alpha p, & -c^4 v_0 = \gamma m, & b^2 w_0 = \beta m \\ & (\alpha m + \beta n + \gamma p = 0). & \end{array} \right.$$

On déduit des six premières relations

$$(2)'\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha}{a^2 v_0 w_0} = \dfrac{\beta}{b^2 w_0 u_0} = \dfrac{\gamma}{-c^4 u_0 v_0}, \\ \dfrac{m}{v_0 w_0} = \dfrac{n}{w_0 u_0} = \dfrac{p}{u_0 v_0}. \end{array} \right.$$

Remplaçant m, n, p par les quantités proportionnelles dans la septième relation (2), nous avons

$$\alpha v_0 w_0 + \beta w_0 u_0 + \gamma u_0 v_0 = 0,$$

qui exprime que Δ est bien tangente à la conique

$$\alpha v w + \beta w u + \gamma u v = 0.$$

Le point de contact a pour coordonnées homogènes

$$\beta w_0 + \gamma v_0, \quad \gamma u_0 + \alpha w_0, \quad \alpha v_0 + \beta u_0,$$

le point de contact avec Γ a pour coordonnées

$$u_0(b^2 w_0^2 - c^4 v_0^2), \quad v_0(a^2 w_0^2 - c^4 u_0^2), \quad w_0(a^2 v_0^2 + b^2 u_0^2),$$

et ces deux points coïncident en vertu des relations (2').

Enfin, en tenant compte des mêmes relations, la dernière égalité (2) s'écrit

$$a^2 v_0^2 w_0^2 + b^2 u_0^2 w_0^2 - c^4 u_0^2 v_0^2 = 0,$$

qui exprime précisément que Δ est tangente à Γ; la première partie du théorème est démontrée.

Soit M le point de concours des tangentes en A, B, C, D, à la développée; les coordonnées homogènes de ce point étant m, n, p, qui sont proportionnelles à $v_0 w_0$, $w_0 u_0$, $u_0 v_0$, la dernière relation ci-dessus s'écrit

$$a^2 m^2 + b^2 n^2 - c^4 p^2 = 0;$$

en revenant aux coordonnées cartésiennes, on voit que le point M est sur la conique

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^4 = 0.$$

C'est bien la conique indiquée dans l'énoncé; elle passe aux points à l'infini de Γ.

Généralisation. — Si l'on considère u, v, w comme des coordonnées trilatères, et si l'on fait abstraction de la relation qui lie a, b, c, on voit sans peine que l'équation (Γ) est l'équation générale des courbes de quatrième classe ayant trois tangentes doubles à points de contact de rebroussement, de sorte que les propriétés ci-dessus s'appliquent à ces courbes; on remarque que les deux points de rebroussement situés sur une tangente double sont conjugués par rapport aux deux autres tangentes, et que la conique lieu de M, qui passe aux six points de rebroussement, est conjuguée par rapport au triangle des tangentes doubles.

La droite Δ ayant pour équation

$$u_0 x + v_0 y + w_0 y = 0,$$

et les coordonnées de M étant

$$\frac{1}{u_0}, \quad \frac{1}{v_0}, \quad \frac{1}{w_0},$$

le point M est le pôle trilinéaire de Δ par rapport au triangle de référence.

Corrélativement, on peut énoncer les propriétés suivantes :

1° Dans une quartique trinodale à tangentes inflexionnelles aux points doubles, les tangentes en un point double sont conjuguées par rapport aux deux autres points doubles;

2° Si d'un point d'une telle courbe on lui mène les quatre tangentes autres que la tangente en ce point, les points de contact de ces quatre droites sont en ligne droite, et cette droite touche à une conique tangente aux six tangentes inflexionnelles et conjuguées par rapport au triangle des points doubles;

3° Par exemple, la lemniscate étant une telle courbe dont les points doubles sont le centre et les points cycliques, les points de contact des quatre tangentes à la lemniscate issues d'un point N de cette courbe sont en ligne droite, et cette droite L est tangente à une hyperbole équilatère fixe H qui a pour asymptotes les tangentes à la lemniscate en son centre O. La droite L étant la polaire trilinéaire de N par rapport au triangle OIJ (I et J désignant les points cycliques), ON est perpendiculaire à N.

Remarque. — L'hyperbole H étant une transformée par inversion de la lemniscate, ce qui précède conduit au théorème suivant : Par un point n d'une hyperbole équilatère et par son centre, on peut faire passer quatre cercles tangents à cette conique en un point différent de n, les quatre points de contact sont sur un cercle passant par le centre et ayant son centre sur On; l'enveloppe de ce cercle est une lemniscate de Bernoulli.

1782.

(1897, p. 436.)

Étant donnée l'équation

$$\varphi(x) = ax^5 - 5bx^4 + 10cx^3 - 10dx^2 + 5ex - f = 0,$$

si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} 8\lambda &= 3c^2 - 4bd + ae, \\ 6\mu &= 2cd - 3be + af, \\ 3\nu &= 3d^2 - 4ce + bf, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \omega &= a\nu - 2b\mu + c\lambda, \\ \omega_1 &= b\nu - 2c\mu + d\lambda, \\ \omega_2 &= c\nu - 2d\mu + e\lambda, \\ \omega_3 &= d\nu - 2e\mu + f\lambda, \end{aligned}\right.$$

la condition

$$3\begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}^2 + 16\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega & \omega_1 & \omega_2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0$$

exprime que l'équation a une racine double.

(P. SONDAT.)

SOLUTION

Par M. P. SONDAT.

Si l'on pose

$$\delta = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \lambda & \mu \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega & \omega_1 & \omega_2 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix},$$

il s'agit de démontrer que l'on a

$$(1)\qquad 3\delta^2 + 16\Delta = 0,$$

avec une racine double.

Désignons par φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 les dérivées successives de φ, divisées respectivement par 5, 20, 60, 120.

Dans les fonctions λ, μ, ν, ω, ω_1, ω_2, ω_3, δ et Δ, remplaçons

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f$$

par

$$a,\quad \varphi_4,\quad \varphi_3,\quad \varphi_2,\quad \varphi_1\quad \varphi,$$

et désignons par les mêmes lettres accentuées les résultats des substitutions.

En procédant comme au théorème démontré dans les *Nouvelles Annales,* 1900, page 25, on trouve, quel que soit x,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda' &= \lambda, \\ \mu' &= \lambda x - \mu, \\ \nu' &= \lambda x^2 - 2\mu x + \nu, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \omega' &= \omega, \\ \omega'_1 &= \omega x - \omega_1, \\ \omega'_2 &= \omega x^2 - 2\omega_1 x + \omega_2, \\ \omega'_3 &= \omega x^3 + 3\omega_1 x^2 + 3\omega_2 x - \omega_3, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \delta' = \delta, \qquad \Delta' = \Delta.$$

Or si l'équation proposée a une racine double, en attribuant à x la valeur, soit ρ, de cette racine double, annulant φ et φ_1, on aura

$$9\delta' = 4\varphi_2^2(3\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2),$$
$$27\Delta' = -\varphi_2^4(3\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2)^2,$$

et, par suite,

$$3\delta'^2 + 16\Delta' = 0,$$

or, d'après (3),

$$3\delta^2 + 16\Delta = 0.$$

Remarques. — I. Si ρ était une racine *triple,* on aurait, d'après (2), pour la déterminer, les équations

$$(4)\qquad \lambda x - \mu = 0, \qquad \mu x - \nu = 0, \qquad \omega x - \omega_1 = 0. \qquad \ldots.$$

D'où

$$\rho = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\nu}{\mu} = \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_3}{\omega},$$

et, par suite, δ serait nul, ainsi que les mineurs de Δ.

II. Si ρ était une racine *quadruple*, les équations (4) ne la feraient pas connaître, car on aurait

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_3 = 0,$$

les trois premières conditions entraînant les quatre autres.

III. On sait d'ailleurs qu'une racine *quintuple* est donnée par

$$\rho = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} = -\frac{f}{e}.$$

1822.

(1899, p. 244.)

Étant donnée une conique C *de foyers* F *et* F′, *on considère une parabole de foyer* F *dont la directrice* δ *passe par* F′. *Soit* Δ *la directrice de la conique* C *correspondant au foyer* F. *Démontrer que les tangentes communes à la conique* C *et à la parabole* P *touchent ces courbes aux points où elles sont rencontrées par les droites* δ *et* Δ.

(M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Les deux coniques C et P ayant le foyer F en commun sont tangentes toutes les deux aux deux droites isotropes du point F. Les coniques ont donc encore deux tangentes communes. Soit A un des points d'intersection de δ avec C. La tangente en A à la conique C rencontre la directrice Δ en D, et l'on sait que DF est perpendiculaire sur FA. Or, AD étant bissectrice extérieure de l'angle des rayons vecteurs δ et FA, si de D on abaisse sur δ la perpendiculaire DB, il en résulte que les triangles rectangles AFD et ABD sont égaux, d'où

$$DF = DB, \qquad \text{angle } FDA = FDB,$$

et, par conséquent, D est un point de la parabole P et a pour tangente en ce point la droite AD.

Autres solutions de MM. Audibert, E.-N. Barisien, Durlimbert.

[K6b][P6f]

SUR UN SYSTÈME SPÉCIAL DE COORDONNÉES TANGENTIELLES ET SUR LA TRANSFORMATION PAR TANGENTES ORTHOGONALES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

COORDONNÉES λ, μ.

1. Ayant écrit l'équation cartésienne de la droite en fonction de deux paramètres quelconques, on obtient une équation tangentielle d'une courbe en exprimant, au moyen de ces deux paramètres, la condition de tangence de cette courbe avec la droite. C'est ainsi que la condition de contact de la droite

$$ux + vy + 1 = 0, \tag{1}$$

avec une courbe quelconque, fournit l'équation plückérienne

$$\varphi(u, v) = 0 \tag{2}$$

de cette courbe. Si, de même, nous donnons à l'équation de la droite la forme

$$y = \mu(x - \lambda), \tag{3}$$

μ étant le coefficient angulaire, λ l'abscisse à l'origine de cette droite, nous aurons, par la condition de contact avec une courbe donnée, une nouvelle équation tangentielle

$$\psi(\lambda, \mu) = 0. \tag{4}$$

de cette courbe. Le passage du système plückérien à ce second système se fait immédiatement par les formules

$$(5) \qquad u = -\frac{1}{\lambda}, \qquad v = \frac{1}{\lambda\mu},$$

qui montrent que, s'il s'agit de la courbe de la classe m la plus générale, c'est-à-dire si $\varphi(u, v)$ est un polynome du degré m en u et v, l'équation (4) prend la forme

$$(6) \quad f_m(\lambda)\mu^m + f_{m-1}(\lambda)\mu^{m-1} + \ldots + f_1(\lambda)\mu + f_0 = 0,$$

f_k représentant, d'une manière générale, un polynome en λ d'un degré *au plus égal à k*. Ceci montre que, si l'on se donne une équation algébrique quelconque en λ et μ, il faut, pour déterminer la classe de la courbe correspondante, après avoir ordonné l'équation par rapport à μ, la multiplier par une puissance de μ telle que chaque terme en μ soit d'un degré au moins égal à celui du polynome en λ qui le multiplie, l'exposant de la plus haute puissance de μ faisant alors connaître la classe de la courbe considérée.

Il est d'ailleurs bien évident que si, dans l'équation d'une courbe, μ^p se met en facteur, c'est que la courbe est p fois tangente à l'axe Ox, et que, si l'équation d'une courbe de la classe m n'est que du degré $m-p$ en λ, c'est que la courbe est p fois tangente à la droite de l'infini.

L'équation du premier degré en μ définira le point. Cette équation n'est d'ailleurs autre que (3) que l'on peut écrire

$$(3') \qquad \mu(\lambda - x) + y = 0.$$

L'équation en λ et μ de certaines courbes s'obtient immédiatement. Soit, par exemple, un cercle de centre (α, β) et de rayon r. Si l'équation (3) représente une de ses tangentes, la distance de cette droite au point (α, β) étant égale à r, on a

$$r^2 = \frac{[\beta - \mu(\alpha - \lambda)]^2}{1 + \mu^2}$$

ou

$$(7)\qquad (\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 - r^2)\mu^2 + 2\beta(\lambda - \alpha)\mu + \beta^2 - r^2 = 0.$$

Quant à l'équation générale des coniques, courbes de la seconde classe, elle s'écrira

$$(8)\qquad (a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)\mu^2 + (b_1\lambda + b_2)\mu + c_2 = 0.$$

Si on l'identifie à la précédente et qu'entre les relations obtenues on élimine α, β et r, ce qui n'offre aucune difficulté, on trouve les conditions pour que cette équation représente un cercle, savoir :

$$(9)\qquad a_1 b_1 = 2a_0 b_2, \qquad a_1^2 - b_1^2 = 4a_0(a_2 - c_2).$$

2. L'équation $(3')$, jointe à l'équation en λ et μ d'une courbe quelconque, fait connaître les λ et μ des tangentes menées à cette courbe par le point (x, y).

De là résulte une méthode commode pour déterminer le lieu des points d'où l'on peut mener à une courbe des tangentes entre lesquelles existe certaine relation angulaire. Il suffit, dans l'équation (4) de la courbe, de remplacer λ par $\frac{\mu x - y}{\mu}$ et d'exprimer qu'entre les racines de l'équation en μ obtenue existe la relation demandée.

Soit, par exemple, à trouver le lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à une conique. Le résultat de la substitution précédente effectuée dans (8) est

$$(10)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(a_0 x^2 + a_1 x + a_2)\mu^2 \\ &\quad - (2a_0 xy - b_1 x + a_1 y - b_2)\mu \\ &\qquad + a_0 y^2 - b_1 y + c_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on exprime que le produit des racines μ de cette équation est égal à -1, on a l'équation du cercle

$$a_0(x^2+y^2)+a_1x-b_1y+a_2+c_2=0.$$

Soit, d'une manière générale,

$$(11)\qquad U_m\mu^m+U_{m-1}\mu^{m-1}+\ldots+U_1\mu+U_0=0,$$

le résultat de la substitution indiquée dans (6), U_k représentant un polynome au plus de degré k en x et y.

Si l'on appelle τ la tangente de la somme des angles que les m tangentes déterminées par cette équation font avec Ox, on a

$$(12)\qquad \tau=\frac{-U_{m-1}+U_{m-3}-U_{m-5}-\ldots}{U_m-U_{m-2}+U_{m-4}-\ldots}.$$

Donc cette équation (12) fait connaître le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe (6) un système de tangentes d'orientation fixe, suivant la terminologie de Laguerre [1].

Les foyers étant les points d'où l'on peut mener à la courbe des tangentes isotropes, on voit que leurs coordonnées satisfont à l'équation (11) où l'on fait $\mu=i$. Ces foyers se trouvent donc à la rencontre des courbes

$$(13)\qquad \begin{cases} U_m-U_{m-2}+U_{m-4}-\ldots=0,\\ U_{m-1}-U_{m-3}+U_{m-5}-\ldots=0,\end{cases}$$

ce qui montre que les courbes du faisceau (12) passent toutes par les n^2 foyers de la courbe considérée.

Dans le cas d'une conique, l'équation (11) prend la forme (10) et les équations (13) deviennent

$$(14)\qquad \begin{cases} a_0(x^2-y^2)+a_1x+b_1y+a_2-c_2=0,\\ 2a_0xy-b_1x+a_1y-b_2=0.\end{cases}$$

---

[1] Sur cette importante notion, *voir* dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. XII, p. 37 et 129; 1893) un intéressant Mémoire de M. G. Humbert.

Si l'on prend comme orientation constante celle de Ox, auquel cas $\tau = 0$, c'est cette dernière équation qui fait connaître le lieu demandé. Elle définit une hyperbole équilatère concentrique à la conique considérée, puisqu'elle passe par ses quatre foyers. On le vérifiera d'ailleurs plus loin. Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Si l'hyperbole équilatère H *est concentrique à la conique* C *et passe par ses foyers, les tangentes que de tout point de* H *on peut mener à* C *sont également inclinées sur les asymptotes de* H.

3. Pour avoir le point de contact de la tangente (λ, μ) avec la courbe, il suffit d'écrire que ce point se trouve à la fois sur cette droite et sur celle qui a pour coordonnées $\lambda + d\lambda$ et $\mu + d\mu$, ce qui donne immédiatement

$$(15) \qquad \begin{cases} x = \lambda + \mu \dfrac{d\lambda}{d\mu}, \\ y = \mu^2 \dfrac{d\lambda}{d\mu}, \end{cases}$$

$d\lambda$ et $d\mu$ étant liés, si l'équation (4) est celle de la courbe, par

$$\psi'_\lambda \, d\lambda + \psi'_\mu \, d\mu = 0.$$

Ceci montre que l'équation

$$\psi'_\lambda = 0,$$

jointe à celle de la courbe, fait connaître les asymptotes et

$$\psi'_\mu = 0$$

les points de rencontre de la courbe avec Ox.

Reprenons l'équation (6) de la courbe la plus générale de la classe m, et ordonnons-la par rapport à λ :

$$a_0 \mu^m \lambda^m + (a_1 \mu^m + b_1 \mu^{m-1}) \lambda^{m-1} + \ldots = 0.$$

Si nous considérons les λ des m tangentes parallèles à une direction définie par une valeur particulière de μ, nous avons

$$\sum \lambda = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{a_0 \mu},$$

et, par suite,

$$\sum \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{b_1}{a_0 \mu^2}.$$

Donc, en vertu des formules (15), il vient, pour les m points de contact de ces tangentes parallèles,

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum x &= -\frac{a_1}{a_0}, \\ \sum y &= \frac{b_1}{a_0}, \end{aligned} \right.$$

équations qui expriment que le *barycentre de ces m points de contact est fixe* (théorème de Chasles).

Si l'on appelle θ l'angle que la droite (λ, μ) fait avec Ox [1], de telle sorte que

$$\mu = \operatorname{tang}\theta,$$

on a, en appelant r le rayon de courbure au point (x, y),

$$r = \frac{ds}{d\theta} = \frac{dx}{\cos\theta \, d\theta}.$$

Or, la différentiation de l'équation précédente donne

$$d\mu = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

---

[1] Le système des coordonnées λ et θ est celui qui a reçu le nom de *coordonnées axiales* (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. III, p. 545; 1884).

Par suite

$$r = \frac{dx}{\cos^3\theta\, d\mu}$$

ou

$$(17) \qquad r = \frac{dx}{d\mu}(1+\mu^2)^{\frac{3}{2}},$$

formule qu'on peut transformer, au moyen de la première formule (15), en

$$(17') \qquad r = \left(2\frac{d\lambda}{d\mu} + \mu\frac{d^2\lambda}{d\mu^2}\right)(1+\mu^2)^{\frac{3}{2}}.$$

La formule (17) montre d'ailleurs immédiatement, en vertu de (16), qu'entre les rayons de courbure correspondant aux points de contact des m tangentes parallèles envisagées ci-dessus, on a la relation

$$\sum r = 0,$$

d'où résulte que *le barycentre des centres de courbure correspondant aux points de contact des m tangentes parallèles se confond avec celui de ces points de contact* (théorème de Duhamel).

Remarquons enfin que les formules (15) conduisent à une facile détermination de la développée d'une courbe donnée par son équation (4) en λ et μ. Si, en effet, on appelle λ' et μ' les coordonnées de la normale au point (x, y), on a évidemment

$$(18) \qquad \mu\mu' + 1 = 0,$$

et

$$y^2 + (x-\lambda)(x-\lambda') = 0,$$

ou, en tenant compte des formules (15),

$$(19) \qquad \mu(\mu^2+1)\frac{d\lambda}{d\mu} + \lambda - \lambda' = 0.$$

L'élimination de λ et μ entre les équations (4), (18) et (19) donne l'équation de la développée. On en trouvera plus loin un exemple.

4. Nous avons vu que l'équation générale des coniques en coordonnées λ et μ est l'équation (8) ci-dessus, et que les foyers de cette conique sont donnés par les équations (14).

Remarquons tout d'abord que si $a_0 = 0$ l'équation (8) ne détermine qu'une tangente à distance finie pour toute valeur de μ, c'est-à-dire que la conique est une parabole. D'ailleurs, en ce cas, les équations (14) ne donnent qu'un foyer.

Supposons maintenant la conique douée de centre. Le coefficient a_0, différent de zéro, peut toujours être supposé *positif*. En nous plaçant dans cette hypothèse, cherchons à déterminer la nature de la conique d'après son équation (8). Pour cela, il suffit de discuter la réalité des valeurs de λ correspondant aux diverses valeurs de μ. Cette réalité dépend du signe de

$$T = (a_1^2 - 4a_0a_2)\mu^2 + 2(a_1b_1 - 2a_0b_2)\mu + (b_1^2 - 4a_0c_2),$$

qui lui-même est lié à la réalité de ses racines en μ. Or, si l'on représente par

$$\Delta = a_0b_2^2 - a_1b_1b_2 + a_2b_1^2 + b_1^2c_2 - 4a_0a_2c_2$$

le discriminant de la forme obtenue en rendant homogène le premier membre de l'équation (8) où μ et $\lambda\mu$ seraient les variables, on trouve immédiatement

$$(a_1b_1 - 2a_0b_2)^2 - (a_1^2 - 4a_0a_2)(b_1^2 - 4a_0c_2) = 4a_0\Delta.$$

Donc, puisque a_0 est supposé positif, suivant que Δ est supérieur, égal ou inférieur à zéro, le trinome en T a ses racines réelles et distinctes, égales ou imaginaires.

Dans le premier cas, lorsque μ est compris entre les racines μ_1 et μ_2 de $T = 0$, les valeurs de λ correspondantes sont imaginaires. La conique est alors une hyperbole dont μ_1 et μ_2 font connaître les directions asymptotiques. Si au contraire $\Delta = 0$, les racines de $T = 0$ sont imaginaires; ce trinome est constamment positif ou négatif suivant le signe de $a_1^2 - 4a_0a_2$; on a une ellipse réelle ou imaginaire. Si $\Delta = 0$, le polynome du second degré en λ et $\lambda\mu$ se décompose; on a un système de deux points. Cette discussion peut se résumer ainsi :

$$
\begin{array}{lll}
a_0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{parabole} & \\
a_0 > 0 \left\{ \begin{array}{l} \Delta > 0 \ldots\ldots \\ \Delta = 0 \ldots\ldots \\ \Delta < 0 \ldots\ldots \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{hyperbole} \\ \text{deux points} \\ \text{ellipse} \left\{ \begin{array}{ll} a_1^2 - 4a_0a_2 > 0 \ldots & \text{réelle} \\ a_1^2 - 4a_0a_2 < 0 \ldots & \text{imaginaire} \end{array} \right. \end{array} &
\end{array}
$$

La conique est un cercle si les directions asymptotiques sont isotropes, c'est-à-dire si l'équation $T = 0$ se réduit à $\mu^2 + 1 = 0$, ce qui redonne les conditions (9) déjà obtenues directement.

On aura une hyperbole équilatère si le produit des racines de $T = 0$ est égal à -1, c'est-à-dire si

$$a_1^2 + b_1^2 = 4a_0(a_2 + c_2).$$

Le centre, qui se confond pour les coniques avec le point de Chasles, a pour coordonnées, d'après (16),

$$x = -\frac{a_1}{2a_0}, \qquad y = \frac{b_1}{2a_0}, \tag{20}$$

et ce point coïncide bien, comme on l'a annoncé à la fin du n° 2, avec le centre de l'hyperbole équilatère définie par l'une ou l'autre des équations (14).

Dans le cas de la parabole, le centre est rejeté à l'infini dans la direction dont le coefficient angulaire, en vertu des formules (20), est

$$(21) \qquad \mu = -\frac{b_1}{a_1}.$$

Il est facile de former les équations des coniques placées dans des situations spéciales par rapport à Ox et Oy.

Si ces axes se confondent avec ceux de la conique on a, en appelant a et b les longueurs des demi-axes suivant Ox et Oy,

$$(22) \qquad (\lambda^2 - a^2)\mu^2 - b^2 = 0.$$

Une parabole ayant son axe perpendiculaire à Ox aura, d'après (21), une équation de la forme

$$(23) \qquad a_2\mu^2 + (b_1\lambda + b_2)\mu + c_2 = 0.$$

Si une parabole a son axe dirigé suivant Ox, son équation prend la forme

$$(24) \qquad (a_1\lambda + a_2)\mu^2 + c_2 = 0,$$

et si le foyer est, en outre, en O, elle devient

$$(25) \qquad (2\lambda + p)\mu^2 + p = 0,$$

p étant le paramètre de la parabole.

Comme exemple de recherche de développée, nous allons prendre cette dernière équation réduite de la parabole.

La différentiation de cette équation donne

$$\mu\frac{d\lambda}{d\mu} = -(2\lambda + p).$$

Donc, l'équation (19) devient ici

$$-(2\lambda + p)(\mu^2 + 1) + \lambda - \lambda' = 0,$$

ou, en tenant compte de l'équation (25),

$$\lambda + \lambda' = 0.$$

Tirant λ' de cette équation, μ' de (18) et portant dans (25), on a, en supprimant les accents de λ' et μ' après la substitution faite

$$p\mu^2 - 2\lambda + p = 0, \tag{26}$$

équation de la parabole semi-cubique qui constitue la développée cherchée et qui a un point de rebroussement sur Ox au point $\lambda = \frac{p}{2}$ (centre de courbure au sommet de la parabole).

Transformation par tangentes orthogonales.

5. Le système des coordonnées λ, μ se prête particulièrement bien à l'étude de la transformation par tangentes orthogonales, ainsi définie [1] :

La transformée d'une courbe est l'enveloppe des perpendiculaires aux tangentes à cette courbe, menées par les points où ces tangentes rencontrent un axe fixe.

Prenant cet axe comme axe Ox, on voit qu'il suffit, pour avoir la transformée d'une courbe donnée par son équation en coordonnées λ et μ, de changer dans cette équation μ en $-\frac{1}{\mu}$.

Le fait que $i = -\frac{1}{i}$ montre immédiatement que *la transformation conserve les foyers.*

De même, les points où une courbe rencontre Ox sous un angle non nul étant donnés par la condition que l'équation ait une racine double en μ, on voit que *la transformation conserve les points de rencontre sous un angle non nul avec Ox.*

---

[1] *Voir* notre brochure *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 89.

Si x et x' sont les abscisses des points de contact M et M′ des tangentes correspondantes TM et TM′, on a, d'après la première formule (15),

$$x + x' = 2\lambda + \mu\frac{d\lambda}{d\mu} + \mu'\frac{d\lambda}{d\mu'}.$$

Mais, de la relation

$$\mu\mu' = -1,$$

on tire

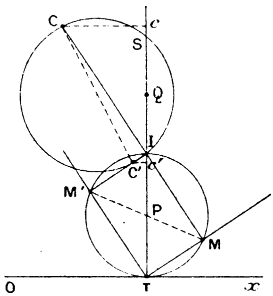
$$\frac{\mu}{d\mu} + \frac{\mu'}{d\mu'} = 0.$$

Donc

$$x + x' = 2\lambda,$$

ce qui prouve que *le milieu de* MM′ *se trouve sur la perpendiculaire élevée en* T *à* Ox (*fig.* 1), ou, ce qui

Fig. 1.



revient au même, que *les normales en* M *et en* M′ *se coupent en un point* I *de cette perpendiculaire.*

Ce point I n'est d'ailleurs autre que le centre instantané de l'angle droit MTM′.

Si le point M est à l'infini il en est de même du point M′. Donc, *aux asymptotes qui ne sont ni parallèles ni perpendiculaires à* Ox *correspondent des asymptotes pour la transformée.*

Différentiant la dernière équation écrite on a

$$\frac{dx}{d\theta} + \frac{dx'}{d\theta'} = 2\frac{d\lambda}{d\theta}$$

ou

$$r\cos\theta + r'\cos\theta' = 2\,\mathrm{TI},$$

ce qui montre que *si les points c et c' sont les projections sur* TI *des centres de courbure* C *et* C', *le milieu* Q *de cc' est le symétrique par rapport à* I *du milieu* P *de* TI.

On voit encore ici que si le point c est rejeté à l'infini il en est de même de c'. Donc, *à une tangente d'inflexion non parallèle ni perpendiculaire à* Ox *correspond une tangente d'inflexion pour la transformée.*

La dernière propriété obtenue conduit immédiatement à la suivante : *le cercle circonscrit au triangle* CIC' *coupe* TI *au point* S *symétrique de* T *par rapport à* I.

On peut donc dire que *le point* M' *est diamétralement opposé à* M *dans le cercle circonscrit à* MTI, *et le centre de courbure* C' *diamétralement opposé au centre de courbure* C *dans le cercle circonscrit à* CIS (1).

6. La conique générale représentée par l'équation (8) aura pour transformée la courbe de quatrième classe

$$c_2\mu^2 - (b_1\lambda + b_2)\mu + a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

qui est bitangente à la fois à l'axe Ox et à la droite de l'infini. Elle n'est que de la troisième classe lorsque

(1) M. E. Cesàro a remarqué (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. IV, p. 260; 1885), à la suite de la publication de la brochure où nous avions donné ces théorèmes pour la première fois, que si la transformée est définie non plus par un angle droit, mais par un angle constant quelconque entre les tangentes correspondantes, le point M' et le centre de courbure C' restent situés respectivement sur les cercles MTI et CIS.

$a_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque la conique donnée est une parabole, et se réduit à une conique lorsqu'on a soit

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 0,$$

soit

$$a_0 = 0, \qquad c_2 = 0.$$

Dans le premier cas [équation (23)], on a une parabole dont l'axe est perpendiculaire à Ox; dans le second une parabole tangente à Ox.

Dans les deux cas, d'après la propriété générale de la transformation remarquée ci-dessus, les deux paraboles transformées l'une de l'autre ont même foyer. En outre, dans le premier cas, puisque ces paraboles coupent Ox sous un angle non nul, elles le coupent aux mêmes points. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont tangents respectivement à deux paraboles de même axe et de même foyer est la corde commune à ces paraboles (1).

Dans le second cas, puisque le pied H de la perpendiculaire abaissée du foyer commun F sur la tangente commune Ox appartient à chaque tangente au sommet, ces deux tangentes au sommet se correspondent dans la transformation et sont, par suite, orthogonales. De là ce théorème :

Le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont tangents respectivement à deux paraboles de même foyer et d'axes rectangulaires est la tangente commune à ces paraboles.

Une propriété classique de la parabole montre d'ail-

---

(1) Nous avons donné une démonstration purement géométrique de ce théorème dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. XIX, p. 265).

leurs que le point de contact de chacune des paraboles avec Ox est symétrique du point où Ox rencontre l'axe de la parabole par rapport à la projection H du foyer commun sur Ox.

On aperçoit une généralisation immédiate du dernier théorème : soit une courbe de classe m, tangente une fois à Ox et $m-1$ fois à la droite de l'infini. Son équation s'écrit

$$\begin{aligned}(a_{m-1}\lambda + a_m)\mu^{m-1} + (b_{m-1}\lambda + b_m)\mu^{m-2} + \ldots \\ + (h_{m-1}\lambda + h_m)\mu + (k_{m-1}\lambda + k_m) = 0,\end{aligned}$$

et l'on voit que sa transformée est de même espèce.

Donc : *La transformée par rapport à une de ses tangentes t d'une courbe de classe m, tangente $m-1$ fois à la droite de l'infini, est une courbe de même espèce tangente à t, coupant cette droite aux mêmes points que la première et possédant les mêmes foyers.*

Si m est impair, les $m-1$ points de contact avec la droite de l'infini peuvent coïncider par moitié avec chacun des points cycliques qui comptent alors comme des foyers. En particulier, si la courbe est de troisième classe, et est bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques, c'est, comme on sait, une hypocycloïde à trois points de rebroussement, et le cas particulier qu'on obtient ainsi a déjà été remarqué par Laguerre (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII; p. 112). Il s'énonce de la manière suivante :

La transformée par tangentes orthogonales d'une hypocycloïde à trois points de rebroussement par rapport à une de ses tangentes t est une autre hypocycloïde à trois points de rebroussement également tangente à t et coupant en outre cette droite aux deux mêmes points que la première.

7. Considérons maintenant la développée de la parabole d'axe Ox ayant son foyer en O. Cette parabole est définie par l'équation (25) et sa développée par l'équation (26). Or, la transformée de celle-ci est

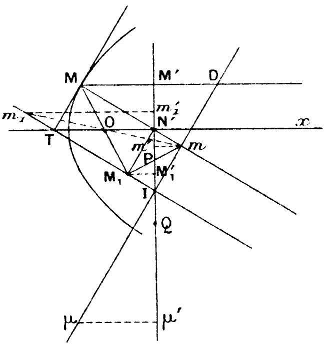
$$(-2\lambda+p)\mu^2+p=0,$$

qui ne diffère de (25) que par le changement de λ en $-\lambda$. Elle définit donc la symétrique de la parabole donnée par rapport au point O, c'est-à-dire par rapport à son foyer. Donc :

La transformée de la développée d'une parabole par rapport à son axe est la symétrique de cette parabole par rapport à son foyer [1].

Si M_1 est le point où la perpendiculaire en N à la normale MN touche son enveloppe (*fig.* 2), ce point est le

Fig. 2.



symétrique de M par rapport au foyer O. Si donc la per-

---

[1] Pour démontrer ce théorème par la Géométrie élémentaire, il suffit de remarquer que la tangente et la normale en un point d'une parabole coupent l'axe de cette courbe en des points symétriques par rapport au foyer.

pendiculaire élevée en ce point à NM_1 coupe en I la perpendiculaire élevée en N à Ox, le centre de courbure répondant à M est le pied de la perpendiculaire abaissée de I sur MN.

Or, le triangle OM_1N étant isoscèle, on voit que les angles mM_1O et INO sont égaux, c'est-à-dire que M_1m est perpendiculaire à MM_1, d'où ce théorème classique :

La projection du rayon de courbure en un point d'une parabole sur le rayon vecteur de ce point issu du foyer est double de ce rayon vecteur.

Le centre de courbure m_1 répondant au point M_1 pour la parabole enveloppée par NM_1 est le symétrique m_1 de m par rapport à O, qui se projette sur NI au point m'_1 symétrique par rapport à N de la projection m' de m sur la même droite.

D'après le théorème démontré au n° 5 sur la correspondance entre les centres de courbure, si le centre de courbure μ de la développée de la première parabole au point m se projette sur TN en μ', les points m'_1 et μ' sont symétriques par rapport au point Q lui-même symétrique du milieu P de TI par rapport à I. On déduit immédiatement de là que

$$\begin{aligned} m'\mu' &= m'_1\mu' - m'_1 m' \\ &= 2(m'_1 Q - m'_1 N) \\ &= 2NQ = 3NI = 3(NM'_1 + M'_1 I) = 3(M'N + Nm') = 3M'm', \end{aligned}$$

et, par suite, que

$$m\mu = 3Dm,$$

en appelant D le point où la normale à la développée rencontre le diamètre MD de la parabole. On retrouve ainsi, d'une façon fort simple, le théorème suivant dû à Maclaurin :

Le rayon de courbure en un point de la développée d'une parabole est triple du segment de la normale à cette développée compris entre son pied et le diamètre correspondant de la parabole.

[D5d]

SUR LES SUBSTITUTIONS A UNE VARIABLE ET LES FONCTIONS QU'ELLES LAISSENT INVARIABLES;

Par M. E. IAGGI.

---

1. Nous avons vu, dans une Note précédente (1), que toutes les fonctions complètes (2) uniformes, c'est-à-dire les fonctions uniformes qui n'ont pas de points critiques, ont des substitutions qui les laissent invariables et que certaines fonctions multiformes ont également des substitutions de ce genre. Pour abréger le langage, nous avons désigné par *substitution* la fonction $s(x)$ elle-même que l'on substitue à x, et par *période* (3), toute quantité, variable ou constante, déterminée par l'égalité

$$p(x) = s(x) - x$$

et qui est telle que, ajoutée à x, la fonction demeure invariable; cette fonction est alors appelée une fonction *périodique* (4).

---

(1) *Sur les notions de fonction complète et de fonction périodique* (*Nouvelles Annales*, avril 1901, p. 146).

(2), (3), (4) *Voir* la Note indiquée, au sujet de ces expressions.

Nous nous proposons, dans cette Note, d'étudier les principales propriétés communes à tous les groupes de substitutions des fonctions *périodiques*. Les groupes que nous étudions sont composés des fonctions $s_i(x)$, qui satisfont par hypothèse à une équation de la forme

$$F(s) = F(x), \tag{1}$$

où $F(x)$ est la fonction périodique. Cette équation sera donc le point de départ de notre théorie. $F(x)$ étant une fonction complète quelconque, nous devons d'abord discuter la possibilité de déterminer des fonctions $s(x)$ par cette équation ; il est nécessaire, pour cet objet, de distinguer deux cas : le cas des fonctions *complètes uniformes* et le cas des fonctions *complètes multiformes*. Toutefois, on peut dès maintenant faire cette remarque générale que l'équation (1) ne change pas lorsqu'on y permute s et x et, par conséquent, que si un groupe contient une substitution $s_i(x)$, ce groupe contient aussi les substitutions obtenues par inversion de $s_i(x)$; si $s_i(x)$ est l'inverse d'une fonction uniforme complète, par exemple est une substitution linéaire, il n'y a qu'une substitution inverse; si $s_i(x)$ n'est pas dans ce cas, la fonction complète $\sigma(x)$, inverse de $s_i(x)$, a plusieurs valeurs ou, si l'on veut, se décompose en plusieurs fonctions partielles [1]

$$\sigma_{i,1}(x), \quad \sigma_{i,2}(x), \quad \sigma_{i,3}(x), \quad \ldots,$$

qui, toutes, font partie du groupe, puisque la fonction complète $\sigma(x)$ est une solution de (1); mais l'une de ces fonctions, $\sigma_{i,j}(x)$, est telle que

$$\sigma_{i,j}[s_i(x)] = x;$$

---

[1] *Voir* la Note indiquée, au sujet de cette expression.

on ne peut désigner d'une manière particulière, même dans un exemple, celle des fonctions partielles $\sigma_{i,j}$ qui satisfait à l'égalité précédente : ainsi en supposant que

$$s_i(x) = e^x,$$

la fonction complète inverse, $\mathrm{L}x$, a une infinité de valeurs, c'est-à-dire se décompose en une infinité de fonctions partielles (en dehors du point multiple zéro) qui diffèrent entre elles d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, en sorte que

$$\mathrm{L}e^x = x + 2m\pi\sqrt{-1} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

et si l'on désigne par

$$\sigma_{1,i}, \quad \sigma_{i,2}, \quad \ldots,$$

ces différentes fonctions partielles dont l'ensemble est la fonction complète multiforme

$$\sigma_i(x) = \mathrm{L}x,$$

il est impossible de connaître à l'avance celle de ces fonctions qui est telle que

$$\sigma_{i,j}[s_i(x)] = x.$$

Mais, dans tous les cas, il y en *existe une* qui satisfait à cette égalité : nous l'appellerons la *substitution inverse* de $s_i(x)$.

2. Supposons d'abord que la fonction $\mathrm{F}(x)$ soit une fonction complète uniforme. Si cette fonction est une fonction linéaire, il est évident que l'équation (1) n'a pas d'autre solution que $s = x$. Nous avons vu (1) que, dans tous les autres cas où $\mathrm{F}(x)$ est une fonction complète uniforme, il existait des fonctions $s_i(x)$, distinctes en

(1) *Loc. cit.*

dehors de certains points appelés *points multiples* qui laissaient $F(x)$ invariable; nous allons démontrer cette proposition au moyen de l'équation, et préciser la nature des points multiples du groupe.

Toute racine multiple s de l'équation (1) satisfait à l'équation obtenue en dérivant (1) par rapport à s

$$\frac{d\,F(s)}{ds} = 0. \tag{2}$$

On aurait donc la condition nécessaire et suffisante pour que (1) ait une racine double en éliminant s entre (1) et (2); la condition obtenue serait une équation déterminant certaines valeurs de $F(x)$ et par conséquent de x; il s'ensuit que, *en dehors de certains points particuliers x, les racines $s(x)$ de l'équation* (1) *sont des racines simples :* si $F(x)$ est une fonction rationnelle de degré n, l'équation (1) a *n racines simples s*, sauf en certains points x, où quelques-unes de ces racines deviennent égales; en dehors de ces points x, *une seule racine s* est égale à x, et par conséquent *toute fonction rationnelle de degré n, a $n-1$ substitutions, et par suite $n-1$ périodes, sauf en certains points x*, où quelques-unes au moins de ces substitutions deviennent égales entre elles, ou identiques à x.

De même toute fonction complète uniforme transcendante *a une infinité de substitutions qui la laissent invariable,* et par suite une infinité de périodes; toutes ces substitutions sont distinctes, sauf en certains points particuliers x, où quelques-unes au moins deviennent égales entre elles, ou identiques à x.

Désignant par α l'un de ces points x particuliers, c'est-à-dire l'un des *points multiples du groupe,* nous avons

$$\frac{d\,F[s_i(\alpha)]}{d\,s_i(\alpha)} = 0,$$

où s_i est l'une des substitutions qui s'égalent en ce point α. Ce qui précède montre que, x étant racine de l'équation (1), il y a deux cas à considérer :

1° $s_i(\alpha) = \alpha$; alors

$$\frac{d\,\mathrm{F}(\alpha)}{d\alpha} = 0,$$

et l'équation (1) a une racine au moins double qui est $x = \alpha = s_i(\alpha)$;

2° $s_i(\alpha) = \beta \neq \alpha$; alors

$$\frac{d\,\mathrm{F}(\beta)}{d\beta} = 0.$$

et l'équation (1) a une racine au moins double qui est $\beta = s_i(\alpha) = s_j(\alpha)$.

Or, si $\sigma_i(x)$ est la substitution inverse de $s_i(x)$, on a

$$\alpha = \sigma_i(\beta).$$

Donc, *tout point multiple α est un certain zéro de la dérivée de la fonction périodique, ou un transformé de ce zéro par des substitutions qui y deviennent égales* (car les σ_i s'égalent en même temps que les s_i). Tous les zéros de la dérivée ne sont pas des points multiples ; on peut le voir de deux manières :

Supposons construite la courbe $y = \mathrm{F}(x)$ en coordonnées rectangulaires x et y, dans l'hypothèse où aux valeurs réelles de x correspond une suite *proprement continue* de valeurs réelles de y, et coupons cette courbe par une parallèle à l'axe des abscisses : si x est l'abscisse de l'un quelconque des points d'intersection, les abscisses des autres points sont données par les substitutions du groupe

$$s_1(x), \quad s_2(x), \quad \ldots, \quad s_i(x), \quad \ldots.$$

Si la parallèle varie, x varie ainsi que les substitutions ; lorsque la parallèle devient tangente en un point ordinaire de la courbe, deux des points d'intersection viennent se confondre, et si (x, y) est l'un de ces deux points, l'autre est $[s_i(x), y]$, en sorte qu'au point de contact d'abscisse α, qui est un maximum ou un minimum de y ou, si l'on veut, un *sommet* de la courbe, on a

$$\alpha = s_i(\alpha)$$

et

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{d\,\mathrm{F}(\alpha)}{d\alpha} = 0,$$

l'abscisse d'un sommet de la courbe est donc un point multiple du groupe.

En tous les points où la dérivée de $\mathrm{F}(x)$ est nulle, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, mais tous ces points ne sont pas des sommets où deux points (x, y), $[s_i(x), y]$ viennent se confondre : les points d'inflexion à tangente horizontale font exception, et ces points, où cependant $\mathrm{F}'(x)$ est nulle, ne fournissent pas de point multiple du groupe.

Supposons maintenant que les deux points d'intersection qui viennent se confondre en un sommet aient pour abscisses

$$s_i(x), \quad s_j(x);$$

on aura, au sommet considéré, d'abscisse β,

$$s_i(\alpha) = s_j(\alpha) = \beta, \qquad \frac{d\,\mathrm{F}(\beta)}{d\beta} = 0.$$

Quant au point d'abscisse α, c'est un point de la courbe, sur la parallèle, où la tangente peut être quelconque, et, par conséquent, en général,

$$\frac{d\,\mathrm{F}(\alpha)}{d\alpha} \neq 0.$$

En résumé, *tous les points d'intersection avec la courbe, d'une tangente en un sommet de la courbe,* *fournissent des points multiples du groupe : le sommet considéré fournit un point multiple où l'équation* (1) *a pour racines au moins deux substitutions identiques à la variable; les autres points sont les transformés de celui-là par les substitutions du groupe.*

Pour plus de simplicité, nous n'avons considéré dans ce qui précède que des valeurs réelles de x et de y; mais il est évident que le raisonnement et les conclusions restent les mêmes dans le cas des variables imaginaires en employant les mêmes expressions de *sommets,* de *maxima* ou de *minima* dans le sens habituel pour le cas des imaginaires.

Par l'analyse, on voit également quelle est la nature des points multiples : l'équation (1) donne

$$\frac{d\,\mathrm{F}(s_i)}{ds_i}\,ds = \frac{d\,\mathrm{F}(x)}{dx}\,dx$$

et par conséquent, pour un point multiple x,

$$\frac{d\,\mathrm{F}(x)}{dx}\,\frac{dx}{ds_i} = 0, \tag{3}$$

d'où l'on conclut deux sortes de points multiples :

1° Les points α tels que

$$\frac{d\,\mathrm{F}(\alpha)}{d\alpha} = 0, \qquad \frac{ds_i}{d\alpha} \neq 0,$$

c'est-à-dire les zéros de la dérivée de F, qui sont tels qu'il existe au moins une substitution $s_i(x)$ du groupe dont la dérivée ne soit pas nulle en ces points, et alors ces substitutions $s_i(x)$ deviennent identiques à x en ces points; l'étude précédente fait voir que les zéros de la dérivée, qui ne sont pas des points multiples, sont des inflexions : on voit qu'en ces points *toutes les substitutions du groupe ont leurs dérivées premières nulles,* car, si l'une d'elles $s_i(x)$ n'avait pas sa dérivée nulle, le point serait un sommet et l'on aurait en ce point $s_i(x) = x$;

2° Les points α tels que l'on ait, pour quelques substitutions s_i du groupe,

$$\frac{d\,s_i(\alpha)}{d\alpha} = \infty, \qquad \frac{1}{\dfrac{d\,\mathrm{F}(\alpha)}{d\alpha}} \neq 0.$$

Ces points sont, d'après l'étude précédente, les transformés de ceux de la première catégorie par des substitutions du groupe.

Exceptionnellement, il pourra exister des points multiples où l'un des deux facteurs de l'équation (3) étant nul, l'autre sera infini pour quelques substitutions du groupe, et où cependant le produit aura une limite nulle; mais ces points seront des *points multiples singuliers*. Nous n'insisterons pas davantage sur cette discussion des points multiples, mais on peut remarquer combien cette étude des substitutions et de leurs points multiples serait susceptible d'éclairer les propriétés des fonctions.

3. L'étude précédente montre que l'équation (1), où $\mathrm{F}(x)$ est une fonction complète uniforme, est toujours possible, c'est-à-dire que *toute fonction complète uniforme, autre qu'une fonction linéaire, admet des substitutions qui la laissent invariable* [1].

---

[1] L'étude des substitutions des fonctions rationnelles, en particulier des polynomes, peut fournir aux élèves des Lycées d'excellents exercices, tels que : discussion de la réalité des substitutions, des points multiples, étude de la courbe $y = \mathrm{F}(x)$ au moyen des substitutions, expression des substitutions dans les cas où $\mathrm{F}(x)$ est de degré 2, 3, 4 ou 5. L'équation

$$\frac{\mathrm{F}(s) - \mathrm{F}(x)}{s - x} = 0$$

est de degré 4 lorsque $\mathrm{F}(x)$ est de degré 5.

Considérons maintenant une fonction complète multiforme $F(x)$; cette fonction *complète* a plusieurs valeurs que nous avons appelées les *fonctions partielles* [1] *uniformes* dont l'ensemble forme la fonction complète $F(x)$; ces fonctions partielles, que nous désignerons par

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x), \quad \ldots, \quad f_i(x), \quad \ldots,$$

se permutent entre elles lorsque x décrit un contour fermé autour d'un de leurs points critiques, de sorte que leur *ensemble*, qui est la fonction complète $F(x)$, reprend la même détermination [2] ; d'ailleurs, lorsque x est en un de ces points critiques, plusieurs des fonctions partielles f s'égalent [3].

Supposons qu'il existe une substitution $s(x)$ telle que l'ensemble des valeurs de $F(x)$ demeure invariable pour cette substitution. Deux cas sont à considérer : ou bien

$$(4) \qquad \begin{cases} f_1(s) = f_1(x), \\ f_2(s) = f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_i(s) = f_i(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

ou bien

$$(5) \qquad \begin{cases} f_1(s) = f_{p1}(x), \\ f_2(s) = f_{p2}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_i(s) = f_{pi}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où les fonctions $f_{pi}(x)$ ne sont autres que les fonc-

---

[1] *Loc. cit.*

[2], [3] Pour cette raison, nous avons appelé *points multiples* de la fonction complète $F(x)$, les points critiques des fonctions partielles $f_i(x)$ (*loc. cit.*).

tions $f_i(x)$ placées dans un autre ordre que précédemment.

Dans le premier cas, les fonctions partielles demeurent elles-mêmes invariables pour la substitution donnée; elles admettent toutes la substitution $s(x)$; elles sont elles-mêmes *périodiques* et ont au moins une substitution commune.

Dans le second cas, les fonctions partielles ne demeurent pas toutes invariables : quelques-unes au moins *sont permutées* par la substitution $s(x)$.

Dans les deux cas, on peut résumer les égalités précédentes dans l'égalité

$$F(s) = F(x),$$

qui sera le symbole de l'ensemble des égalités relatives à l'un ou l'autre cas, comme $F(x)$ est le symbole de l'ensemble des fonctions partielles $f(x)$.

Dans les deux cas, *la fonction complète* $F(x)$, *qui reste invariable pour la substitution considérée, sera dite* fonction périodique *de* x.

Contrairement au cas des fonctions complètes uniformes, une fonction complète multiforme quelconque n'est pas généralement périodique; il est évident, en effet, que les équations (4) ou les équations (5) ne peuvent être satisfaites simultanément par la même substitution $s(x)$ sans que les fonctions $f(x)$ satisfassent à certaines conditions spéciales. Mais certaines fonctions complètes multiformes sont périodiques; nous avons vu, d'ailleurs (1), qu'on pouvait facilement en former au moyen d'une fonction complète uniforme $\varphi(x)$ et d'une fonction complète multiforme $\Phi(x)$: La fonction com-

(1) *Loc. cit.*

plète multiforme

$$F(x) = \Phi[\varphi(x)]$$

admet toutes les substitutions de $\varphi(x)$ et satisfait à des équations de la forme (4).

Considérons donc une fonction complète multiforme périodique $F(x)$, c'est-à-dire telle qu'il existe des substitutions $s_i(x)$ satisfaisant à l'équation

$$(6) \qquad F(s) = F(x),$$

symbole de l'ensemble (4) ou de l'ensemble (5). Les raisonnements que nous avons faits à propos des racines s de cette équation, lorsque $F(x)$ est uniforme, peuvent être intégralement répétés à propos des équations (4) ou (5); nous pouvons donc dire :

Toutes les racines s de l'équation (6) *sont des racines simples, sauf en des points x particuliers qui sont les points multiples du groupe.* Certains de ces points rendent plusieurs racines s identiques à x. Les zéros des fonctions

$$\frac{df_1}{dx}, \quad \frac{df_2}{dx}, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire les zéros de la fonction complète

$$\frac{dF(x)}{dx},$$

sont généralement tous des points multiples de cette catégorie.

Mais, ici, on y doit ajouter les *points critiques des fonctions partielles,* lorsque les substitutions *permutent* les fonctions partielles qui deviennent égales, points qui sont aussi des points multiples où plusieurs racines s deviennent identiques à x.

Les autres points multiples sont les transformés de ces deux sortes de points; les points de cette seconde catégorie sont tels qu'au moins deux substitutions y sont égales, mais non identiques à x [1].

4. Considérons un point multiple α d'un groupe qui soit tel que l'une des substitutions $s_i(x)$ du groupe devienne, en ce point, identique à α :

$$s_i(\alpha) = \alpha.$$

La période qui correspond à $s_i(x)$ est

$$p_i(x) = s_i(x) - x,$$

et l'on a, au point α,

$$p_i(\alpha) = s_i(\alpha) - \alpha = 0.$$

Ceci montre que tous les points multiples de la première catégorie sont les zéros des périodes.

Donnons à x une valeur infiniment voisine de α. Dans l'hypothèse où $s_i(x)$ est une fonction continue, $p_i(x)$, qui est alors aussi continue, sera infiniment petite et, par conséquent, $s_i(x)$ sera infiniment voisin de α et, par suite, de x : ainsi, dans le domaine d'un point multiple α où viennent se confondre des substitutions $s_i(x)$, $s_j(x)$, ..., les points transformés $s_i(x)$, $s_j(x)$, ... sont infiniment voisins du point x voisin de α. Si l'on considère un point multiple où des substitutions deviennent égales sans être identiques à x, on voit de même que ces substitutions sont infiniment voisines, pour une valeur de x infiniment voisine du point multiple considéré.

---

[1] Dans le cas des fonctions complètes uniformes comme dans le cas des fonctions périodiques multiformes, les points multiples de la deuxième catégorie peuvent ne pas exister : c'est lorsque tous les transformés des points de la première catégorie sont eux-mêmes de la première catégorie. Les fonctions $\sin x$, $\operatorname{sn} x$, fournissent des exemples de ce cas. Les polynomes fournissent un exemple du cas général.

Dans tout groupe il existe au moins des points multiples à distance finie de la première catégorie, sauf dans le groupe de la fonction exponentielle, qui n'a que des périodes constantes et, par conséquent, n'a pas de point multiple à distance finie; donc, tout groupe, sauf ce cas d'exception, *a des périodes infinitésimales dans le domaine de points* α *à distance finie.* C'est ce qui nous a permis, dans une Note précédente (¹), où nous avions déjà sans calcul démontré ce fait, de ne pas établir de distinction entre les différents groupes *discontinus* qui contiennent, ou non, des périodes infinitésimales dans le domaine de certains points; mais nous avons vu que certaines fonctions périodiques ont des groupes qui sont *continus,* c'est-à-dire contiennent, *quel que soit* x, *des périodes infinitésimales.* L'analyse permet de préciser alors la nature des fonctions qui précèdent de tels groupes.

Considérons d'abord une fonction complète uniforme $F(x)$, et soit $p(x)$ une de ses périodes. $p(x)$ ne peut, quel que soit x, être infinitésimale, car on a

$$(7) \qquad F[x+p(x)] = p(x)\frac{dF[x+\theta p(x)]}{dx} \qquad (|\theta| < 1).$$

$F[x+p(x)]$ et, par suite, $F(x)$ seraient alors infinitésimales quel que soit x, sauf peut-être dans le voisinage des pôles de la dérivée, et ceci est impossible. *Donc le groupe de toute fonction complète uniforme est un groupe discontinu,* c'est-à-dire que, sauf dans le domaine des points multiples, aucune période n'est infinitésimale.

Considérons maintenant une fonction complète multiforme $F(x)$ qui se décompose, en dehors de ses multiplicités, en fonctions partielles $f_1(x)$, $f_2(x)$, ...,

(¹) *Loc. cit.*

et supposons que cette fonction soit périodique, c'est-à-dire, soit qu'il existe des substitutions qui laissent invariables les fonctions partielles f elles-mêmes, soit qu'il existe des substitutions qui permutent entre elles ces fonctions partielles ou qui, laissant invariables quelques-unes des fonctions partielles, permutent les autres. Dans le premier cas, les substitutions ne peuvent donner lieu à des périodes infinitésimales, quel que soit x, car ce que nous avons dit sur l'équation (7) peut être répété sur une équation de la forme

$$f_i[x+p(x)] = p(x)\frac{df_i[x+\theta p(x)]}{dx},$$

et alors le groupe est nécessairement discontinu. Dans le second cas, il est nécessaire de faire différentes hypothèses sur la fonction multiforme $F(x)$:

1° *La fonction* $F(x)$ *est une fonction ponctale* [1], c'est-à-dire que, parmi les fonctions partielles $f(x)$ qui composent la fonction complète $F(x)$, il n'en est pas deux qui diffèrent infiniment peu quel que soit x. Alors les équations (5) de la forme

$$f_i[x+p(x)] = f_{p_i}(x) \qquad (p_i \neq i)$$

ne peuvent être satisfaites par une période $p(x)$ qui serait infinitésimale quel que soit x, car si cela était, au moins deux fonctions partielles f_i, f_{p_i} différeraient infiniment, peu quel que soit x.

En remarquant qu'une fonction complète uniforme est aussi une fonction ponctale, nous pouvons donc dire :

Toute fonction périodique ponctale a pour groupe de substitutions un groupe discontinu.

---

[1] Pour plus amples détails sur ces expressions, *voir* la Note citée.

2° *La fonction* F(x) *est une fonction improprement linéale ou improprement aréale* [1], c'est-à-dire que les points qui représentent les fonctions partielles f sont des points infiniment voisins les uns des autres, sur une ligne ou dans une aire. On peut alors associer deux à deux les fonctions f de manière que $f_i(x)$ et $f_{pi}(x)$ soient infiniment peu différentes, et l'équation précédente ne présente plus aucune impossibilité pour l'existence de périodes qui soient infinitésimales quel que soit x.

En remarquant que, selon que la fonction est improprement linéale ou improprement aréale, le groupe peut être simplement continu ou doublement continu, nous pouvons dire :

Tout groupe continu ne peut appartenir qu'à une fonction improprement linéale si la continuité du groupe est simple, ou à une fonction improprement aréale si la continuité du groupe est double.

Ce qui précède permet de démontrer encore que :

1° *Toute fonction périodique ponctale* F(x) *a pour inverse une fonction périodique ponctale,* à moins que F(x) ne soit une fonction complète uniforme, auquel cas l'inverse n'est pas périodique.

2° *Toute fonction périodique improprement linéale a pour inverse une fonction périodique improprement linéale.*

3° *Toute fonction périodique improprement aréale a pour inverse une fonction périodique improprement aréale.*

Mais nous n'insistons pas davantage, et nous rappelons seulement, en terminant, que la fonction impro-

---

(1) *Voir* la Note citée.

prement linéale

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^m,$$

où m est incommensurable, est, comme son inverse, une fonction périodique dont le groupe est simplement continu, et que, le groupe de substitutions d'une fonction abélienne étant continu, cette fonction est, comme son inverse, une fonction improprement linéale ou aréale.

[M[1]8e]

CONSTRUCTION DES CENTRES DE COURBURE DES COURBES DE LAMÉ;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Rappelons que le lieu des points de rencontre des rayons vecteurs d'une courbe C issus de O et des parallèles aux normales correspondantes issues d'un second pôle fixe P est dite l'*adjointe des directions normales de la courbe* C ([1]). Nous avons fait voir que si la normale au point M de la courbe C coupe au point N la droite OP, *la perpendiculaire élevée en* N *à* MN *et la parallèle menée à la tangente correspondante de l'adjointe par le centre de courbure* μ *répondant au point* M *se coupent sur le rayon vecteur* OM ([2]).

([1]) Sur la notion générale d'adjointe infinitésimale, *voir* la Note que nous avons récemment publiée dans les *Nouvelles Annales* (3e série, t. XIX, p. 219; 1900).

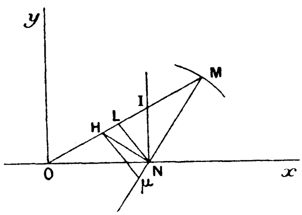
([2]) Ce théorème, démontré dans un Mémoire de l'*American Journal of Mathematics* (t. XI, p. 57; 1889), est reproduit dans notre *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale*, p. 285.

Si donc, faisant coïncider le pôle P avec le point N, on peut obtenir facilement la direction de la tangente en M à l'adjointe, on en déduit immédiatement la construction du centre de courbure μ de la courbe C. Voici, comme application de cette remarque, une détermination bien simple des centres de courbure d'une courbe de Lamé, dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est

$$Ax^m + By^m = 1, \tag{1}$$

A et B ayant des signes quelconques et m étant un nombre quelconque entier ou fractionnaire.

Si l'on prend comme second pôle le pied N de la nor-



male, on voit immédiatement, en posant $ON = \alpha$, que l'équation de l'adjointe est

$$\frac{y}{x-\alpha} = \frac{By^{m-1}}{Ax^{m-1}}$$

ou

$$Ax^{m-1} - By^{m-2}(x-\alpha) = 0. \tag{2}$$

Le coefficient angulaire t de la tangente en M à cette courbe est donné par

$$t = \frac{(m-1)Ax^{m-2} - By^{m-2}}{(m-2)By^{m-3}(x-\alpha)}$$

ou, en tenant compte de (2),

$$t = \frac{y}{x}\,\frac{(m-2)(x-\alpha)-\alpha}{(m-2)(x-\alpha)}.$$

Si donc nous appelons c le coefficient angulaire de OM et si nous portons l'origine en N de façon à prendre pour nouvel axe des y la perpendiculaire NI à ON, nous avons

$$t = c\,\frac{(2-m)x' + \alpha}{(2-m)x'},$$

et il est bien facile de voir que cette égalité exprime que, si la parallèle à la tangente à l'adjointe menée par N coupe OM en L, on a

$$(3)\qquad \mathrm{IL} = (2-m)\,\mathrm{IM}.$$

Ayant donc marqué sur OM le point L défini par cette égalité (3), *on a le centre de courbure* μ *en élevant à* MN *la perpendiculaire* NH *et menant par* H *la parallèle* Hμ *à* LN.

Si $m = 1$, auquel cas on a une droite, le point L venant coïncider avec M, le point μ est bien rejeté à l'infini, ce qui est une vérification.

Si $m = 2$, auquel cas on a une conique à centre, le point L se confond avec le point I et la droite Hμ est perpendiculaire à Ox, ce qui redonne la construction bien connue due à M. Mannheim.

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments de Mathématiques supérieures à l'usage des Physiciens, Chimistes et Ingénieurs et des Élèves des Facultés des Sciences; par M. *Vogt,* professeur à l'Université de Nancy. (Nony et C^{ie}, Paris, 1901.) Prix : 10^{fr}.

Ce Livre s'adresse principalement aux étudiants qui désirent se mettre le plus rapidement possible en état de suivre les cours d'enseignement supérieur théorique ou appliqué, aux maîtres répétiteurs obligés de commencer, loin d'une Université, leur préparation à la licence, aux personnes qui se destinent à l'Industrie ou aux Travaux publics. On connaît bien l'enseignement précis, substantiel et condensé que M. Vogt donne à l'Université de Nancy aux étudiants qui désirent apprendre les Mathématiques et à ceux qui se destinent aux sciences appliquées; j'ai donc seulement à donner une idée des matières réunies dans son Livre et, autant que je l'aurai aperçu, de l'esprit dans lequel elles ont été traitées.

Première Partie : *Compléments d'Algèbre.* — Les premiers Chapitres contiennent les règles de calcul qui ne sont pas enseignées ordinairement dans les cours élémentaires : Résolution des équations du premier degré et, à cette occasion, introduction des déterminants, formule du binome, calcul des radicaux, définition et calcul des puissances à exposants fractionnaires ou négatifs.

L'étude des séries est précédée de généralités sur les limites et en particulier du principe relatif à des nombres qui vont en croissant et restent inférieurs à un nombre fixe. Ce principe permet d'établir simplement les règles usuelles de convergence des séries; le calcul approché de la somme d'une série est expliqué avec détails.

Puis vient l'étude de la fonction exponentielle et de son inverse, la fonction logarithmique : il y a lieu de s'arrêter sur la méthode suivie pour introduire ces fonctions. Dans les questions d'Analyse où l'exponentielle et le logarithme jouent le rôle d'auxiliaires permettant de ramener l'étude des produits à celle des sommes, ce qui importe, en définitive, c'est qu'on ait pu définir une fonction continue $\varphi(x)$ jouissant de la propriété

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y).$$

Or on obtient une fonction ayant ces propriétés si l'on pose

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

la série du second membre est une série entière, convergente pour toute valeur de x; elle met en évidence la propriété

$$\varphi'(x) = \varphi(x).$$

et elle permet encore de montrer aisément que les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ se ramènent à la fonction $\varphi(x)$. D'ailleurs, cette définition de la fonction $\varphi(x)$ par une série entière se raccorde, à l'aide d'un raisonnement dû à Cauchy, avec la définition de l'exponentielle à laquelle on était parvenu par des généralisations successives de la notion d'exposants : on montre, en effet, que l'on a, pour toute valeur de x,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

en posant

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Il y a de grands avantages, on le voit déjà par les remarques précédentes, à rattacher, comme le fait M. Vogt, les propriétés de l'exponentielle et du logarithme à la série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Deuxième Partie : *Principes de Géométrie analytique.* — Cette Partie débute par des notions générales relatives à la mesure des grandeurs, à l'homogénéité des formules établies en laissant les unités arbitraires, avec des exemples empruntés à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique. La théorie aujourd'hui classique des segments et des projections est exposée dans un Chapitre séparé, puis viennent la définition des coordonnées et une première idée de la représentation des lignes et des surfaces par des équations, donnée en prenant pour exemples les lignes et les surfaces du second ordre.

Troisième Partie : *Dérivées et différentielles.* — Après la recherche des dérivées des fonctions usuelles d'une variable, la formule des accroissements finis permet d'aborder l'étude de la variation d'une fonction, puis la démonstration des formules de Taylor et de Mac-Laurin.

Un Chapitre est réservé aux fonctions définies par des séries entières et aux développements en série des fonctions $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\log(1+x)$, $\operatorname{arc\,tang} x$; un autre Chapitre aux méthodes d'interpolation.

Tout ce qui précède suppose seulement la connaissance des dérivées. On introduit maintenant la notion de différentielle avec son interprétation géométrique, et celle des différentielles d'ordre supérieur.

Au début de l'étude des fonctions de plusieurs variables, on définit la différentielle totale comme la partie principale de l'accroissement d'une fonction z des variables indépendantes x et y, quand les accroissements donnés à ces variables sont, tous deux, des infiniment petits du premier ordre. La considération de la différentielle totale permet souvent de calculer à la fois toutes les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables. Cette méthode est employée plusieurs fois; le lecteur peut d'ailleurs, et c'est un bon exercice pour les commençants, retrouver successivement l'expression de chacune des dérivées.

La théorie du changement de variables, la formule de Taylor étendue au cas des fonctions de plusieurs variables indépendantes, et la détermination des maxima et des minima de ces fonctions terminent cette troisième Partie.

Quatrième Partie : *Théorie des équations.* — L'introduction des quantités complexes et la démonstration de la formule de Moivre permettent d'obtenir $\cos mx$ et $\sin mx$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$, la résolution de l'équation binome, les formules d'Euler qui ramènent à la seule exponentielle les fonctions $\sin x$ et $\cos x$, et comme application le calcul de $\cos mx$ et de $\sin mx$ en fonction des sinus et des cosinus des multiples de x.

Puis viennent les relations entre les racines et les coefficients d'une équation algébrique, les racines multiples, l'élimination. Un Chapitre est consacré à la résolution de l'équation du troisième degré; un autre, qui doit être signalé particulièrement, se rapporte à la résolution des équations numériques. On pourra voir, en lisant, page 270, l'exemple emprunté à la Théorie de la chaînette, avec quel soin les calculs numériques sont expliqués.

Cinquième Partie : *Applications géométriques.* — Construction des courbes planes en coordonnées rectilignes et en coordonnées polaires; lieux géométriques, enveloppes dans le plan et dans l'espace, centre de courbure des courbes planes défini comme le point où la normale touche son enveloppe. Pour les courbes gauches, plan osculateur, centre de courbure défini de suite comme le point où le plan osculateur est rencontré par la droite suivant laquelle le plan normal touche son enveloppe.

Sixième Partie : *Calcul intégral.* — Après avoir démontré le théorème relatif à la substitution des infiniment petits dans la recherche de la limite d'une somme, M. Vogt considère la somme

$$f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n$$
$$(x_i < \xi_i < x_i + \Delta x_i),$$

et en montrant que cette somme a une limite, dans des conditions qui sont précisées, il établit analytiquement l'existence de l'intégrale définie par une méthode qui s'étendra d'elle-même aux intégrales doubles et aux intégrales triples. Il donne une représentation géométrique de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ et il montre comment on peut obtenir sa valeur dès que l'on connaît une fonction $F(x)$ admettant $f(x)$ comme dérivée.

Dans les Chapitres suivants : Procédés d'intégration, calcul des coefficients de la série trigonométrique qui doit représenter une fonction donnée; calcul approché d'une intégrale définie, détermination des aires, arcs de courbe, volumes, moments d'inertie à l'aide d'intégrales simples ou multiples.

Les intégrales curvilignes sont ensuite définies avec le plus grand soin, ainsi que la condition pour qu'une intégrale curviligne ne dépende que des limites du chemin d'intégration.

Je dois encore signaler le Chapitre consacré aux intégrales de surface et à leur transformation en intégrales de volume ou en intégrales curvilignes. La formule d'Ostrogradsky, ramenant une intégrale de surface à une intégrale de volume, montre sous quelle condition une intégrale de surface relative à une calotte limitée par un contour (C) demeure constante quand la calotte se déforme, le contour (C) restant fixe; la formule de Stokes donne, dans ce cas, une évaluation de l'intégrale de surface considérée au moyen d'une intégrale curviligne relative au contour (C). M. Vogt démontre la formule de Stokes en généralisant le procédé classique qui sert à établir la formule analogue de Géométrie plane

$$\int_{(C)} (P\,dx + Q\,dy) = \int\int_{(A)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Il indique aussi une autre conséquence de la formule d'Ostrogradsky, la formule de Green, fondamentale dans l'étude des fonctions de trois variables qui satisfont à la condition

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

SEPTIÈME PARTIE : *Équations différentielles.* — Généralités sur les équations différentielles. Intégration dans les cas les plus simples.

Étude particulière des équations linéaires avec une indication sur la méthode de la variation des constantes.

Équations différentielles simultanées. Équations aux dérivées partielles. Intégration de l'équation linéaire du premier ordre, indication relative à l'équation des cordes vibrantes.

Notes d'Algèbre. — Complément sur l'étude des séries. Séries absolument, uniformément convergentes.

Élimination. Théorème de Bezout sur le nombre des points communs à deux courbes algébriques.

Notes de Géométrie analytique. — Étude plus détaillée des coniques. Dans l'espace, transformation des coordonnées et, comme application, formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

Étude des surfaces du second ordre sur les équations réduites.

Axes d'une surface du second ordre.

Courbure sur une surface. Théorème de Meusnier.

Indicatrice de Dupin. Lignes de courbure.

Exercices sur les sept Parties du Volume et sur les Notes de Géométrie analytique.

On voit par cet exposé rapide et où, pour abréger, j'ai dû passer plus d'un paragraphe, tout ce que M. Vogt a pu réunir en un seul Volume. Ce Livre sera pour les étudiants un guide sûr, expérimenté, les conduisant par les voies les plus directes à des règles précises et bien préparées pour les applications. Ceux qui en auront le temps pourront revenir aux régions traversées si utilement, et achever d'y prendre l'habitude et le goût des études mathématiques.

E. LACOUR,

Professeur à l'Université de Nancy.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES

1798.

(1898, p. 241, résolue 1900, p. 377.)

Par un point m d'une conique on fait passer un cercle qui coupe cette courbe aux points a, b, c. Démontrer que, quel que soit ce cercle, la droite de Simson de m, par rapport au triangle a, b, c, passe par un point fixe.

(MANNHEIM.)

NOTE

Par M. E.-N. BARISIEN.

La très élégante solution de M. Droz-Farny ne donne pas la position du point fixe de l'énoncé. Ce point est cependant facile à déterminer par l'intersection de deux positions particulières de la droite de Simson :

1° Lorsque le cercle est tangent en m à la conique, le point a se confond avec m, et la droite de Simson du triangle abc est alors la perpendiculaire abaissée de m sur bc ou la droite qui, passant par m, est symétrique de la normale en m par rapport aux axes de la conique. Soit δ cette droite.

2° Soient a', b' les symétriques de m par rapport aux axes de la conique, et c' le point diamétralement opposé à m. Les quatre points m, a', b', c' sont sur un cercle, et la droite de Simson de m, par rapport au triangle rectangle $a'c'b'$, est la droite $a'b'$. Soit δ' cette droite. Le point fixe est à l'intersection des droites δ et δ'.

Si la conique est une ellipse rapportée à ses axes de coordonnées, et si φ désigne l'angle d'anomalie excentrique en m, les équations des droites δ et δ' sont

$$(\delta)\qquad ax\sin\varphi + by\cos\varphi = (a^2+b^2)\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$(\delta')\qquad bx\sin\varphi + ay\cos\varphi = 0.$$

Les coordonnées du point d'intersection k de ces deux droites sont donc

$$(1)\qquad x = a\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\cos\varphi,\qquad y = -b\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\sin\varphi.$$

On voit que lorsque m se déplace sur l'ellipse donnée, le point (1) parcourt l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2.$$

Le point (1) est analogue au point de Frégier p dont les coordonnées sont

$$(2)\qquad x=a\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\cos\varphi,\qquad y=-b\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\sin\varphi.$$

Il en résulte que le centre O de l'ellipse et les points k et p sont en ligne droite, avec la relation

$$\overline{\mathrm{O}m}^2=\overline{\mathrm{O}p}+\overline{\mathrm{O}k},$$

qui permet de construire le point k au moyen du point de Frégier p.

Si la conique donnée est une parabole et si m' est le symétrique de m par rapport à l'axe de la parabole, la parallèle à l'axe menée par m' rencontre la normale en m au point p de Frégier. Le point fixe k s'obtient en prenant le symétrique de p par rapport à m'. Lorsque le point m parcourt la parabole donnée, le point k décrit une parabole égale à la parabole donnée, tout comme le point p.

1803.

(1898, p. 340.)

Une conique est donnée. On prend les normales à cette courbe issues de l'un de ses points. Pour chaque normale, on mène de son pied la droite qui lui est symétrique par rapport aux axes de la conique. Démontrer que les quatre droites ainsi obtenues passent par un même point.

(Mannheim.)

SOLUTION

Par M. Duporcq.

La propriété à démontrer est un cas particulier de la suivante :

Étant données quatre normales concourantes à une co-

nique, si, par leurs pieds, on mène les droites en direction symétriques de ces normales par rapport aux axes de la conique, on obtient quatre droites concourantes.

Soit, en effet, a le pied d'une des normales considérées : la droite à mener par ce point est, en direction, symétrique par rapport aux bissectrices des axes de la tangente en a; d'ailleurs, les quatre pieds a sont sur une même hyperbole d'Apollonius, passant par le centre de la conique donnée C, et par les points à l'infini de ses axes.

Ceci posé, transformons homographiquement la figure, de sorte que les points à l'infini des bissectrices des axes aient pour transformés les points cycliques : les transformés a' des points a se trouveront visiblement encore sur une même hyperbole d'Apollonius relative à la conique C', transformée de C, et les transformées des quatre droites envisagées seront les normales à C' aux points a'. De la concourance de ces normales résulte celle des droites considérées. On voit de plus que ces dernières se coupent sur l'hyperbole d'Apollonius qui passe par les quatre pieds a.

1808.

(1893, p. 483.)

Soit M *un point quelconque de l'une des asymptotes d'une hyperbole donnée, de foyers* F *et* F'. *On considère la parabole tangente à* MF *en* F *et à* MF' *en* F'. *Montrer que le foyer de cette parabole est situé sur l'hyperbole et que le lieu du sommet de la parabole se compose de deux hyperboles.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Duporcq.

Soient a, i et j trois points d'une droite et φ le point commun aux tangentes menées par i et j à un cercle quelconque (p) tangent en a à la droite ij; selon que a est extérieur ou intérieur au segment ij, on voit aisément que les longueurs φi et φj, d'une part, ai et aj, d'autre part, ont même somme ou même différence; quand le rayon du cercle (p) varie, le lieu du point φ est donc la conique de foyers i et j et de sommet a.

Soit maintenant b un point quelconque de la droite ij, le lieu des points de contact, s, des tangentes menées de ce point aux cercles (p) est évidemment le cercle de centre b, qui passe par a; si a et b divisent harmoniquement le segment ij, on voit que ce cercle (s) est le cercle osculateur en a à la conique (φ).

Transformons homographiquement ces résultats, de sorte que i et j aient pour transformés les points cycliques, et soient F et F′ les points qui correspondent dans la nouvelle figure aux points cycliques de la première; aux cercles (p) correspondent les paraboles (P), qui passent par F et F′, et touchent la droite de l'infini au même point A; le pôle M de la droite FF′ par rapport à ces paraboles décrit évidemment la droite qui joint le point A au milieu O de FF′. Quant au point φ, il a pour transformé le foyer Φ de (P); on voit donc ainsi que le lieu de ce point est la conique de foyers F et F′ qui admet OA pour asymptote.

Au conjugué harmonique, b, de a, par rapport au segment ij, correspond le point à l'infini de la direction perpendiculaire à celle de OA, c'est-à-dire à celle de l'axe de (P); le point s a donc pour transformé le sommet S de (P). On voit ainsi que le lieu de ce sommet est la conique qui passe par les foyers F et F′, et qui a un contact du second ordre avec la conique (Φ) au point à l'infini de la direction OA.

Autres solutions de MM. Audibert, Lez et L. Ripert.

1812.

(1893, p. 100.)

Les plans osculateurs à une cubique gauche en trois de ses points a, b et c, coupent le plan abc suivant des droites concourantes. (E. Duporcq.)

SOLUTION

Par un abonné.

Le théorème est bien connu sous la forme suivante : *Si l'on considère trois points d'une cubique gauche et les plans osculateurs en ces points, le point commun aux trois plans est dans le plan commun aux trois plans.* On en trouve une démonstration dans le *Traité de Géométrie analytique* de Salmon : en considérant quatre points de la cubique et les plans osculateurs en ces points, on a deux tétraèdres dont chacun est inscrit à l'autre. L'énoncé donné par M. Duporcq résulte du théorème suivant, également connu : *Les tangentes à une cubique gauche font partie d'un complexe linéaire,* et de ce fait général : *Si les tangentes à une courbe gauche font partie d'un complexe linéaire, le plan qui contient les droites du complexe issues d'un point de la courbe est le plan osculateur en ce point,* ou encore : *les droites menées par un point de la courbe dans le plan osculateur en ce point font partie du complexe linéaire.* En regardant la cubique comme l'osculée du plan

$$\lambda^3 x - 3\lambda^2 y + 3\lambda z - w = 0,$$

de sorte que le point d'osculation a pour coordonnées 1, λ, λ^2, λ^3, on obtient d'ailleurs directement l'équation du complexe des droites menées par les points d'une cubique gauche dans les plans osculateurs en ces mêmes points; car, si (x', y', z', w') est un point du plan osculateur au point $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3)$, les coordonnées p et s de la droite qui joint ces deux points sont $p = \lambda z' - \lambda^2 y'$, $s = w' - \lambda^3 x'$, et la condition

$$\lambda^3 x' - 3\lambda^2 y' + 3\lambda z' - w' = 0$$

(qui exprime que le point est dans le plan osculateur) donne $3p - s = 0$, équation d'un complexe linéaire (cf. *Nouvelles Annales,* p. 115; 1892).

Autre réponse de M. V. Retali, qui s'exprime ainsi :

« Le théorème énoncé appartient à Chasles (*Aperçu hist.,* Note XXXIII, p. 403) : c'est la propriété fondamentale des cubiques gauches, et on la trouve démontrée, dans les livres qui traitent de ces courbes, soit par la Géométrie pure, soit par l'Analyse. »

Diverses autres réponses dans le même sens de MM. Retali, Lery, Droz-Farny, Anonyme.

1818.

(1899, p. 148.)

Le lieu des barycentres des triangles qui sont formés par une tangente mobile à une ellipse avec les axes de cette courbe est une kreuzcurve. (Cardoso-Laynes.)

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Si A et B sont les points où la tangente à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

au point $(x'y')$ coupe les axes, nous avons évidemment

$$OA = \frac{a^2}{x'}, \qquad OB = \frac{b^2}{y'};$$

les coordonnées du barycentre G du triangle OAB sont donc

$$\xi = \frac{a^2}{3x'}, \qquad \eta = \frac{b^2}{3y'}$$

et l'équation du lieu cherché est

$$\frac{a^2}{\xi^2} + \frac{b^2}{\eta^2} = 9.$$

Autrement : Le lieu du point M d'intersection des parallèles menées aux axes par les points A et B est, par définition, la *kreuzcurve* correspondante à l'ellipse donnée; mais $3.GO = OM$; donc le lieu de G est la *kreuzcurve* relative à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 9.$$

Si, au lieu d'une ellipse, on considère une hyperbole, le lieu de G est une *kohlenspitzencurve.*

Autres solutions de MM. H. BROCARD, A. DROZ-FARNY, G. FONTENÉ, LEZ, etc.

1819.

(1899, p. 195.)

Soient S *et* S' *deux coniques se coupant en quatre points* A, B, C, D :

1° *Démontrer que le lieu des points* M *tels que le faisceau* M(ABCD) *soit harmonique, se compose de trois coniques passant par* A, B, C, D. *Former l'équation de l'ensemble de ces trois coniques;*

2° *Quelle relation doit exister entre les invariants* S *et* S′ *pour que, parmi les trois coniques trouvées se trouve la conique* S; *quelles sont, de même, les relations nécessaires pour que* S *et* S′ *soient deux des trois coniques; quelle est alors l'équation de la troisième?* (H. Vogt.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Si b', c', d' sont les rayons respectivement conjugués harmoniques de $|AB|$ par rapport à $|AC|$ et $|AD|$, de $|AC|$ par rappòrt à $|AD|$ et $|AB|$, de $|AD|$ par rapport à $|AB|$ et $|AC|$, le lieu des points M est formé évidemment par les trois coniques du faisceau qui touchent au point A respectivement les droites b', c', d' (théorème connu; *voir*, par exemple, Steiner-Schröter, *Vorlesungen*, p. 124). Le faisceau $A(b'c'd')$ est le covariant cubique du faisceau A(BCD) : lorsqu'une des coniques S, S′ se trouve parmi les trois coniques harmoniques, sa tangente au point A doit être un des trois rayons b', c', d'; si S et S′ sont harmoniques et touchent au point A respectivement les droites b' et c', la troisième conique du groupe est tangente en A au rayon conjugué harmonique de $|AD|$ par rapport à b' et c'.

Désignons par U le discriminant du faisceau $s+\lambda s'$; par H le covariant hessien de U; par Q le jacobien du système U, H; par Δ_1 et Δ_2 les discriminants respectifs de S et S′; par θ_1 et θ_2 les deux invariants simultanés du système S, S′ et posons pour abréger

$$\begin{aligned}
27\Delta_1\Delta_2^2 - 9\Delta_2\theta_1\theta_2 + 2\theta_2^3 &= L,\\
9\Delta_1\Delta_2\theta_2 - 6\Delta_2\theta_1^2 + \theta_1\theta_2^2 &= M,\\
9\Delta_1\Delta_2\theta_1 - 6\Delta_1\theta_2^2 + \theta_1^2\theta_2 &= N,\\
27\Delta_1^2\Delta_2 - 9\Delta_1\theta_1\theta_2 + 2\theta_1^3 &= P,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
U &= 3\Delta_1 + 3\theta_1\lambda + 3\theta_2\lambda^2 + 3\Delta_2\lambda^3,\\
H &= 2(3\Delta_1\theta_2 - \theta_1^2) + 2(9\Delta_1\Delta_2 - \theta_1\theta_2)\lambda + 2(3\Delta_2\theta_1 - \theta_2^2)\lambda^2,\\
Q &= -L\lambda^3 - 3M\lambda^2 + 3N\lambda + P
\end{aligned}$$

et les racines λ_1, λ_2, λ_3 de l'équation $Q=0$ donnent les trois coniques harmoniques du faisceau : l'équation de l'ensemble de ces trois coniques est donc

$$(S+\lambda_1 S')(S+\lambda_2 S')(S+\lambda_3 S') = 0.$$

qui, ayant égard aux relations entre les racines et les coefficients de $Q = 0$, devient

$$L.S^3 + 3M.S^2S' - 3N.S.S'^2 + P.S'^3 = 0.$$

Si parmi les trois coniques harmoniques se trouve S, l'équation $Q = 0$ doit avoir une racine nulle, donc $P = 0$; lorsque aussi S' est harmonique, $Q = 0$ doit avoir une racine infinie, donc $L = 0$; si ces deux conditions sont vérifiées ensemble nous avons donc

$$2\Delta_2\Theta_1^3 = 2\Delta_1\Theta_2^3 = 9\Theta_1\Theta_2 - 27\Delta_1\Delta_2$$

et l'équation de la troisième conique est

$$M.S + NS' = 0.$$

1830.

(1899, p. 532.)

Soient A *un point d'une conique dont l'un des foyers est le point* F, T *le point de rencontre de la tangente au point* A *avec l'axe focal; au point* A *sur* AF *et au point* T *sur* AT, *on élève des perpendiculaires qui se coupent au point* S. *La droite* FS *rencontre la normale en* A, *au centre de courbure de la conique en ce point.*

(C. Servais.)

SOLUTION

Par M. Mannheim.

Du point N, où la normale à la conique en A rencontre l'axe focal, élevons à cette normale la perpendiculaire NP. Cette droite coupe au point P le rayon vecteur AF; la perpendiculaire à cette droite, élevée du point P, rencontre la normale en A, au centre de courbure α de la conique ([1]). Le point F est le centre de similitude des quadrilatères semblables FTSA, $FN\alpha P$; la droite FS passe alors par le centre de courbure α, donc, etc.

([1]) Voir *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 48.

[O2b]

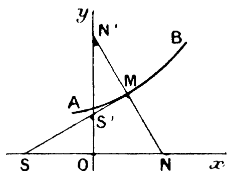
PROBLÈMES SUR LES NORMALES AUX COURBES PLANES;

PAR M. ED. COLLIGNON.

COURBES DANS LESQUELLES LE PRODUIT NN' DES DEUX NORMALES EST CONSTANT.

Par le point M de la courbe AB que l'on cherche, menons la normale MN et la tangente MS (*fig.* 1). La

Fig. 1.



normale coupe les axes aux points N et N' et la tangente les rencontre aux points S et S'.

Si le produit $MN \times MN'$ des deux normales est constant, il en sera de même du produit $MS \times MS'$ des deux tangentes, car les triangles N'MS', SMN, rectangles en M et semblables, donnent l'égalité

$$MS \times MS' = MN \times MN'.$$

L'équation différentielle des courbes demandées est, en appelant p le rapport $\frac{dy}{dx}$,

$$y\sqrt{1+p^2} \times \frac{x\sqrt{1+p^2}}{p} = C,$$

C désignant le produit constant, qu'on suppose donné; l'équation revient à la suivante :

$$(1) \qquad xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = \mathrm{C}.$$

La constante C est homogène au carré d'une longueur a, et l'on peut la représenter par a^2 ou par $-a^2$, suivant le signe qui lui est attribué.

L'équation (1) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{y\,dy}{dx} + \frac{y\,dx}{dy} = \frac{\mathrm{C}}{x};$$

le problème revient donc à trouver une courbe où la somme de la sous-tangente et de la sous-normale soit inversement proportionnelle à l'abscisse.

Si dans l'équation (1) on change p en $-\frac{1}{p}$ tout en conservant les valeurs de x et y, on obtient l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes cherchées; or cette substitution revient à changer le signe de C, c'est-à-dire à remplacer a^2 par $-a^2$. Il résulte de là que les deux équations

$$xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = a^2$$

et

$$xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = -a^2$$

représentent deux séries de courbes qui se coupent à angle droit; les unes sont tangentes aux droites MS, comme nous l'avons supposé d'abord; les autres sont tangentes aux droites MN.

On voit en même temps que les deux produits $\mathrm{MN} \times \mathrm{MN}'$, $\mathrm{MS} \times \mathrm{MS}'$, égaux en valeur absolue, doivent être regardés comme de signes contraires au point de vue analytique. Si les tangentes MS, MS′ reçoivent le même signe, comme quantités portées dans le même sens à partir du point M, les normales MN, MN′, portées en sens opposés, doivent recevoir des signes différents, ou inversement.

L'intégration de l'équation donnée peut se faire en changeant de variables, de manière à ramener l'équation à la forme linéaire. Posons

$$x = \sqrt{a}\sqrt{x'}, \qquad y = \sqrt{a}\sqrt{y'},$$

x' et y' représentant des variables nouvelles. On en déduit

$$xy = a\sqrt{x'y'},$$

$$dx = \sqrt{a}\frac{dx'}{2\sqrt{x'}}, \qquad dy = \sqrt{a}\frac{dy'}{2\sqrt{y'}},$$

et l'équation devient

$$a\sqrt{x'y'}\left(\frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{y'}}\frac{dy'}{dx'} + \frac{\sqrt{y'}}{\sqrt{x'}}\frac{dx'}{dy'}\right) = a^2,$$

ce qui se réduit à la forme simple

$$x'\frac{dy'}{dx'} + y'\frac{dx'}{dy'} = a.$$

Posons $\frac{dy'}{dx'} = p'$; il viendra

$$p'x' + \frac{y'}{p'} = a,$$

ou bien

$$x'p'^2 - ap' + y' = 0.$$

Cette équation se ramène par la différentiation à la forme linéaire; il vient en effet, en observant que dy' est identique à $p'\,dx'$,

$$p'^2\,dx' + 2x'p'\,dp' - a\,dp' + p'\,dx' = 0,$$

équation qui peut s'écrire comme il suit :

$$\frac{dx'}{dp'} + \frac{2p'}{p'^2 + p'} x' = \frac{a}{p'^2 + p'},$$

ou encore

$$\frac{dx'}{dp'} + \frac{2}{p' + 1} x' = \frac{a}{p'^2 + p'}.$$

Cherchons d'abord l'intégrale de l'équation réduite à son premier membre; il viendra, en séparant les variables,

$$\frac{dx'}{x'} + \frac{2\,dp'}{p' + 1} = 0,$$

et en intégrant

$$x'(p' + 1)^2 = C'.$$

C' désigne la constante introduite par l'intégration lorsqu'on réduit à zéro le second membre de l'équation différentielle. En prenant C' comme une variable fonction de p', on pourra la déterminer de manière à satisfaire à l'équation où le second membre serait rétabli. Il vient, en faisant les substitutions et les réductions,

$$dC' = \frac{(p' + 1)\,a\,dp'}{p'} = a\left(1 + \frac{1}{p'}\right) dp'.$$

Donc

$$C' = C'' + ap' + a\,l(p'),$$

C'' étant une nouvelle constante arbitraire.

On aura, pour la valeur de x' en fonction de p',

$$x' = \frac{C'' + ap' + a\,l(p')}{(p' + 1)^2}.$$

On obtiendra ensuite y' en intégrant la fonction

$$dy' = p'\,dx',$$

où x' devra être remplacé par sa valeur en fonction de p'. Puis x' et y' serviront à déterminer x et y par les relations

$$x = \sqrt{ax'}, \qquad y = \sqrt{ay'} \quad (^1).$$

La solution est donc ramenée à des quadratures; mais si elle suffit pour déterminer par le calcul autant de points que l'on voudra des courbes cherchées, elle est trop compliquée pour qu'on puisse la discuter commodément d'après l'examen des équations obtenues. La discussion est beaucoup plus facile sur l'équation différentielle donnée,

$$xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = a^2.$$

Elle suffit, en effet, pour donner une idée exacte de la forme de la courbe, sauf à employer la solution rigoureuse pour la construire, s'il en est besoin.

Observons d'abord que les deux axes coordonnés satisfont chacun à l'équation (1). Si l'on pose $x = 0$, ce qui donne p infini, l'équation peut être regardée comme satisfaite quel que soit y. De même, si l'on fait $y = 0$, en rendant p nul et $\frac{1}{p}$ infini, x peut recevoir une valeur quelconque.

Appelons α l'angle MSX de la tangente avec l'axe Ox, égal à l'angle MN'O que fait la normale avec l'axe Oy

---

(1) Si l'on avait fait usage de l'équation $xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = -a^2$, il aurait suffi de changer le signe de a dans l'équation qui donne x', et de poser

$$x' = \frac{C'' - ap' - a\,l(p')}{(p'+1)^2},$$

en conservant les formules de transformation

$$x = \sqrt{ax'}, \qquad y = \sqrt{ay'}.$$

pris dans le sens négatif. On aura

$$p = \tang \alpha, \qquad \frac{1}{p} = \cot \alpha,$$

et

$$p + \frac{1}{p} = \tang \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

L'équation (1) prend la forme

$$xy = C \sin \alpha \cos \alpha = \pm a^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

en mettant en évidence le signe de la constante C.

Nous admettrons d'abord que la constante soit positive, et nous prendrons les équations

$$xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = a^2, \qquad xy = a^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Considérons dans le plan de la figure le lieu des points qui donnent à la dérivée p, ou, ce qui revient au même, à l'angle α, une valeur déterminée.

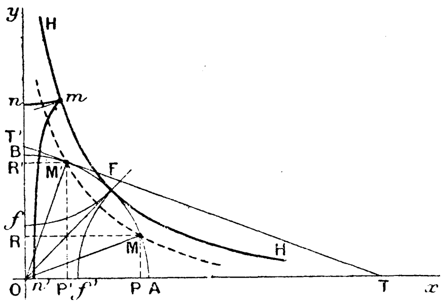
Ce lieu est l'hyperbole équilatère représentée par la dernière équation qu'on vient d'écrire, dans laquelle on attribuera à l'angle α une valeur arbitraire constante.

En faisant varier l'angle α, nous obtiendrons une série d'hyperboles ayant toutes pour centre le point O, et pour asymptotes les axes coordonnés, toutes semblables entre elles et le long desquelles les courbes cherchées auront pour tangentes des droites dont le parallélisme est défini.

Nous pouvons nous borner à chercher ce qui se passe dans l'angle $y\mathrm{O}x$ formé par les parties positives des axes; l'angle α ne doit alors recevoir que des valeurs comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$.

Il est facile de construire ces hyperboles. Du point O comme centre avec a pour rayon (*fig.* 2) décrivons une

Fig. 2.



circonférence et menons une droite OM faisant avec Ox un angle $MOx = \alpha$, choisi arbitrairement. Abaissons les perpendiculaires MP, MR sur les axes; nous aurons pour l'aire du rectangle ORMP le produit

$$OP \times OR = a \cos\alpha \times a \sin\alpha = a^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Nous obtiendrons un rectangle égal en menant le rayon OM′ sous l'angle $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, ce qui revient simplement à permuter les sinus et cosinus dans l'équation précédente. Les aires des deux rectangles étant les mêmes, l'hyperbole

$$xy = a^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

passe par les points M et M′, et si l'on trace cette hyperbole, on saura qu'en chacun de ses points passent deux courbes satisfaisant à l'équation (1), et dont les tangentes sont respectivement parallèles aux rayons OM et OM′.

Considérons en particulier celles des courbes cherchées qui passent au point M′. L'une d'elles a une tangente parallèle à OM; l'autre a pour tangente la droite OM′ elle-même; celle-ci coupe donc la circonférence AB à angle droit. Il en est de même au point M, où l'une des deux courbes, passant en ce point, est tangente au rayon MO.

Il en résulte que le cercle AB, représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

est l'une des trajectoires orthogonales des courbes (1), et par conséquent son équation doit satisfaire à l'équation (1) quand on y change a^2 en $-a^2$. On a, en effet,

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

$$p = -\frac{x}{y}, \qquad \frac{1}{p} = -\frac{y}{x},$$

et par suite

$$xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = -xy\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = -(x^2 + y^2) = -a^2.$$

Il est facile de vérifier sur la figure que le produit des deux tangentes M′T et M′T′ menées au cercle, en un point M′, est égal en valeur absolue au produit des deux normales confondues en M′O, c'est-à-dire à a^2.

Menons la bissectrice OF de l'angle des axes; l'hyperbole correspondante HH′ sera tangente en F à la circonférence AB, puisque les points M et M′ se confondent alors en un seul au milieu du quadrant AB.

L'hyperbole HH′ est la limite en dehors de laquelle les courbes cherchées ne peuvent s'étendre; car au delà la dérivée p devient imaginaire. Tout le long de l'hyperbole limite HH′,

$$xy = \tfrac{1}{2}a^2,$$

l'angle α est égal à $\frac{\pi}{2}$, p est égal à l'unité, et les deux tangentes aux deux courbes qui passent généralement par un même point sont confondues en une seule : ce qui montre qu'en tous les points de HH' les courbes cherchées ont un point de rebroussement.

Ces caractères une fois constatés, on peut reconnaître aisément la forme de la courbe.

D'un point quelconque m de l'hyperbole limite HH' partent deux branches de courbe, tangentes à la fois à une parallèle à la bissectrice de l'angle des axes. En ce point on a $p = 1$; si l'on suit la branche pour laquelle p va en diminuant, l'inclinaison de la tangente sur l'axe Ox diminuera graduellement de $p = 1$ au point m, à $p = 0$ au point n où la courbe rencontre l'axe Oy; la rencontre avec cet axe a lieu à angle droit, et comme le produit des normales reste constant sur toute la courbe, on reconnaît que le rayon de courbure au point n est égal à $\frac{a^2}{On}$, pour que le produit soit en ce point égal à a^2.

L'autre branche mn' est celle pour laquelle p va en croissant, de la valeur $p = 1$ au point m, à une valeur infinie au point où la courbe coupe l'axe Ox. La rencontre se fait encore à angle droit, et le rayon de courbure au point n' est égal à $\frac{a^2}{On'}$. On peut ajouter que la courbe mn' coupe la circonférence AB à angle droit.

Le tracé nmn' de la courbe cherchée dans l'angle droit yOx doit se répéter dans les trois autres angles symétriquement par rapport aux axes, et l'on obtient une courbe continue, qui coupe à angle droit les axes et la circonférence OA, et qui a quatre points de rebroussement sur l'hyperbole HH' et sur l'hyperbole symétrique.

La courbe qui passe au point F part de ce point tangentiellement à FO; une branche Ff vient tomber à angle droit sur l'axe Oy; l'autre, symétrique par rapport à la droite FO, tombe à angle droit en f' sur l'axe Ox.

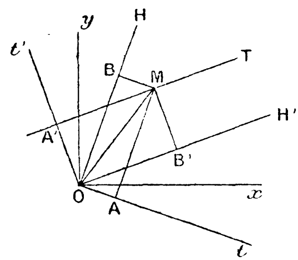
Cherchons sous quel angle la courbe passant en un point M coupe l'hyperbole $xy = k^2$, passant par le même point.

La tangente à l'hyperbole est définie au point (x, y) par le rapport $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, et la tangente à la courbe l'est par la valeur de p. Soit φ l'angle compris entre ces deux directions. Nous aurons

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{p + \frac{y}{x}}{1 - p\frac{y}{x}} = \frac{px + y}{x - py}.$$

Soit MT la direction de la tangente à la courbe, menée sous une inclinaison égale à p (*fig.* 3). Soit Ot

Fig. 3.



une droite menée par l'origine sous l'inclinaison $-p$. Nous appellerons cette droite l'*antiparallèle* à la tangente MT. L'équation de la droite Ot est

$$y + px = 0.$$

La droite dont l'équation est $x - py = 0$, ou $y - \frac{x}{p} = 0$, est la perpendiculaire OH élevée à l'origine sur l'antiparallèle Ot; les distances MA, MB du point M à ces deux droites sont respectivement

$$\text{MA} = \frac{y+px}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad \text{MB} = \frac{x-py}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\text{MA}}{\text{MB}} = \frac{\text{MA}}{\text{OA}} = \operatorname{tang}\text{MOA};$$

et l'angle φ est donné sur la figure par l'angle MOA, compris entre le rayon vecteur OMA et l'antiparallèle à la tangente MT.

Si l'on change p en $\frac{1}{p}$, on aura la tangente trigonométrique de l'angle φ' que fait la seconde courbe avec l'hyperbole, par l'équation

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\frac{1}{p}+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{px}} = \frac{x+py}{px-y}.$$

Menons par l'origine les droites rectangulaires

$$x+py=0 \qquad \text{et} \qquad px-y=0.$$

L'une est la droite Ot', perpendiculaire à la tangente MT; elle est antiparallèle à la seconde tangente, dont le coefficient angulaire est $\frac{1}{p}$; l'autre est la droite OH', parallèle à la tangente MT et perpendiculaire à Ot'. Il vient encore, en abaissant MB' perpendiculaire sur OH',

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\text{MA}'}{\text{MB}'} = \frac{\text{MA}'}{\text{OA}'} = \operatorname{tang}\text{MOA}',$$

de sorte que l'angle φ' est l'angle MOA'.

Le long de l'hyperbole limite, $xy = \frac{a^2}{2}$, on a

$$p=1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\varphi' = \frac{x+y}{x-y}.$$

L'angle φ est l'angle que fait le rayon vecteur OM avec les bissectrices de l'angle des axes.

Occupons-nous à présent de l'équation

$$xy\left(p+\frac{1}{p}\right)=-a^2,$$

qui se transformerait en celle-ci :

$$xy=-a^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

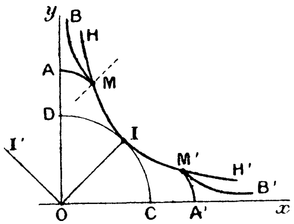
Le changement de a^2 en $-a^2$ revient au changement de p en $-\frac{1}{p}$, et les nouvelles courbes représentées par cette équation différentielle sont les trajectoires orthogonales des premières. Les lignes qui assurent à la tangente à la courbe un parallélisme déterminé sont les mêmes hyperboles que nous avons définies tout à l'heure; les valeurs de p sont égales à -1 tout le long de l'hyperbole limite $xy=\frac{1}{2}a^2$. Si donc on part d'un point M pris sur cette hyperbole limite au-dessus de la bissectrice, OI, de l'angle yOx, la courbe présentera en ce point un rebroussement tangentiel à la bissectrice,

$$y=-x,$$

de l'angle yOx'; de ce point partent deux branches de courbes divergentes MA, MB; pour l'une MA on aura des valeurs négatives de p, qui varieront de -1 à 0 en diminuant graduellement en valeur absolue; la branche correspondante vient tomber à angle droit sur l'axe Oy. La seconde branche MB correspond aux valeurs négatives de p qui commencent à -1, et croissent indéfiniment en valeur absolue. Elle prend donc des inclinaisons de plus en plus grandes par rapport à l'axe Ox, sans pouvoir rejoindre l'axe Oy, dont elle s'approche asymptotiquement, en restant toujours comprise entre l'hyperbole limite IH et l'axe Oy, asymptote commune aux deux courbes (*fig.* 4).

Les mêmes conclusions s'appliquent à la courbe par-

Fig. 4.



tant du point M′ dans l'angle I O x, et dessinant les deux branches M′A′, normale à l'axe Ox, et M′B′, asymptote au même axe.

Si l'on rapproche graduellement les points M et M′ du point I sur la bissectrice les deux branches M′A′, MA convergent vers une limite commune, c'est-à-dire vers la circonférence CID, $x^2+y^2=a^2$, qui, comme nous l'avons vu, satisfait à l'équation proposée. Les deux autres branches MB, M′B′ se fondent en une seule ligne, qui passe au point I tangentiellement à la circonférence et à l'hyperbole limite, et qui va toucher à l'infini les deux axes coordonnés.

Nous compléterons ces aperçus, qui constituent l'*analyse qualitative,* et non quantitative, du problème, par la recherche des rayons de courbure des courbes obtenues, et par l'indication de solutions approximatives, applicables à des portions de ces mêmes courbes.

Rayons de courbure. — Nous commencerons par chercher la seconde dérivée $q=\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$. De l'équation (1), mise sous la forme

$$xy(1+p^2) - a^2p = 0,$$

nous tirons en différentiant, et en regardant x comme la variable indépendante,

$$y(1+p^2) + px(1+p^2) + 2pxyq - a^2q = 0,$$

d'où l'on déduit, en résolvant l'équation par rapport à q et en substituant au produit xy sa valeur $\frac{pa^2}{1+p^2}$,

$$q = \frac{(y+px)(1+p^2)^2}{a^2(1-p^2)}.$$

Le rayon de courbure ρ au point (x, y) est donné par la formule générale

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

ce qui donne ici

$$(2) \qquad \rho = \frac{a^2(1-p^2)}{(y+px)\sqrt{1+p^2}}.$$

On peut vérifier que tout le long de l'hyperbole limite, p étant égal à l'unité, ρ est nul, ce qui correspond aux points de rebroussement des courbes. Le long des axes coordonnés on retrouve les valeurs du rayon de courbure déjà obtenues, savoir le long de l'axe Oy, pour $x = 0$ et $p = 0$,

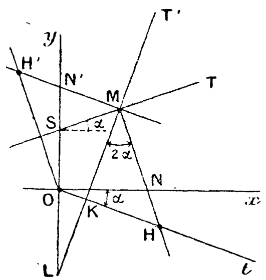
$$\rho = \frac{a^2}{y},$$

et le long de l'axe Ox, pour $y = 0$ et p infini,

$$\rho = -\frac{a^2}{x}.$$

L'équation (2) se prête à une construction géométrique. Soit M le point pour lequel on demande de construire le rayon de courbure ρ (*fig.* 5), et soient MT la

Fig. 5.



tangente à la courbe en ce point, MN la normale, α l'angle de la tangente avec l'axe Ox. L'équation

$$y + px = 0$$

définit la droite Ot, qui passe par l'origine et qui fait avec l'axe Ox l'angle α dans le sens négatif. La distance MK du point M à la droite Ot est égale à

$$\mathrm{MK} = \frac{y + px}{\sqrt{1 + p^2}},$$

x et y étant les coordonnées du point M.

Donc

$$(y + px)\sqrt{1 + p^2} = \mathrm{MK} \times (1 + p^2),$$

et l'équation (2) prend la forme

$$\rho = \frac{a^2}{\mathrm{MK}} \frac{1 - p^2}{1 + p^2}.$$

Mais $p = \tang\alpha$; le rapport

$$\frac{1 - p^2}{1 + p^2} = \frac{1 - \tang^2\alpha}{1 + \tang^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos 2\alpha,$$

et, par conséquent,

$$\rho = \frac{a^2}{\text{MK}} \times \cos 2\alpha.$$

Or l'angle KMN que fait la droite MK avec la normale MN est égal à l'angle des deux droites ST et Ot, qui leur sont respectivement perpendiculaires, et par suite égal à 2α, et l'on a

$$\text{MH} = \frac{\text{MK}}{\cos 2\alpha},$$

en appelant MH le segment intercepté par la droite Ot sur la normale MN. Donc enfin

$$\rho = \frac{a^2}{\text{MH}}.$$

Nous avons appelé la droite Ot l'*antiparallèle* à la tangente ST, menée par le point O. On a donc ce théorème :

Le rayon de courbure au point M *est inversement proportionnel au segment* MH *déterminé, sur la normale* MN, *par le point* M *et le point de rencontre* H *de* MN *avec l'antiparallèle à la tangente,* Ot, *menée par l'origine.*

Par le point M passent deux courbes, qui ont en général deux tangentes distinctes, et deux normales correspondantes; soient MT′, MN′ la tangente et la normale à la seconde courbe passant au point M. Il est facile de reconnaître que MT′ coïncide avec la perpendiculaire MK abaissée de M sur l'antiparallèle à MT; car $-p$ étant le coefficient angulaire de cette antiparallèle, $-\frac{1}{-p} = +\frac{1}{p}$ est le coefficient angulaire de la perpendiculaire MK; or c'est aussi le coefficient angulaire de la tangente à la seconde courbe passant en M.

Il en résulte que la seconde normale MN′ est parallèle à Ot, antiparallèle à la première tangente. Pour la même raison la perpendiculaire OK′, abaissée de l'origine sur la première tangente MT, est l'antiparallèle à la seconde tangente, et est parallèle à la première normale. Le rayon de courbure ρ' de la seconde courbe sera donc donné par la formule

$$\rho' = \frac{a^2}{\text{MH}'},$$

et comme la figure OHMH′ est un parallélogramme, on peut remplacer MH par OH′, et MH′ par OH, ce qui revient à poser

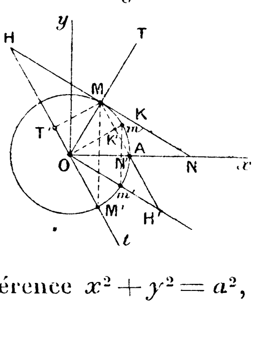
$$\rho = \frac{a^2}{\text{OH}'}, \qquad \rho' = \frac{a^2}{\text{OH}},$$

et à formuler la règle suivante :

Le rayon de courbure d'une des courbes au point M *est égal à* a^2 *divisé par le segment compris, sur une parallèle à la normale menée par l'origine, entre le point* O *et la normale à l'autre courbe.*

Appliquons cette construction à la recherche du rayon de courbure de la courbe au point M (*fig.* 6) où elle

Fig. 6.



coupe la circonférence $x^2+y^2=a^2$, tangentiellement au rayon.

La tangente au point M étant le rayon MO, l'antiparallèle à cette tangente menée par l'origine est le rayon OM′, symétrique de OM par rapport à l'axe OX. Ce rayon prolongé coupe au point H la normale MH à la courbe, tangente à la circonférence; et l'on a

$$\rho = \frac{a^2}{\text{MH}} = \frac{\overline{\text{OM}}^2}{\text{MH}} = \text{MK},$$

en déterminant le point K sur la tangente au cercle, par l'intersection de la droite OK perpendiculaire à OH.

On peut observer que l'angle MOK est égal à l'angle MOM′ diminué de l'angle droit KOM′; il est donc égal à $2\alpha - \frac{\pi}{2}$. L'angle MOA étant égal à α, l'angle KOA est la différence $\alpha - \left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Donc la droite OK est parallèle à la tangente à la seconde courbe qui passe au point M. On aura la tangente à cette seconde courbe en menant par M une perpendiculaire MT′ à OM′, et la normale, en menant par M une parallèle MN′ à cette même droite. L'antiparallèle à la tangente MT′ menée par le point O est la droite Om', symétrique du rayon OK; elle coupe en H′ la normale MN′, et par conséquent le rayon de courbure de la seconde courbe est donné par l'équation

$$\rho' = \frac{a^2}{\text{MH}'} = \frac{\overline{\text{OM}}^2}{\text{MH}'}.$$

Or OH′ est perpendiculaire à OM, puisque l'angle H′Ox est égal à l'angle mOx, égal lui-même au complément MOy de l'angle MOx. Donc enfin

$$\rho' = \text{MK}',$$

K′ étant le pied de la perpendiculaire OK, abaissée sur la direction de MH′.

Les rayons de courbure des courbes au point où elles coupent la circonférence sont, en résumé, les segments MK, MK'; avec leurs signes, l'un est égal à $+a\cos 2\alpha$, et l'autre à $-a\cos 2\alpha$. La formule confirme ces résultats.

Il est aisé de trouver la relation entre les rayons de courbure ρ et ρ' des deux courbes qui passent en un même point (x, y); soit p le coefficient d'inclinaison de la tangente à l'une de ces courbes, celle qui a le rayon de courbure ρ. On aura

$$\rho = \frac{a^2(1-p^2)}{(y+px)\sqrt{1+p^2}}.$$

Pour avoir le rayon de courbure ρ' de l'autre courbe, nous changerons p en $\frac{1}{p}$, ce qui donne

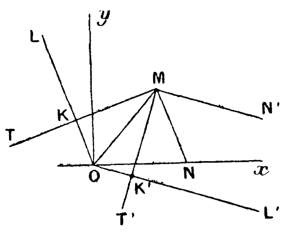
$$\rho' = \frac{a^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}{\left(y+\frac{x}{p}\right)\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}} = -\frac{a^2(1-p^2)}{(py+x)\sqrt{1+p^2}}.$$

Le rapport des valeurs absolues de ρ et de ρ' sera donc égal à

$$\left|\frac{\rho}{\rho'}\right| = \frac{py+x}{y+px}.$$

Soient M le point considéré (*fig.* 7), MT et MT' les

Fig. 7.



tangentes aux deux courbes qui y passent. Menons par l'origine les deux droites

$$py+x=0, \qquad y+px=0.$$

La première, OL, est la droite abaissée du point O perpendiculairement à la tangente MT, dont le coefficient angulaire est p. La seconde, OL′, est la perpendiculaire abaissée sur l'autre tangente MT′. Les distances MK, MK′ du point M à ces deux droites sont respectivement égales aux quantités

$$\mathrm{MK} = \frac{py + x}{\sqrt{1 + p^2}}, \qquad \mathrm{MK'} = \frac{y + px}{\sqrt{1 + p^2}},$$

et l'on a, par conséquent,

$$\left|\frac{\rho}{\rho'}\right| = \frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{MK'}}.$$

Le rapport des rayons de courbure, pris en valeur absolue, est égal au rapport des distances du point M aux deux droites OL, OL′, menées par l'origine antiparallèlement aux tangentes MT′, MT, ou, ce qui revient au même, parallèlement aux normales MN, MN′.

Le coefficient p étant le même tout le long de l'hyperbole $xy = k^2$ qui passe par le point M, les droites OL et OL′ restent fixes pour tous les points pris sur cette hyperbole, et les rayons de courbure correspondants sont entre eux, en valeur absolue, comme les distances de chaque point à ces deux droites.

On trouverait facilement d'autres relations entre les rayons de courbure ρ et ρ'. Si l'on multiplie les deux rayons, par exemple, il vient

$$\begin{aligned}\rho\rho' &= -\frac{a^4(1 - p^2)^2}{(1 + p^2)[p(x^2 + y^2) + (1 + p^2)xy]}\\ &= -\frac{a^4(1 + p^2)^2}{p(1 + p^2)(x^2 + y^2 + a^2)},\end{aligned}$$

en remplaçant $xy(1 + p^2)$ par sa valeur $a^2 p$, en vertu de l'équation différentielle de la courbe. Si l'on remplace p par $\tang\alpha$, il vient

$$\rho\rho' = -\frac{a^4 \cos 2\alpha}{2(x^2+y^2+a^2)\tang 2\alpha}.$$

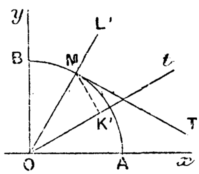
On obtiendrait aussi la relation

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{a^2(1+p)}(y-x) = \frac{2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)}\,\frac{y-x}{a^2}.$$

Les formules que nous avons obtenues se rapportent aux courbes, pour lesquelles a^2 est pris positivement dans l'équation donnée. Si l'on change le signe de a^2, on aura les résultats afférents à leurs trajectoires orthogonales.

Comme vérification, nous devons trouver le rayon de courbure du cercle $x^2+y^2=a^2$, lorsqu'on prend le point M sur sa circonférence AB (*fig.* 8). On aura alors

Fig. 8.



$$\rho = -\frac{a^2(1-p^2)}{(y+px)(\sqrt{1+p^2})};$$

MT est la tangente à la circonférence au point M.

On a au point M

$$p = -\frac{x}{y};$$

donc

$$1-p^2 = \frac{y^2-x^2}{y}, \qquad y+px = y-\frac{x^2}{y^2} = \frac{y^2-x^2}{y},$$

$$\sqrt{1+p^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{a}{y},$$

et, par conséquent,

$$\rho = -\frac{a^2(y^2-x^2)}{(y^2-x^2)\times a} = -a.$$

Le rayon OM est ici la normale à l'une des courbes qui passent au point M; c'est en même temps l'antiparallèle à la tangente à l'autre courbe. La droite Ot, qui fait avec Ox l'angle $tOx = MOy$, est l'antiparallèle à la tangente MT à la première.

Les droites OL et OL' de la *fig.* 7 ont donc ici les positions Ot, OM; et les distances MK, MK' du point M à ces deux droites sont égales respectivement à o et à MK'.

Le second rayon de courbure ρ' sera donc donné par l'équation

$$\left|\frac{\rho}{\rho'}\right| = \frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{MK}'} = \frac{0}{\mathrm{MK}'};$$

ce qui montre que ρ' est infini : résultat que la formule générale fait voir directement, lorsqu'on y fait

$$p = -\frac{y}{x}.$$

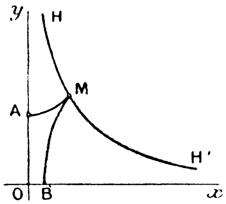
Formules approximatives, applicables à certaines portions des courbes. — L'équation

$$xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = a^2$$

se simplifie approximativement quand p est très grand, et quand p est très petit.

Or il en est ainsi pour les courbes MA, MB (*fig.* 9),

Fig. 9.



dans les régions qui se rapprochent des axes coordonnés.

La dérivée p est égale à l'unité au point M, sur l'hyperbole limite HH'; et si l'on suit la courbe MA, p diminue jusqu'à zéro à mesure qu'on se rapproche du point A; alors $\frac{1}{p}$ est beaucoup plus grand que p, et dans la région voisine de l'axe Oy, on peut réduire l'équation à la forme

$$\frac{xy}{p} = xy\frac{dx}{dy} = a^2,$$

ce qui donne, en séparant les variables et en intégrant,

$$\frac{x^2}{2} - a^2 l\frac{y}{a} = \text{const.}$$

Il en est de même pour la courbe MB, dans le voisinage de l'arc Ox; c'est alors p qui augmente indéfiniment, et $\frac{1}{p}$ qui est négligeable. L'équation se réduit à la forme

$$xyp = xy\frac{dy}{dx} = a^2,$$

ce qui conduit à l'équation primitive

$$\frac{y^2}{2} - a^2 l\frac{x}{a} = \text{const.}$$

Ces formules sont en défaut pour la partie voisine des points de rebroussement M, mais elles s'appliquent aux arcs voisins des points A et B. Si l'on détermine les rayons de courbure des courbes approximatives aux points A et B où elles coupent les axes, on trouvera pour les sous-normales

$$\frac{x\,dx}{dy} = \frac{a^2}{y},$$

d'où l'on tire

$$\rho_A = \frac{a^2}{OA},$$

au point A; et pour le point B

$$\frac{y\,dy}{dx} = \frac{a^2}{x}, \qquad \text{par suite} \qquad \rho_B = \frac{a^2}{OB};$$

ce sont les valeurs exactes des rayons de courbure aux points A et B.

Pour voir l'étendue à laquelle les équations approximatives s'appliquent, cherchons à vérifier pour elles l'équation différentielle proposée. On aura

$$p = \frac{xy}{a^2}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{a^2}{xy},$$

et

$$xy\left(p + \frac{1}{p}\right) = xy\left(\frac{xy}{a^2} + \frac{a^2}{xy}\right) = \frac{x^2y^2}{a^2} + a^2.$$

Cette quantité n'est pas constante, mais elle approche de la valeur a^2, pourvu que $\frac{x^2y^2}{a^2}$ soit suffisamment petit, ou que l'arc considéré de courbe soit renfermé entre les axes et une hyperbole $xy = ka^2$, k étant suffisamment petit. Le produit $xy\left(p + \frac{1}{p}\right)$ sera compris entre a^2 et $a^2(1 + k^2)$, au lieu d'être rigoureusement constant.

Courbes dans lesquelles le rapport $\frac{N}{N'}$ est constant.

Soit k la valeur constante du rapport. On aura

$$y\sqrt{1+p^2} = k\frac{x\sqrt{1+p^2}}{p}.$$

On satisfait à cette équation en posant $p^2 = -1$, ce qui correspond aux droites imaginaires parallèles aux droites $y = \pm xi$. Nous pouvons écarter cette solution.

Il vient alors pour l'équation différentielle de la courbe

$$kx = py = y\frac{dy}{dx},$$

ou bien

$$y\,dy - kx\,dx = 0;$$

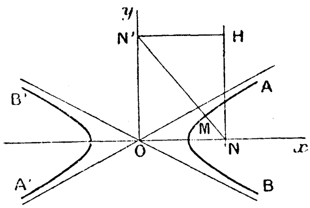
l'équation intégrale est

$$y^2 - kx^2 = C,$$

C désignant une constante arbitraire.

On obtient donc une courbe du second ordre rapportée à son centre et à ses axes (*fig.* 10).

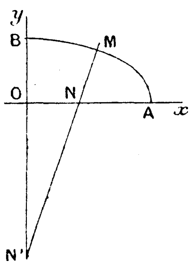
Fig. 10.



Si k est positif, la courbe est une hyperbole qui a pour asymptotes les deux droites $y = \pm x\sqrt{k}$; suivant le signe de C, la courbe est dans l'un ou l'autre des deux angles formés par ces droites.

Lorsque l'on fait $C = 0$, k étant toujours positif, la courbe se réduit aux deux droites $y = \pm x\sqrt{k}$ (*fig.* 11).

Fig. 11.



Si k est négatif et égal à $-k'$, la courbe devient une ellipse dont les demi-axes sont $a = \sqrt{\frac{C}{k'}}$, et $b = \sqrt{C}$;

elle est réelle si C est positif. Pour $k' = 1$ l'ellipse se réduit à un cercle.

Pour $k' = 1$, et $C' = 0$, on retrouve les deux droites imaginaires $y = \pm xi$, déjà obtenues en posant $p^2 = -1$.

Pour $k = 0$, ou k infini, la courbe se réduit à deux droites parallèles aux axes coordonnés.

De cette analyse résultent plusieurs conséquences qui ont un certain intérêt :

1° Pour mener une normale en un point pris sur une courbe du second ordre à centre, dont on connaît les axes, il suffit de faire passer par ce point une droite telle, que les deux segments déterminés par le point et par la rencontre de la droite avec les axes soient dans le rapport k égal au rapport $\frac{a^2}{b^2}$ des carrés des demi-axes, pris en valeur absolue, de sorte qu'on ait

$$\frac{MN}{MN'} = \frac{b^2}{a^2};$$

2° Pour l'hyperbole le rapport k est le même pour les normales à la courbe et pour les normales aux asymptotes, ainsi que pour la courbe conjuguée,

$$y^2 - kx^2 = C;$$

3° Les rayons de courbure des courbes aux sommets sont donnés par la valeur prise en ces points par la sous-normale, laquelle est représentée en un point quelconque par $\frac{y\,dy}{dx} = kx$, sur l'axe Ox, et par $\frac{x\,dx}{dy} = \frac{y}{k}$ sur l'axe Oy.

On retrouve pour l'ellipse, en prenant k en valeur absolue,

$$\rho = ka = k\sqrt{\frac{C}{k}} = \frac{b^2}{a}$$

au sommet du demi-axe a,

$$\rho = \frac{b}{k} = \frac{a^2}{b}$$

au sommet du demi-axe b.

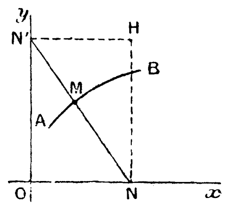
Pour l'hyperbole, avec k positif et C négatif, on trouve

$$\rho = \frac{b^2}{a}$$

en prenant positivement le carré b^2 du demi-axe imaginaire;

4° Si par les pieds N, N' des deux normales on élève des perpendiculaires aux axes, on obtient un point H (*fig.* 12), qu'on peut regarder comme corres-

Fig. 12.



pondant au point M de la courbe AB obtenue précédemment. Si l'on désigne par x' et y' les coordonnées du point H, on aura

$$x' = x + \frac{y\,dy}{dx}, \qquad y' = y + \frac{x\,dx}{dy}.$$

Appliquons la transformation à la courbe

$$y^2 - kx^2 = C.$$

On en déduit d'abord

$$\frac{y\,dy}{du} = kx, \qquad \frac{x\,dx}{dy} = \frac{1}{k}y,$$

et par suite

$$x' = x(k+1), \qquad y' = y\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

La courbe lieu du point H est donc de même espèce que la courbe lieu du point M : à l'ellipse correspond une ellipse, à l'hyperbole une hyperbole, à une droite passant par le point O correspondrait une autre droite antiparallèle à la droite donnée : $y = kx$, $y' = \frac{x'}{k}$.

On a de plus, en regardant x, y, x', y' comme fonctions du temps t,

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}(k+1), \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(1+\frac{1}{k}\right),$$

de sorte que les accélérations sont proportionnelles, avec des coefficients différents suivant l'axe sur lequel on projette l'accélération totale.

Supposons, par exemple, que le mouvement du point M soit celui d'un point attiré vers le point O, ou repoussé par ce point proportionnellement à la distance OM. On aura pour les équations de son mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \pm\,\omega^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \pm\,\omega^2 y.$$

Multipliant la première par $k+1$, la seconde par $1+\frac{1}{k}$, il vient

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \pm\,\omega^2 x', \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = \pm\,\omega^2 y',$$

et le mouvement du point H obéit à la même loi que celui du point M, avec le même moyen mouvement.

[C2j] [H12a]

SUR CERTAINS NOMBRES ANALOGUES AUX NOMBRES DE BERNOULLI;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

1. Désignons par $|x|^m$ la factorielle

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1),$$

où m est un entier positif. On sait que

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} |a+b|^m = |a|^m + C_m^1 |a|^{m-1}|b|^1 + \ldots \\ + C_m^{m-1}|a|^1|b|^{m-1} + |b|^m; \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad |a|^0 = 1 \qquad \text{quel que soit } a;$$

$$(3)\qquad |-1|^m = (-1)^m m!;$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d|x|^m}{dx} &= |-1|^0 C_m^1 |x|^{m-1} \\ &+ |-1|^1 C_m^2 |x|^{m-2} + \ldots \\ &+ |-1|^{m-2} C_m^{m-1}|x|^1 + |-1|^{m-1}: \end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} x &= |x|^1, \\ x^2 &= |x|^2 + |x|^1, \\ x^3 &= |x|^3 + 3|x|^2 + |x|^1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

et, en général, que la transformation de x^m en factorielles fournit un polynome en $|x|^m$, $|x|^{m-1}$, ... dont le terme en $|x|^1$ a pour coefficient l'unité.

2. Intégrons tout d'abord la factorielle $|x|^{m-1}$; comme elle représente un polynome de degré $m-1$, on aura, en introduisant les coefficients binomiaux et en dési-

gnant par b_0, b_1, b_2, ... des constantes à déterminer,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} m\int |x|^{m-1}dx = b_0|x|^m + C_m^1 b_1|x|^{m-1} + \ldots \\ + C_m^{m-1} b_{m-1}|x|^1. \end{aligned} \right.$$

En tenant compte de (2), on peut écrire sous forme symbolique

$$m\int |x|^{m-1}\,dx = |x+b|^m,$$

où, après développement du second membre, on remplace la factorielle $|b|^j$ par b_j. En dérivant, on aura l'égalité symbolique

$$(7)\qquad m|x|^{m-1} = \frac{d}{dx}|x+b|^m.$$

En tenant compte de (1) et de (4); (7) devient

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dx}|x|^m + b_1 C_m^1 \frac{d}{dx}|x|^{m-1} \\ &\qquad + b_2 C_m^2 \frac{d}{dx}|x|^{m-2} \\ &\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= |-1|^0 b_0 C_m^0 C_m^1 |x|^{m-1} + |-1|^1 C_m^0 C_m^2 |x|^{m-2} + \ldots \\ &\qquad\qquad + |-1|^0 b_1 C_m^1 C_{m-1}^1 |x|^{m-2} + \ldots \\ &\qquad\qquad\qquad + \ldots, \end{aligned} \right.$$

expression qui se termine d'elle-même.

En égalant entre eux les coefficients des factorielles dans le premier membre de (7) et dans le second membre de (8), on a

$$\begin{aligned} &|-1|^0 b_0 C_m^0 C_m^1 && = m, \\ &|-1|^1 b_0 C_m^0 C_m^2 + |-1|^0 b_1 C_m^1 C_{m-1}^1 && = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Or dans les coefficients C le numérateur seul dépend de m, et dans la $n^{\text{ième}}$ équation les numérateurs des produits

$$C_m^0\,C_m^n,\quad C_m^1\,C_m^{n-1},\quad \ldots,\quad C_m^{n-1}\,C_{m-n+1}^1$$

sont tous égaux à

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) = |\,m\,|^n.$$

On peut donc diviser les deux membres de la $n^{\text{ième}}$ équation par $|\,m\,|^n$, et il reste pour définir les b des équations ne contenant plus m. On en conclut que *les nombres* $b_0, b_1, b_2, \ldots$ *forment une suite unique* applicable à l'intégration de la factorielle $|\,x\,|^m$ quel que soit l'entier positif m. Les équations sont

$$\begin{array}{ll}
|-1\,|^0\,C_1^0\,b_0 & = 1,\\
|-1\,|^1\,C_2^0\,b_0 + |-1\,|^0\,C_2^1\,b_1 & = 0,\\
|-1\,|^2\,C_3^0\,b_0 + |-1\,|^1\,C_3^1\,b_1 + |-1\,|^0\,C_3^2\,b_2 & = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

On remarque que la $(n+1)^{\text{ième}}$ équation qui peut s'écrire symboliquement

$$\frac{d|\,b\,|^{n+1}}{db} = 0,$$

donne par récurrence b_n en fonction de $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$.

De plus, en éliminant $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ entre les $n+1$ premières équations, on trouve, après réduction,

$$(n+1)b_n = \begin{vmatrix}
|-1\,|^0\,C_1^0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
|-1\,|^1\,C_2^0 & |-1\,|^0\,C_2^1 & \ldots & 0 & 0\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & . & .\\
|-1\,|^{n-1}\,C_n^0 & |-1\,|^{n-2}\,C_n^1 & \ldots & |-1\,|^0\,C_n^{n-1} & 0\\
|-1\,|^n\,C_{n+1}^0 & |-1\,|^{n-1}\,C_{n+1}^1 & \ldots & |-1\,|^1\,C_{n+1}^{n-1} & 0
\end{vmatrix}.$$

3. *Expression des nombres* b *par les* $D|\,0\,|^n$. — En développant $|\,x\,|^m$ par la série de Mac Laurin, on a le

polynome

$$|x|^m = |o|^m + \left(\frac{d|x|^m}{dx}\right)_{x=0} \frac{x}{1} + \left(\frac{d^2|x|^m}{dx^2}\right)_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

d'où

$$(9) \qquad \int |x|^m dx = |o|^m \frac{x}{1} + \left(\frac{d|x|^m}{dx}\right)_{x=0} \frac{x^2}{2!} + \ldots.$$

D'autre part, au moyen des factorielles et des nombres b, on a

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \int |x|^m dx = \frac{1}{m+1} \Big[& b_0 |x|^{m+1} + \frac{m+1}{1!} b_1 |x|^m \\ & + \frac{(m+1)m}{2!} b_2 |x|^{m-1} + \ldots \Big]. \end{aligned} \right.$$

En remplaçant dans (9) les puissances x, x^2, ... par les factorielles au moyen des formules de transformation (5) et en égalant les coefficients des mêmes factorielles dans les seconds membres de (10) et de l'équation ainsi obtenue, on aurait des équations définissant les b; mais on peut faire $m = 1, 2, \ldots, n$; pour déterminer b_1, b_2, ..., b_n, ... il suffira alors dans chaque cas d'égaler entre eux les coefficients de $|x|^1$; on a ainsi l'expression générale

$$(11) \quad b_n = \frac{1}{2!} \mathrm{D} |o|^n + \frac{1}{3!} \mathrm{D}^2 |o|^n + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} \mathrm{D}^n |o|^n,$$

où l'on a posé

$$\left(\frac{d^j |x|^n}{dx^j}\right)_{x=0} = \mathrm{D}^j |o|^n.$$

On peut ne pas limiter l'expression, car les $\mathrm{D}^j |o|^n$ s'annulent pour $j > n$; on peut l'écrire alors symboliquement

$$b_n = -(1 + \mathrm{D}) + e^{\mathrm{D}},$$

où, après développement et réduction, on remplace D^j par $\mathrm{D}^j |o|^n$.

4. *Expression des b par les* S_p^q. — Si l'on désigne par S_p^q la somme des produits des p premiers nombres q à q on a

$$|x|^n = x^n - S_{n-1}^1 x^{n-1} + S_{n-1}^2 x^{n-2} + \ldots \pm S_{n-1}^{n-1} x.$$

En comparant à (8) on a, au signe près,

$$D^j |0|^n = j!\, S_{n-1}^j.$$

L'expression (11) devient alors

$$b_n = \frac{S_{n-1}^0}{n+1} - \frac{S'_{n-1}}{n} + \ldots \pm \frac{S_{n-1}^{n-1}}{2}.$$

On pourrait inversement exprimer linéairement les S_p^q au moyen des b.

5. *Intégration des polynomes.* — D'après (6) on a

$$\int |x|^m dx = \frac{1}{m+1}\left[b_0 |x|^{m+1} + b_1 \frac{m+1}{1} |x|^m + b_2 \frac{(m+1)m}{2!} |x|^{m-1} + \ldots\right];$$

or comme l'on sait

$$\sum |x|^m = \frac{|x|^{m+1}}{m+1},$$

$$\Delta |x|^m = m |x|^{m-1},$$

$$\Delta^2 |x|^m = m(m-1) |x|^{m-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on peut donc écrire

$$\int |x|^m dx = b_0 \sum |x|^m + \frac{b_1}{1!} |x|^m + \frac{b_2}{2!} \Delta |x|^m + \ldots.$$

Par suite, si $f(x)$ représente un polynome, qu'on peut toujours mettre sous la forme

$$A + B|x| + C|x|^2 + \ldots,$$

on aura

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\int f(x)\,dx = b_0 \sum f(x) + \frac{b_1}{1} f(x) + \frac{b_2}{2!} \Delta f(x) + \ldots \\ \displaystyle\qquad\qquad + \frac{b_n}{n!} \Delta^{n-1} f(x) + \ldots, \end{cases}$$

expression qui se termine d'elle-même, car à partir d'un certain rang les différences s'annulent.

6. *Extension de l'expression* (12). *Relation entre les nombres b et la fonction* $\frac{u}{L(1+u)}$. — Appliquons à la fonction $(1+u)^x$ l'expression (12). Nous avons

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+u)^x, \\ \Delta f(x) &= u(1+u)^x, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta^n f(x) &= u^n(1+u)^x, \end{aligned}$$

$$\sum_0^x f(x) = 1 + (1+u) + (1+u)^2 + \ldots + (1+u)^{x-1} = \frac{(1+u)^x - 1}{u}.$$

Or

$$\int_0^x (1+u)^x\,dx = \frac{(1+u)^x - 1}{L(1+u)}.$$

On aura donc, si l'expression (12) est applicable,

$$\frac{(1+u)^x - 1}{L(1+u)} = \frac{(1+u)^x - 1}{u} + \frac{b_1}{1!}[(1+u)^x - 1] + \frac{b_2}{2!} u[(1+u)^x - 1)] + \ldots.$$

Supprimant le facteur commun $(1+u)^x - 1$ et multipliant par u on a

$$(13)\qquad \frac{u}{L(1+u)} = 1 + \frac{b_1}{1!} u + \frac{b_2}{2!} u^2 + \frac{b_3}{3!} u^3 + \ldots;$$

or la fonction $\frac{u}{L(1+u)}$ est uniforme finie et continue à l'intérieur d'un cercle de rayon égal à l'unité et ayant l'origine pour centre; le second membre de (13) représente donc la fonction pour toute valeur de u dont le module est plus petit que 1, et en général

$$(14) \qquad b_n = \left[\frac{d^n}{du^n}\frac{u}{L(1+u)}\right]_{u=0}.$$

Dans la série (13) le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{b_{n+1}}{(n+1)b_n}u.$$

Dans la série (12), prise entre les limites x_0 et x_1, le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{b_{n+1}}{(n+1)b_n}\frac{\Delta^n(x_1)-\Delta^n(x_0)}{\Delta^{n-1}(x_1)-\Delta^{n-1}(x_0)},$$

où l'on a désigné par $\Delta^\mu(x_p)$ la différence d'ordre μ de la fonction $f(x)$ quand la variable a la valeur x_p; la série (12) sera donc absolument convergente si le module du rapport

$$\frac{\Delta^n(x_1)-\Delta^n(x_0)}{\Delta^{n-1}(x_1)-\Delta^{n-1}(x_0)}$$

tend à la limite vers un nombre plus petit que 1.

7. La relation (14) donne un moyen simple pour calculer les nombres b : on les aura en effectuant la division

$$\frac{u}{u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots}.$$

On trouve

$$\begin{array}{lll} b_0 = 1, & b_1 = \frac{1}{2}, & b_2 = -\frac{1}{6}, \\ b_3 = \frac{1}{4}, & b_4 = -\frac{19}{30}, & b_5 = \frac{9}{4}, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On en obtient d'ailleurs une nouvelle expression au moyen des inverses des nombres entiers; en effet, la division donne presque immédiatement les relations

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1,\\
b_1 &= \frac{1}{2}b_0,\\
\frac{b_2}{2!} &= -\frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{2}b_1,\\
\frac{b_3}{3!} &= \frac{1}{4}b_0 - \frac{1}{3}\frac{b_1}{1!} + \frac{1}{2}b_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et l'on trouve

$$b_n = n!\begin{vmatrix}
\frac{1}{2} & 1 & 0 & \ldots & 0\\
\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \ldots & 0\\
\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \ldots & 0\\
. & . & . & \ldots & .\\
\frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \ldots & 1\\
\frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \ldots & \frac{1}{2}
\end{vmatrix}.$$

On voit l'analogie entre les nombres b et les nombres de Bernoulli : ces derniers servent à la sommation des puissances, les nombres b à l'intégration des factorielles.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1901).

Mathématiques élémentaires.

Étant donnés un cercle fixe O, une droite fixe D, tangente à ce cercle, et une droite fixe Δ, parallèle à D, située du même côté de D que le cercle O, et ne coupant pas ce cercle, on mène d'un point A de Δ les deux tangentes au cercle O, qui coupent la droite D en B et C.

Le point A décrivant la droite Δ, on demande :

1° De trouver le lieu géométrique du point M de rencontre de la bissectrice intérieure de l'angle A du triangle ABC avec le cercle circonscrit à ce triangle;

2° De trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle ABC;

3° De trouver l'enveloppe du cercle passant par les milieux des côtés du triangle ABC;

4° De calculer les longueurs des trois côtés du triangle ABC connaissant la somme l des longueurs des deux médianes issues des sommets B et C.

N. B. — On désigne par r le rayon du cercle O et par h la distance des deux droites parallèles D et Δ.

Mathématiques spéciales.

On considère un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

1° Trouver l'équation générale des paraboloïdes P admettant le plan xOy pour plan de symétrie, tangents au plan yOz au point O, et ayant pour trace sur le plan zOx une ellipse de grandeur invariable dont le grand axe est dirigé suivant Ox;

2° Trouver les équations des focales F et Φ de l'un de ces paraboloïdes P.

3° Trouver l'enveloppe de la focale F, qui est située dans le plan xOy, lorsque le paraboloïde P varie.

4° Dans la même hypothèse, trouver l'enveloppe de l'axe et le lieu du sommet de la focale Φ. — Construire cette enveloppe et ce lieu.

5° Calculer le paramètre de la focale Φ en fonction du coefficient angulaire de son axe (qui est situé dans le plan xOy), et étudier la variation de ce paramètre quand ce coefficient angulaire varie.

6° En se servant des résultats qui précèdent, donner une idée de la forme de la surface engendrée par la focale Φ, quand le paraboloïde P varie. — En particulier, indiquer quelle est la section de cette surface par le plan zOx.

N. B. — On désignera par a et b $(a > b)$ les demi-axes de l'ellipse donnée dans le plan zOx.

Mécanique rationnelle.

On considère une plaque solide rectangulaire, homogène, infiniment mince, dont le centre O (centre de gravité) est fixe et qui s'appuie sur une sphère fixe infiniment petite S, sur laquelle elle peut glisser sans frottement; la distance $OS = l$ de cette sphère au centre O est supposée telle que la circonférence décrite, dans le plan de la plaque, de O comme centre avec l comme rayon, soit tout entière dans l'intérieur de la plaque.

1° Trouver le mouvement de la plaque, en supposant les conditions initiales telles, qu'au commencement du mouvement la plaque glisse sur la sphère S;

2° Calculer la réaction de la sphère S sur la plaque et voir si, à un certain instant, la plaque peut quitter la sphère.

Soient Ox_1, Oy_1, Oz_1, trois axes fixes menés par le point O, Ox_1 étant dirigé suivant OS; soient de même Ox, Oy, Oz les axes de symétrie de la plaque, Ox étant parallèle aux plus grands côtés du rectangle, Oy aux plus petits côtés et Oz normal à la plaque, la sphère S étant placée, par rapport à la plaque, du côté des z négatifs.

On désignera par A, B, C les moments d'inertie de la plaque pris respectivement par rapport à Ox, Oy, Oz, par θ l'angle z_1Oz et par φ l'angle x_1Ox.

On désignera également par θ_0, φ_0, θ'_0, φ'_0 les valeurs initiales données de θ, φ et de leurs dérivées θ', φ' par rapport au temps, en supposant φ_0 compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; on examinera successivement l'hypothèse dans laquelle le produit $\theta'_0\varphi'_0$ est nul, puis celle dans laquelle ce produit n'est pas nul; dans chacun des différents cas particuliers correspondant à ces hypothèses, on indiquera comment on a dû choisir les données initiales pour que le mouvement considéré se produise.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On considère la courbe gauche définie, en coordonnées rectangulaires, par l'intersection des surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 0, \qquad z^2 = ax^2 + 3x,$$

où a est une constante.

1° En appelant s l'arc de cette courbe, compté à partir de l'origine jusqu'en un point $M(x, y, z)$, exprimer $\frac{ds}{dx}$ en fonction de x et déterminer a de façon que s soit donné en fonction de x par une intégrale elliptique de *première espèce.*

Dans tout ce qui suit, la constante a est supposée ainsi déterminée.

2° Exprimer les coordonnées x, y, z d'un point M de la courbe en fonction de s, en employant successivement les notations de Jacobi et celles de Weierstrass.

Quel est, dans un parallélogramme des périodes, le nombre des valeurs de s correspondant à un point donné de la courbe?

3° Former la relation qui lie les valeurs de s correspondant à quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de la courbe situés dans un même plan. En déduire les points de la courbe où le plan osculateur est stationnaire et discuter la réalité de ces points.

4° Calculer, en fonction de s, les coordonnées du centre de gravité de l'arc s supposé homogène.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES EN 1901.

PREMIÈRE SESSION.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et l'on demande :

1° Démontrer que les coniques du faisceau Δ représenté par l'équation

$$(m^2-1)y^2-2mxy-2py-2mpx-p^2=0,$$

où m est variable, ont un foyer commun, une asymptote commune et que la directrice correspondante au foyer commun passe par un point fixe.

2° Déterminer les points par lesquels passent deux hyperboles équilatères du faisceau et ceux par lesquels n'en passe qu'une; puis, prenant un point $\alpha\beta$ sur le lieu de ces derniers, exprimer en fonction de α et β les coordonnées des centres des deux coniques qui passent par le point $\alpha\beta$.

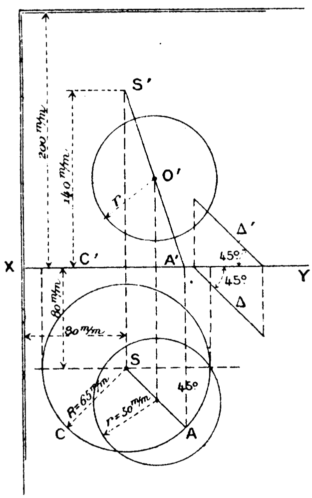
3° Trouver le lieu des foyers réels des coniques Δ et celui des pieds des directrices correspondantes sur l'axe focal. (Le lieu se compose de deux courbes distinctes.) Donner une construction géométrique de la tangente en un point quelconque.

4° Trouver le lieu des symétriques des foyers réels par rapport aux asymptotes des coniques Δ (le lieu se compose de deux courbes distinctes) et celui de leurs sommets réels. On construira géométriquement la tangente au point $x = 0$, $y = -p$ de ce dernier.

Épure.

On demande de déterminer par ses deux projections la courbe d'intersection d'une sphère avec un cône de révolution, les deux surfaces étant définies de la manière suivante :

1° Le cône de révolution a pour base le cercle (CC') du



Cône. — $R = 65^{mm}$; cote du sommet $S = 140^{mm}$; éloignement de S à 80^{mm}.
Projetante de S à 80^{mm} du côté gauche du cadre.
Sphère. — Centre OO' milieu de (SAS'A'); rayon $r = 50^{mm}$.
Direction lumineuse parallèle à $\Delta\Delta'$.
Cadre de $0^{m},27$ sur $0^{m},45$.
Ligne de terre XY à 200^{mm} du côté supérieur du cadre.

plan horizontal et pour sommet le point SS′ de cote donnée.

2° La sphère de rayon $r = 50^{mm}$, a pour centre le point OO′, milieu de la génératrice donnée (SAS′A′) du cône. (*Voir* la figure.)

Dans la mise au net de cette première partie de l'épure qui se fera à l'encre, on supposera les deux corps opaques et l'on représentera par un trait pointillé les lignes cachées soit en projection horizontale soit en projection verticale.

Cela fait, on déterminera en projection horizontale seulement les ombres propres et portées soit des deux corps entre eux, soit des deux corps sur le plan horizontal, en les supposant éclairés par des rayons lumineux parallèles à la direction donnée $\Delta\Delta'$. Les courbes d'ombres propres et celles d'ombres portées se traceront au crayon noir. Le trait sera continu pour les courbes qui sont vues en projection, pointillé pour les courbes qui sont cachées. Enfin les portions des surfaces qui sont dans l'ombre devront être recouvertes de hachures faites à l'encre bleue.

Titre extérieur : *Géométrie descriptive.*

Titre intérieur : *Cône et sphère.*

Cadre de $0^{m},27$ sur $0^{m},45$.

Ligne de terre XY parallèle aux petits côtés du cadre à 200^{mm} du côté supérieur.

DEUXIÈME SESSION.

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires Ox et Oy. Sur l'axe des x on considère deux points A et B dont les distances à l'origine sont les racines de l'équation

$$d^2 - 2pd + q^2 = 0.$$

On projette orthogonalement les points A et B en a et b respectivement sur la droite $y = mx$.

Ceci posé :

1° Former l'équation générale des coniques Δ circonscrites au quadrilatère $\mathrm{A}ab\mathrm{B}$ et distinguer les points du plan où passe une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

2° Trouver le lieu γ des centres des coniques Δ et séparer sur ce lieu les points qui sont des centres d'ellipses de ceux qui sont des centres d'hyperboles.

Démontrer géométriquement que si l'on fait varier m, le lieu du centre de γ est un cercle.

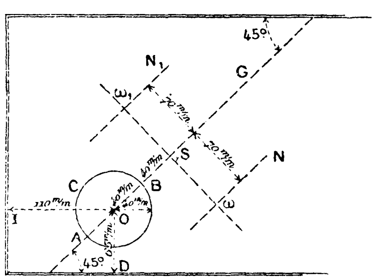
3° Indiquer, pour une valeur déterminée de m, une construction de l'hyperbole équilatère qui fait partie des coniques Δ; puis déterminer et construire l'hyperbole équilatère dont les tangentes en a et b sont rectangulaires.

4° Former l'équation des coefficients angulaires des normales menées de l'origine à l'hyperbole équilatère qui répond à $m = 1$, $q = 0$, et démontrer que deux seulement des coefficients angulaires sont réels.

Géométrie descriptive.

On demande de déterminer la projection horizontale de l'intersection d'un cylindre oblique avec un cylindre de révolution, les deux surfaces étant définies de la manière suivante :

1° Le cylindre oblique a pour base une circonférence C du



Point lumineux. — Projection horizontale S; cote de S, 150^{mm}.
$OI = 110^{mm}$; $OD = 65^{mm}$.
$OB = BS = 40^{mm}$.
Cylindre oblique. — Cercle de base C. Rayon, 40^{mm}.
Génératrice. — Projection horizontale VG à 45° sur le grand côté du cadre. La génératrice fait avec le plan horizontal un angle de 45°. Le cylindre ainsi défini est limité à un plan horizontal de cote $h = 100^{mm}$.
Cylindre de révolution. — Axe projeté en $\omega\omega_1$, perpendiculaire à VG. Rayon, 40^{mm}. Ce cylindre, tangent au plan horizontal, est limité aux deux plans normaux N et N_1.

plan horizontal (centre O, rayon $R = 40^{mm}$); les génératrices inclinées à 45° sur le plan horizontal sont parallèles au plan vertical donné VG; le cylindre est limité par un plan horizontal supérieur de cote $h = 100^{mm}$.

2° Le cylindre de révolution est tangent au plan horizontal de projection. Son rayon est de 40^{mm} et son axe est projeté horizontalement en $(\omega S \omega_1)$. Cette droite passe par le point S défini sur la figure et elle est perpendiculaire à la direction VG. Ce cylindre est limité à deux sections droites N et N_1 de positions données.

Épure.

Cette première partie de l'épure s'exécutera complètement à l'encre. On admettra que les deux surfaces cylindriques sont opaques et qu'elles forment un seul solide. Les lignes cachées se représenteront par des traits pointillés.

Cela fait, on supposera les solides éclairés par un point lumineux S donné par sa projection horizontale et sa cote $h' = 150^{mm}$, et l'on déterminera en projection horizontale les courbes d'ombres propres et celles d'ombres portées soit par les surfaces entre elles, soit par les surfaces sur le plan horizontal.

Ces courbes se traceront au crayon d'un trait noir continu pour les parties vues et d'un trait noir pointillé pour les parties cachées.

Enfin on devra recouvrir de hachures tracées à l'encre bleue les parties dans l'ombre qui sont vues.

Cadre de $0^m,27$ sur $0^m,45$.

Titre extérieur : *Géométrie descriptive.*

Titre intérieur : *Cylindres.*

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1833.

(1900, p. 48.)

Soit

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a' + ia'')x^2 + 2(b' + ib'')xy + (c' + ic'')y^2$$

une forme binaire quadratique à coefficients imaginaires telle que la partie réelle

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$$

soit une forme positive. Démontrer que le déterminant de la forme proposée

$$D = ac - b^2$$

n'est jamais négatif (c'est-à-dire que, s'il est réel, il est nécessairement positif).

Soit

$$\sqrt{D} = \alpha + i\beta$$

la valeur principale (celle des deux valeurs de la racine dont la partie réelle α *est* > 0*) de la racine carrée de ce déterminant.*

Posons

$$a = a_0\sqrt{D}, \qquad b = b_0\sqrt{D}, \qquad c = c_0\sqrt{D};$$

a_0, b_0, c_0 *sont des quantités imaginaires dont nous désignerons les parties réelles respectivement par* a'_0, b'_0, c'_0.

Faire voir que la forme

$$a'_0 x^2 + 2b'_0 xy + c'_0 y^2$$

est aussi une forme positive? (J. FRANEL.)

SOLUTION

Par M. M. LAGOUTINSKY.

Posons

$$D_1 = a'c' - b'^2,$$
$$D_2 = a'c'' + a''c' - 2b'b'',$$
$$D_3 = a''c'' - b''^2.$$

La forme $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$ est positive; on a donc

$$a' > 0, \qquad c' > 0, \qquad D_1 > 0.$$

Si, en outre, $D_3 > 0$, on en déduit immédiatement

$$4a'c'a''c'' > 4b'^2b''^2$$

et, *a fortiori*,

$$(a'c'' - a''c')^2 + 4a'c'a''c'' > 4b'^2b''^2$$

ou

$$|a'c'' + a''c'| > |2b'b''|.$$

On voit que D_2 a le signe de a'' et c''; en d'autres termes, les quantités $a''D_2$ et $c''D_2$ sont, dans ce cas, positives.

On conclut de même que, si $D_3 > 0$, on ne peut pas avoir $D_2 = 0$; dans ce dernier cas, on a donc nécessairement ou $D_3 = 0$, ou $D_3 < 0$.

Mais le cas où $D_3 = 0$ ne peut se produire; autrement la forme $a''x^2 + 2b''xy + c''y^2$ n'a pas ses coefficients réels; il reste $D_3 < 0$.

Considérons l'expression

$$D = ac - b^2 = D_1 + iD_2 - D_3.$$

Si $D_2 = 0$, elle devient une somme des quantités positives. Ainsi la première partie de la question se trouve établie.

Passons à la seconde. Multiplions la forme

$$(1) \qquad a'_0 x^2 + 2b'_0 xy + c'_0 y^2$$

par $|D|$; on a, en vertu des formules

$$a(\alpha - i\beta) = a_0(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = a_0|D|\ldots,$$

la forme

$$(2) \qquad (a'\alpha + a''\beta)x^2 + 2(b'\alpha + b''\beta)xy + (c'\alpha + c''\beta)y^2,$$

où α et β satisfont aux équations

$$(3) \qquad \alpha^2 - \beta^2 = D_1 - D_3,$$

$$(4) \qquad 2\alpha\beta = D_2$$

et à une égalité, $\alpha > 0$.

Démontrons en premier lieu que son discriminant, multiplié par -1,

$$4D_1\alpha^2 + 4D_2\alpha\beta + 4D_3\beta^2$$

est positif.

A l'aide de l'équation (4) cette expression se change en

$$4D_1\alpha^2 + 2D_2^2 + 4D_3\beta^2.$$

Si $D^3 \geqq 0$, cette quantité est évidemment positive. Si, au contraire, $D_3 < 0$, multiplions-la par α^2 et transformons, à l'aide des équations (3) et (4), en

$$4D_1\alpha^4 + 2D_2^2(\beta^2 + D_1 - D_3) + D_3D_2^2$$

ou

$$4D_1\alpha^4 + 2D_2^2(\beta^2 + D_1) - D_3D_2^2;$$

c'est une quantité positive. Or le discriminant de la forme (2) est négatif. De là résulte que les quantités

$$(5) \qquad a'\alpha + a''\beta \quad \text{et} \quad c'\alpha + c''\beta$$

ont leur signe commun. En supposant $D_1 - D_3 > 0$, on conclut, de l'équation (3),

$$\alpha > |\beta|.$$

Si l'on fixe deux des trois quantités a'', b'', c'' et si l'on fait varier la troisième d'une manière continue, sans nuire à l'inégalité $D_1 - D_3 > 0$, la variation des quantités α et β et, par suite, de leurs fonctions (5), sera continue. Mais aucune des quantités (5) ne peut s'annuler; autrement, le discriminant de la forme (2) serait positif. Leur signe reste donc le même malgré la variation d'une des quantités a'', b'', c'', pourvu que la condition $D_1 - D_3 > 0$ soit remplie. Si donc nous avons $D_3 < 0$, a'' et c'' sont de même signe ou de signes contraires; il est permis de changer b'' pour le premier cas et la plus petite, en valeur absolue, des quantités a'' et c'', pour le second, de telle sorte que nous ayons $D_1 > D_3 > 0$.

En d'autres termes, il suffit, pour la détermination du signe des quantités (5), de se borner au seul cas $D_3 > 0$.

Abordons-le. En multipliant l'équation (4) par a'' et c'', nous aurons

$$2\alpha a''\beta = a'' D_2, \qquad 2\alpha c''\beta = c'' D_2,$$

d'où résulte que les quantités $a''\beta$ et $c''\beta$ sont positives. En sommant le résultat précédent, nous pouvons dire que les formes (2) et, par suite, (1) sont positives.

Autre solution de M. D. Pizzarello.

1857.

(1900, p. 383.)

On donne, dans un plan, un triangle ABC *dont les côtés sont* a, b, c. *On demande d'étudier, dans l'espace, le lieu des points* M *tels que leurs distances* MA', MB', MC' *aux trois côtés du triangle soient proportionnelles à* a, b, c.

En particulier, déterminer la projection de ce lieu sur le plan du triangle, séparer sur cette projection les arcs qui *sont des projections réelles de la courbe de l'espace, et examiner le cas du triangle isoscèle.*

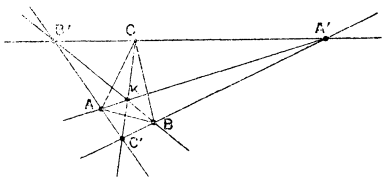
Cette question constitue en quelque sorte une extension du point de Lemoine, puisque c'est, dans l'espace, la courbe dont tous les points jouissent de la propriété qui, dans le plan, appartient au point de Lemoine. (E. LEMOINE.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. V. RETALI.

Appelons K le point de Lemoine du triangle ABC et A', B', C' les pôles des côtés | BC |, | CA |, | AB | par rapport au cercle circonscrit : le lieu A^2 des points de l'espace dont les distances aux côtés | AB |, | AC | sont dans le rapport $(c:b)$ est un cône quadrique orthogonal ayant le sommet A et par rapport auquel | AB |, | AC | sont un couple de rayons conjugués. Le plan du triangle est plan diamétral principal et coupe A^2 suivant

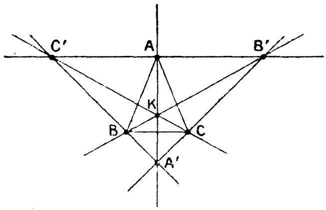
Fig. 1.



les droites | AA' | et | B'C' |; l'axe principal elliptique de A^2 (à l'intérieur du cône) est la bissectrice de l'angle aigu formé par | AA' | et | B'C' |. De même, le lieu des points dont les distances aux côtés | CB |, | BA | sont dans le rapport $(a:c)$ est un cône B^2 dont les droites | BB' |, | A'C' | forment une section diamétrale principale, etc. Le lieu cherché, intersection des cônes A^2 et B^2, se décompose donc en deux coniques situées dans des plans perpendiculaires au plan (ABC) dont les centres sont les milieux de deux diagonales du quadrilatère complet ayant les droites AC', BC', AK, BK pour côtés. Si, par exemple, les angles C'AK et C'BK sont aigus, le segment fini C'K et le segment infini A'B' sont des axes des deux coniques. Ces deux segments forment évidemment la projection orthogonale du lieu sur le plan du triangle.

Si le triangle est isoscèle, si par exemple $b = c$, le cône A^2 dégénère en deux plans perpendiculaires au plan (ABC) et entre eux, menés par les bissectrices de l'angle A ; la projec-

Fig. 2.



tion du lieu est constituée par le segment fini KA' et le segment infini B'C' de ces deux bissectrices.

1863.

(1900, p. 384.)

Il existe une infinité de coniques qui touchent en quatre points une quartique bicirculaire; ces points sont sur un cercle dont le centre est fixe. (E. Duporcq.)

SOLUTION

Par un Anonyme.

Il existe en réalité treize systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique bicirculaire. Le théorème énoncé ne peut être exact que pour celui de ces systèmes qui comprend une droite double à l'infini. Les coniques de ce système ont pour équation générale

$$\lambda^2 U + 2\lambda V + 1 = 0,$$

V étant le premier membre de l'équation d'un cercle; les points de contact avec l'enveloppe sont sur le cercle

$$\lambda V + 1 = 0,$$

dont le centre est fixe.

[D5d]

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SUBSTITUTIONS A UNE VARIABLE ET DES FONCTIONS QU'ELLES LAISSENT INVARIABLES;

PAR M. E. IAGGI.

Dans deux Notes précédentes ([1]), nous avons considéré, sous le nom de *fonctions périodiques* ([2]), des fonctions *complètes* ([3]) $F(x)$ telles qu'il existe des substitutions à x qui laissent invariables ces fonctions; et nous avons montré que toute fonction complète uniforme, c'est-à-dire toute fonction uniforme sans points critiques, est une fonction périodique, et en outre qu'il existe des fonctions complètes multiformes qui sont périodiques. Nous avons vu aussi que toute fonction complète périodique *ponctale* ([4]), uniforme ou multiforme, a pour groupe de substitutions un groupe *discontinu*, et que toute fonction complète périodique improprement *linéale* ([5]) ou *aréale* ([6]), a pour groupe de substitutions un groupe *continu*.

1. Considérons une fonction *périodique* $F(x)$ quelconque, et le groupe, discontinu ou continu, de ses substitutions. Les substitutions, ou, dans notre langage abrégé, les fonctions $s(x)$ elles-mêmes que l'on peut

---

([1]) *Sur les notions de fonction complète et de fonction périodique* (*Nouvelles Annales*, avril 1901). — *Sur les substitutions à une variable et les fonctions qu'elles laissent invariables* (*Ibid.*, octobre 1901).

([2]), ([3]), ([4]), ([5]), ([6]), *Voir*, au sujet de ces termes, les deux Notes citées.

substituer à x, sont *toutes les racines* de l'équation

$$F(s) = F(x),$$

et ce sont des racines *simples* de cette équation, ainsi que nous l'avons vu, sauf pour des valeurs particulières de x qui sont les *points multiples* ([1]) du groupe. Soient $s_i(x)$, $s_j(x)$ deux substitutions quelconques du groupe. On a

$$F\big(s_i(x)\big) = F(x) = F\big(s_j(x)\big)$$

et, par conséquent,

$$F\Big(s_i\big(s_j(x)\big)\Big) = F\big(s_j(x)\big) = F(x) = F\Big(s_j\big(s_i(x)\big)\Big).$$

Donc, *si $s_i(x)$ et $s_j(x)$ sont deux substitutions quelconques d'un groupe, les deux fonctions $s_i\big(s_j(x)\big)$, $s_j\big(s_i(x)\big)$ sont aussi des substitutions du groupe.* Il résulte de là que si, dans toutes les substitutions d'un groupe, on fait à x une substitution du groupe, on ne peut obtenir ainsi que des substitutions du groupe. D'ailleurs, on ne peut obtenir deux fois la même substitution; car si, ayant substitué $s_i(x)$ à x, on avait, s_p et s_q étant distinctes,

$$s_p\big(s_i(x)\big) = s_q\big(s_i(x)\big),$$

on aurait, en faisant à x la substitution σ_i inverse de s_i,

$$s_p\Big(s_i\big(\sigma_i(x)\big)\Big) = s_q\Big(s_i\big(\sigma_i(x)\big)\Big)$$

et, par conséquent,

$$s_p(x) = s_q(x),$$

ce qui n'est pas. Il s'ensuit que si, dans un groupe quelconque, on fait à x une substitution quelconque du groupe, ce groupe, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les

---

([1]) *Voir*, au sujet de ce terme, les deux Notes citées.

substitutions, y compris la substitution identique, reste *invariable*.

Ceci conduit immédiatement à considérer une fonction périodique $F(x)$ quelconque comme une fonction *symétrique* des substitutions de son groupe. Ainsi, par exemple, lorsque le nombre des substitutions $s_i(x)$ est fini, la fonction symétrique

$$x\prod s_i(x)$$

est une fonction périodique du groupe considéré, et cela se vérifie aisément, si l'on considère, par exemple, le groupe d'un polynome

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m.$$

L'équation

$$F(s) = F(x)$$

ou

$$a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \ldots + a_{m-1} s + a_m - F(x) = 0,$$

montre que le produit des racines, $x\prod s_i$, est

$$\frac{a_m - F(x)}{a_0}$$

et, par suite, que toutes les fonctions entières

$$\lambda x\prod s_i + \mu = \lambda' F(x) + \mu',$$

où λ, μ, λ', μ' sont des constantes et dont l'une est le produit considéré, ont pour groupe de substitutions le groupe de $F(x)$.

Dans tous les cas où le nombre des substitutions du groupe est fini, on obtient une fonction périodique par le produit $x\prod s_i(x)$; car ce produit est nécessairement convergent, et invariable pour les substitutions du groupe. Mais lorsque le nombre des substitutions est infini, le produit $\lambda x \prod s_i(x)$ (qui peut d'ailleurs n'être pas convergent) ne donne pas généralement de fonction périodique du groupe, lorsqu'il est convergent.

Le produit convergent

$$x \prod \left(1 - \frac{x^2}{m^2\pi^2}\right) \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

qui est, à un facteur constant près, le produit des substitutions de $\tan g x$, en est un exemple. Cependant le produit, à un facteur constant près, des substitutions de $\sin x$

$$x \prod \left[1 - \frac{x^2}{(2m\pi)^2}\right] \prod \left[1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right]$$
$$(m = 1, 2, \ldots; n = 0, 1, 2, \ldots)$$

n'est autre que la fonction $\sin x$ elle-même; mais ceci ne se présente que dans des cas très particuliers. Nous verrons dans la suite une méthode générale de détermination des fonctions périodiques dont on donne le groupe.

2. Considérons un groupe quelconque, discontinu ou continu, de substitutions, que nous désignerons par G. Désignons par $s_1(x)$ une substitution quelconque du groupe G; la substitution $s_1(s_1(x))$, que nous désignerons par $s_2(x)$, fait partie du groupe et il en sera de même des substitutions

$$\begin{aligned} s_3(x) &= s_1(s_2(x)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_{n+1}(x) &= s_1(s_n(x)), \\ s_{n+p}(x) &= s_p(s_n(x)). \end{aligned}$$

Nous considérerons deux cas :

1° Le cas où, m étant un nombre fini, on arrive ainsi par *itération* de $s_1(x)$ à la substitution identique

$$s_m(x) = x;$$

2° Le cas où, quelque grand que soit m, on n'arrive jamais, par itération de $s_1(x)$, à la substitution identique.

Dans le premier cas, on peut écrire

$$x = s_m(x) = s_1\big(s_{m-1}(x)\big) = s_p\big(s_{m-p}(x)\big).$$

Il s'ensuit que s_1 et s_{m-1}, que s_p et s_{m-p}, sont *inverses l'une de l'autre,* autrement dit, que deux substitutions équidistantes des extrêmes, dans la suite

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_{m-2}, \quad s_{m-1}$$

sont *inverses* l'une de l'autre. Si $m - 1$ est impair, c'est-à-dire si m est pair, il y a une substitution, au milieu de cette suite, *qui est inverse d'elle-même*. On peut désigner si l'on veut par s_{-p} au lieu de s_{m-p} la substitution inverse de s_p, en remarquant que

$$x = s_0(x) = s_m(x) = s_{2m}(x) = \ldots,$$

car alors

$$s_{m-p}(x) = s_m\big(s_{-p}(x)\big) = s_{-p}(x);$$

en appliquant aux indices négatifs la règle exprimée par l'égalité

$$s_{n+p}(x) = s_n\big(s_p(x)\big) = s_p\big(s_n(x)\big).$$

Cette notation a son importance pour l'étude du second cas. Mais remarquons que l'ensemble des substitutions

$$x, \quad s_1(x), \quad s_2(x), \quad \ldots \quad s_{m-1}(x)$$

reste invariable (ou que ses éléments ne sont que permutés), lorsqu'on fait à x une des m substitutions de cet ensemble; que, par suite, cet ensemble constitue un *groupe,* car on peut concevoir et même former une fonction symétrique de ces substitutions, c'est-à-dire une fonction périodique ayant pour groupe cet ensemble de substitutions; le produit

$$x\prod_{1}^{m-1} s_i(x)$$

est une de ces fonctions. Ainsi, les fonctions *itérées* $s_i(x)$ forment par leur ensemble un *groupe,* et si en formant ces fonctions par répétition de $s_i(x)$ nous n'avons pas épuisé toutes celles du groupe G donné où nous avons pris s_1, on pourra dire que le groupe que nous venons de former *est contenu dans* G, ou enfin est un *sous-groupe g contenu dans* G.

Dans le second cas, où si grand que soit m, aucune substitution $s_m(x)$ obtenue par répétition de $s_1(x)$ n'est identique à x, on n'obtient jamais par ces répétitions une fonction inverse des fonctions itérées successives

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_p(x), \quad \ldots, \quad s_m, \quad \ldots$$

car si l'on avait, pour des nombres finis n et p,

$$s_n(x) = s_{-p}(x),$$

on aurait

$$s_{n+p}(x) = x,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse; on démontre d'ailleurs d'une manière analogue que les substitutions $s_n(x)$ sont toutes distinctes.

Afin de constituer un ensemble analogue à celui qui s'est présenté dans le cas précédent, nous adjoindrons aux précédentes substitutions en nombre infini, la substitution s_{-1}, inverse de s_1, et toutes celles qu'on en déduit par répétition. Toutes ces substitutions en nombre infini

$$s_{-1},\quad s_{-2},\quad s_{-3},\quad \ldots,\quad s_{-n},\quad \ldots$$

sont respectivement les inverses des substitutions

$$s_1,\quad s_2,\quad s_3,\quad \ldots,\quad s_n,\quad \ldots$$

ainsi qu'on le vérifie aisément. L'ensemble constitué par cette double infinité de substitutions auxquelles on adjoint $s_0 = x$, jouit de cette propriété de rester invariable (ses éléments ne sont que permutés) lorsqu'on fait à x une des substitutions de cet ensemble, et si l'on ne peut vérifier l'existence d'une fonction symétrique des éléments de cet ensemble, on peut du moins la concevoir; ceci nous suffit pour désigner encore sous le nom de *groupe* cet ensemble de substitutions : toute fonction symétrique des $s_n(x)$, s'il en existe, sera une fonction périodique ayant cet ensemble pour groupe.

Toutes les substitutions s_{-n}, comme les substitutions s_n, sont contenues dans le groupe G, car ce groupe, contenant s_n, contient son inverse s_{-n}; le groupe que nous venons de former est donc, ou identique à G, ou contenu dans G; s'il est contenu dans G, on pourra l'appeler un *sous-groupe g contenu dans* G.

3. Les groupes g, d'un nombre fini ou infini de substitutions que nous venons de considérer, sont remarquables en ce sens qu'une seule substitution $s_1(x)$ suffit pour trouver toutes les autres, c'est-à-dire pour déterminer chacun de ces groupes. La substitution $s_1(x)$ sera appelée la *substitution fondamentale* du groupe g formé par itération et inversion de $s_1(x)$. Quant au groupe g, on dira qu'il est *d'ordre* 1, en désignant par

ordre d'un groupe, le plus petit nombre de substitutions fondamentales qui suffisent à le déterminer, comme nous l'expliquerons dans la suite.

Il est certain que toutes les substitutions $s_n(x)$ d'un groupe g d'ordre 1 ont entre elles quelque chose de commun, puisqu'elles proviennent toutes d'itération ou d'inversion de $s_1(x)$. On peut dire que dans la suite finie ou infinie

$$\ldots,\quad s_{-n},\quad \ldots,\quad s_{-2},\quad s_{-1},\quad s_0,\quad s_1,\quad s_2,\quad \ldots,\quad s_n,\quad \ldots,$$

s_n est fonction de n en même temps que de x : n sera appelé le *paramètre des substitutions du groupe;* quant aux coefficients, que contiennent les s_n, et qui ne dépendent pas de n et par suite sont les mêmes dans toutes les substitutions de ce groupe, ce seront les *constantes du groupe.*

Supposons que le groupe d'ordre 1 considéré ne contienne qu'un nombre fini m de substitutions; ces substitutions sont alors algébriques, car le groupe contient non seulement la substitution inverse s_{-n} d'une substitution s_n quelconque et qui est telle que

$$s_{-n}(s_n(x)) = x,$$

mais encore toutes les fonctions partielles qu'il faut adjoindre soit à s_n, soit à s_{-n} pour former une fonction complète; en sorte que si s_n était transcendante, le nombre de ces fonctions partielles, s'_n, s''_n, $\ldots$, ou s'_{-n}, s''_{-n}, $\ldots$, serait infini et par suite le groupe contiendrait une infinité de substitutions. Ceci étant, on pourra prendre pour paramètre, au lieu de n, une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité :

$$\lambda_n = e^{\frac{2n\pi\sqrt{-1}}{m}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

et l'équation

$$F(s) = F(x),$$

où F est une fonction périodique de groupe g, permet d'écrire les substitutions sous la forme

$$s_n(x) = \varphi(x, \lambda_n) = \varphi(x, \lambda_1^n).$$

Il s'ensuit qu'au lieu de s_1, on pourra prendre, pour substitution fondamentale du groupe, toute substitution s_p telle que les puissances de λ_1^p donnent les m racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité : ces substitutions s_p sont donc telles que λ_1^p est une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité, c'est-à-dire que p est premier avec m; on en sait former le nombre au moyen des diviseurs premiers de m. En particulier, si m est un nombre premier, chacune des substitutions s_p peut être prise pour substitution fondamentale.

L'itération d'une substitution s_p dans laquelle p n'est pas premier, avec m, donne des substitutions du groupe, mais ne les donne pas toutes; leur ensemble constitue évidemment aussi un groupe, mais ce groupe est contenu comme sous-groupe dans le groupe g, et le nombre des substitutions de ce nouveau groupe est un diviseur de m.

Lorsque le nombre des substitutions de g est infini, les substitutions ne sont pas nécessairement algébriques et l'on ne peut généralement prendre pour paramètres des racines imaginaires de l'unité (cependant dans le cas du groupe continu d'ordre 1 de la fonction improprement linéale

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^m,$$

où m est incommensurable, on peut prendre pour paramètre une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité). Mais on pourra, le plus souvent, distinguer comme précédemment dans le groupe, des substitutions autres que s_1, qui pourraient être prises, chacune, pour substitution fondamentale;

l'itération et l'inversion de toute autre ne donnerait qu'un sous-groupe contenu dans g.

4. Considérons maintenant les points multiples de g. Soit α un point multiple où l'on a

$$s_p(\alpha) = \alpha.$$

Il s'ensuit immédiatement

$$s_p(\alpha) = s_{2p}(\alpha) = s_{3p}(\alpha) = \ldots = \alpha.$$

Ainsi, toutes les substitutions du groupe d'ordre 1 dont $s_p(\alpha)$ est la substitution fondamentale deviennent identiques à α, pour $x = \alpha$. Si $s_p(x)$ est une des substitutions qui peuvent être prises pour substitution fondamentale du groupe g d'ordre 1 primitivement formé au moyen de $s_1(x)$, α appartient à toutes les substitutions du groupe g (si le nombre des substitutions est un nombre fini m, nous rappelons que p est premier avec m). Si $s_p(x)$ n'est pas une substitution pouvant être prise pour substitution fondamentale, il peut arriver que α n'appartienne pas à toutes les substitutions du groupe g. Si le nombre m était un nombre fini premier, on voit que le point α serait nécessairement commun à toutes les substitutions du groupe g [1].

Dans le cas où g contient une infinité de substitutions obtenues par itération et inversion de $s_1(x)$, on doit faire croître indéfiniment n dans $s_n(x)$. Si $s_n(x)$ a une limite finie, cette limite est indépendante de x; en effet $s_n(x)$ et $s_{n+1} = s_1(s_n)$ ont nécessairement même limite;

[1] Ces propriétés ont été étudiées dans certains cas particuliers par plusieurs mathématiciens, notamment par M. Kœnigs. Notre méthode tire sa simplicité et sa généralité de l'hypothèse de l'existence de la fonction périodique $F(x)$, qui nous a permis de nous servir de l'équation aux substitutions $F(s) = F(x)$.

il s'ensuit que si $\sigma(x)$ est la limite de s_n, $s_1(\sigma(x))$ est la limite de s_{n+1} et par conséquent

$$s_1(\sigma(x)) = \sigma(x),$$

ce qui est impossible, à moins que : 1° σ ne soit constant; 2° la valeur de la limite σ ne soit un point multiple de s_1 et, par suite, de toutes les autres substitutions. D'autre part, si a est cette limite finie de $s_n(x)$, on a

$$F(x) = F(a),$$

puisque a est une substitution du groupe, limite de $s_n(x)$; cette égalité est impossible quel que soit x, à moins que $F(a)$ ne soit indéterminée; donc :

Toute limite finie de la substitution $s_n(x)$, itérée de $s_1(x)$ lorsque n croît indéfiniment, est une constante a et cette constante est à la fois un point multiple commun à toutes les substitutions du groupe d'ordre 1, *et un point singulier essentiel de la fonction périodique* $F(x)$ *de groupe g.*

On en a un exemple dans les substitutions données par l'égalité

$$\frac{1}{s-a} = \frac{1}{x-a} + \frac{n}{b} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

qui sont les substitutions de la fonction

$$F(x) = \operatorname{tang} \frac{\pi b}{x-a},$$

et des transformées linéaires de cette fonction; le point a est à la fois un point multiple du groupe, le seul d'ailleurs, et un point essentiel de la fonction $F(x)$.

On peut ajouter d'une manière générale et pour un groupe d'ordre quelconque que, les substitutions $s_n(x)$

laissant $F(x)$ invariable, les zéros, les infinis, les points singuliers essentiels de $F(x)$ ou restent invariables par les substitutions du groupe, et alors ce sont des points multiples, ou sont transformés en des points qui sont respectivement de même nature qu'eux-mêmes.

5. Ayant pris une substitution quelconque $s_1(x)$ dans un groupe G quelconque, nous avons formé le sous-groupe d'ordre 1 dont $s_1(x)$ est la substitution fondamentale et, à cette occasion, nous avons démontré les propriétés générales des groupes d'ordre 1. Soit maintenant g_1 le sous-groupe formé au moyen de $s_1(x)$ et soit $s_2(z)$ une substitution de G qui n'appartienne pas à g_1; on peut former un sous-groupe g_2 d'ordre 1 dont la substitution fondamentale soit s_2. Si g_2 contient g_1, nous laisserons g_1 de côté; si g_2 et g_1 ont quelques substitutions communes, nous rejetterons s_2 et prendrons une autre substitution de G; nous nous placerons donc dans le cas où g_1 et g_2 n'ont aucune substitution commune. G contient toutes les substitutions formées par combinaisons de substitutions de g_1 et de substitutions de g_2. Formons toutes ces substitutions; leur ensemble, en y comprenant les substitutions de g_1 et celles de g_2, restera invariable si l'on y fait à x une substitution prise dans cet ensemble; ses éléments ne seront que permutés. Cet ensemble est donc un *groupe* $g_{1,2}$ d'ordre 2, contenu comme sous-groupe dans G, et contenant comme sous-groupes g_1 et g_2.

Soit maintenant g_3 un nouveau sous-groupe d'ordre 1, formé au moyen d'une substitution s_3 de G n'appartenant pas à $g_{1,2}$, et supposons comme plus haut que g_3 n'ait aucune substitution commune avec $g_{1,2}$. Toutes les substitutions formées par combinaisons des substitutions de g_3 et de $g_{1,2}$ appartiennent à G et forment, avec celles de g_3 et de $g_{1,2}$, un sous-groupe $g_{1,2,3}$ d'ordre 3, contenu dans G, et contenant comme sous-groupes g_3, $g_{1,2}$ et par suite g_1 et g_2. Mais si l'on forme le groupe d'ordre 2, $g_{2,3}$, au moyen des substitutions fondamentales s_2 et s_3, on voit que ce groupe est contenu dans $g_{1,2,3}$ et contient g_2 et g_3 ; de même le groupe d'ordre 2, $g_{1,3}$, formé au moyen des substitutions fondamentales s_1 et s_3, est contenu dans $g_{1,2,3}$ et contient g_1 et g_3. En résumé, le sous-groupe d'ordre 3, $g_{1,2,3}$ contient les trois sous-groupes d'ordre 2, $g_{1,2}$, $g_{2,3}$, $g_{1,3}$ qui contiennent eux-mêmes, chacun, deux des sous-groupes d'ordre 1, g_1, g_2, g_3.

Formant un nouveau sous-groupe d'ordre 1, g_4, au moyen d'une substitution s_4 de G, qui n'appartienne pas à $g_{1,2,3}$, on aura par combinaisons des substitutions de ces deux groupes, des substitutions formant avec g_3 et $g_{1,2,3}$ un sous-groupe $g_{1,2,3,4}$ d'ordre 4, contenu dans G, et ce sous-groupe contiendra tous les sous-groupes d'ordres respectifs 3, 2, 1,

$$g_{2,3,4},\quad g_{1,3,4},\quad g_{1,2,4},\quad g_{1,2,3},$$
$$g_{1,2},\quad g_{1,3},\quad g_{1,4},\quad g_{2,3},\quad g_{2,4},\quad g_{3,4},$$
$$g_1,\quad g_2,\quad g_3,\quad g_4,$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les substitutions de G; nous supposons qu'avec un nombre fini de substitutions fondamentales s_1, s_2, ..., s_n on soit arrivé à former une suite de sous-groupes

$$g_1,\quad g_{1,2},\quad g_{1,2,3},\quad \ldots,\quad g_{1,2,3,\ldots,n},$$

dont le dernier, $g_{1,2,\ldots,n}$, qui est d'ordre n, soit identique à G. Dans cette suite de sous-groupes, on peut remarquer que l'un quelconque d'entre eux contient comme sous-groupes tous ceux qui le précèdent et est contenu dans ceux qui le suivent. Les éléments de formation de G ont été $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

On peut considérer aussi comme éléments de cette formation les sous-groupes *fondamentaux* d'ordre 1,

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad \ldots, \quad g_n.$$

On aurait une autre suite de sous-groupes, en partant d'un sous-groupe g_{p_1} d'ordre 1, et combinant ses substitutions avec celles d'un autre sous-groupe g_{p_2} d'ordre 1 et ainsi de suite :

$$g_{p_1}, \quad g_{p_1,p_2}, \quad g_{p_1,p_2,p_3}, \quad \ldots, \quad g_{p_1,p_2,\ldots,p_n},$$

où les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ne sont autres que les n premiers nombres et les g_p les mêmes sous-groupes fondamentaux d'ordre 1 que précédemment, mais rangés dans un ordre différent.

Dans les n sous-groupes fondamentaux, on peut d'ailleurs choisir d'autres substitutions fondamentales que celles qui ont été primitivement choisies : on aurait d'autres systèmes fondamentaux de substitutions de G, mais qui donneraient les mêmes sous-groupes fondamentaux. Mais on peut aussi partir de substitutions n'appartenant à aucun des n sous-groupes d'ordre 1 formés : on obtiendra ainsi de nouvelles formations de G et d'autres suites de sous-groupes d'ordre $1, 2, \ldots, n'$ n'ayant rien de commun avec les premières; dans chacune de ces formations le dernier groupe obtenu, qui sera d'ordre n', sera identique à G.

Nous réserverons le terme d'*ordre du groupe* G au plus petit N des nombres $n, n', n'', \ldots$ et le terme de *système fondamental* à N substitutions ou à N sous-groupes d'ordre 1, qui suffisent à déterminer G.

Si l'on forme N sous-groupes fondamentaux d'ordre 1 d'un groupe G d'ordre N, puis, au moyen d'une substitution qui n'appartient pas à ces N sous-groupes, un nouveau sous-groupe d'ordre 1, puis, au moyen d'une substitution de G qui n'appartient pas à ces N + 1 sous-groupes, un nouveau sous-groupe d'ordre 1 et ainsi de suite, on voit que G peut être considéré comme un ensemble de sous-groupes d'ordre 1, car on arrivera ainsi nécessairement à épuiser les substitutions de G. Ce théorème nous sera utile dans les applications.

Soient deux groupes, G et G' d'ordres quelconques, et supposons que ces deux groupes aient des substitutions communes. Si $s_i(x)$ et $s_j(x)$ sont deux quelconques de ces substitutions communes, la substitution $s_i(s_j(x))$ est aussi une substitution qui appartient à G et à G'; les itérées et les inverses de s_i, de s_j, de $s_i(s_j(x))$ sont aussi des substitutions communes. Les substitutions communes à G et à G', étant telles, que leur ensemble contient toutes les substitutions formées en faisant à x une substitution quelconque de cet ensemble, *forment un groupe* g. Donc, lorsque deux groupes G et G' quelconques ont des substitutions communes, les deux groupes G et G' ont en commun un sous-groupe g et n'ont pas d'autres substitutions communes que celles de ce sous-groupe g, dont l'ordre peut d'ailleurs être un nombre entier quelconque inférieur aux ordres respectifs de G et de G'.

6. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions complètes uniformes et par conséquent périodiques. La fonction

$$\mathrm{F}(x) = \varphi(f(x))$$

est également une fonction complète uniforme et par conséquent une fonction périodique. Soient G, g, γ les groupes respectifs de F, f et φ; s_1, s_2, s_3, ..., et σ_1, σ_2,

σ_3, ... les substitutions respectives de f et de φ, formant les groupes g et γ. $F(x)$ admet évidemment toutes les substitutions de $f(x)$ et, par conséquent, g est contenu comme sous-groupe dans G. Les substitutions de F qui n'appartiennent pas à f, c'est-à-dire les substitutions qui, dans G, ne sont pas contenues dans g, sont des substitutions $t_1(x)$, $t_2(x)$, ... qui transforment $f(x)$ en les substitutions $\sigma(f)$ de la fonction $\varphi(f)$:

$$f(t_i(x)) = \sigma_j(f(x)).$$

Réciproquement, si deux fonctions complètes uniformes $F(x)$ et $f(x)$ ont des groupes G et g, tels que g est contenu comme sous-groupe dans G, $F(x)$ est une certaine fonction complète uniforme φ de $f(x)$ [1], car, puisque g est contenu dans G, une valeur de $f(x)$ ne détermine qu'une valeur $F(x)$ [en dehors de certaines valeurs particulières de f, qui seraient, lorsqu'elles existent, des points singuliers essentiels de φ, et correspondent à des points singuliers essentiels x de $F(x)$].

Soient G un groupe d'ordre N et

$$g_1, \quad g_{1,2}, \quad g_{1,2,3}, \quad \ldots, \quad g_{1,2,\ldots,N}$$

une suite de sous-groupes telle que celles que nous avons formées précédemment (5) où le dernier $g_{1,2,\ldots,N}$ est

---

(1) Nous nous sommes servi de ces propriétés dans l'étude d'une certaine fonction uniforme $\varphi(y)$ qui est telle que

$$\operatorname{sn} x = \varphi\left(\sin \frac{\pi}{2K} x\right), \qquad \operatorname{sn}(K + x) = \varphi\left(\cos \frac{\pi}{2K} x\right)$$

[*Sur une nouvelle transcendante qui transforme l'intégrale elliptique de première espèce en intégrale circulaire* (*Nouvelles Annales,* décembre 1900)]. On se sert également de cette propriété dans la théorie des fonctions elliptiques, lorsqu'on exprime $\Theta(x)$ au moyen de $e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$.

identique à G. Si $F(x)$ est une fonction complète uniforme de groupe G et $f_{1,2,\ldots,p}(x)$ une fonction complète uniforme de groupe $g_{1,2,\ldots,p}$, F sera une certaine fonction complète uniforme de $f_{1,2,\ldots,p}$, et l'on voit que F pourra se mettre sous la forme

$$F(x) = \varphi_N\Big(\varphi_{N-1}\Big(\ldots\Big(\varphi_3\big(\varphi_2(f_1(x))\big)\Big)\ldots\Big)\Big),$$

où f_1, φ_2, φ_3, ..., φ_N sont des fonctions complètes uniformes.

Les diverses formations que l'on peut faire du groupe G d'ordre N conduisent à diverses formes analogues de $F(x)$. Nous n'insistons pas davantage, mais nous ferons remarquer que ces propriétés pourraient être utiles dans la théorie générale des fonctions uniformes et de leurs inverses.

Si deux fonctions complètes uniformes y_1, y_2 sont liées par une relation algébrique de degré m_1 en y_1 et m_2 en y_2 et si y_1 a plus de m_2 substitutions, y_1 et y_2 ont des substitutions communes et, par suite, d'après ce qui précède (5), un *sous-groupe commun*, car s'il n'y avait pas de substitutions communes, le nombre des valeurs de y_2, déterminées par une valeur de y_1, serait égal au nombre des substitutions de y_1 et, par conséquent, serait supérieur à m_2; y_1 a d'ailleurs au moins m_2 substitutions (y compris la substitution identique). On peut tenir le même raisonnement sur la fonction y_2. Si g est le sous-groupe commun aux groupes de y_1 et y_2 et s'il existe une fonction complète uniforme u de groupe g, c'est-à-dire admettant les substitutions de g et seulement celles-là, y_1 et y_2 sont fonctions complètes uniformes de u.

Il résulte de ce qui précède, que deux fonctions complètes uniformes de x qui ont toutes leurs substitutions communes, c'est-à-dire ont le même groupe, *sont fonctions complètes uniformes l'une de l'autre,* c'est-à-dire sont liées par une équation linéaire par rapport à chacune d'elles, ou enfin, que toutes les fonctions complètes uniformes qui ont pour substitutions celles de G, et seulement celles-là, sont les fonctions

$$\text{(A)} \qquad \frac{\lambda\, F(x)+\mu}{\nu\, F(x)+\rho},$$

$F(x)$ étant l'une d'elles et λ, μ, ν, ρ des constantes.

7. Toutes les propriétés que nous avons démontrées sur les groupes (1 à 6) sont démontrées dans le cas général et quel que soit le groupe, discontinu ou continu, et par suite quelle que soit la fonction $F(x)$, uniforme ou multiforme, ponctale ou improprement linéale ou aréale.

Les théorèmes que nous venons de démontrer (6) sur les fonctions $F(x)$ ne sont relatifs qu'aux fonctions complètes uniformes. Toutefois on peut dire que si $f(x)$ est une fonction complète multiforme périodique ainsi que $\varphi(x)$, la fonction $\varphi(f(x))$ admet toutes les substitutions de $f(x)$ et en outre celles qui changent $f(x)$ en une substitution $\sigma(f)$ de la fonction périodique $\varphi(f)$; mais ce théorème ne donne pas lieu à une réciproque comme dans le cas des fonctions uniformes. On peut dire aussi que si F est une fonction multiforme de groupe G, toutes les fonctions données par la formule (A) sont aussi des fonctions de groupe G; mais on ne peut plus dire que ces fonctions (A) sont *les seules* qui admettent les substitutions de G et seulement celles-là.

Nous sommes donc ici obligés de séparer le cas des fonctions complètes multiformes périodiques du cas des fonctions complètes uniformes ([1]). Cependant nous verrons plus tard que les calculs que nous ferons pour déterminer, lorsqu'elles existent, les fonctions complètes uniformes admettant les substitutions d'un groupe quelconque donné, et seulement ces substitutions-là, s'appliquent également au moins à certains cas de fonctions multiformes périodiques, ponctales ou improprement linéales ou aréales, lorsqu'il n'existe pas de fonctions uniformes du groupe donné. C'est, en particulier, ce que l'on peut dire des considérations suivantes :

8. Si $F(x)$ est une fonction complète uniforme, elle se met sous forme de quotient de deux fonctions entières, $\Theta_1(x)$ et $\Theta_2(x)$. Toutes les fonctions (A) de même groupe G que $F(x)$ s'expriment donc par le quotient de deux fonctions entières de la forme

$$\Theta = \lambda\Theta_1 + \mu\Theta_2, \tag{B}$$

où λ et μ sont des constantes. Lorsqu'on fait à x une substitution du groupe G, les fonctions Θ, dont les quotients demeurent invariables, ne peuvent être que multipliées, toutes, par un même facteur $\theta(x)$. Ainsi qu'on l'a déjà fait dans certains cas particuliers, nous appellerons ces fonctions Θ, les *fonctions à multiplicateur relatives au groupe* G *donné*.

Les fonctions Θ, relatives à un groupe G, s'exprimant, toutes, en fonction linéaire et homogène (B) de deux quelconques d'entre elles, sont les intégrales d'une équation différentielle, linéaire et homogène du deuxième

---

([1]) Ces différences de propriétés proviennent de ce fait que les fonctions complètes multiformes ne sont pas, *toutes,* périodiques, tandis que *toutes* les fonctions complètes uniformes sont périodiques (sauf la fonction linéaire).

ordre, dont les coefficients ne dépendent que des substitutions du groupe.

L'expression générale (A) des fonctions qui admettent les substitutions d'un groupe et *seulement celles-là*, montre que toutes ces fonctions sont les intégrales d'une équation différentielle du troisième ordre de la forme

$$\frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2}\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} = \chi(x),$$

où $\chi(x)$ ne dépend que des substitutions du groupe. Cette équation n'est d'ailleurs que l'équation aux quotients des intégrales de l'équation en Θ.

Dans une prochaine Note, nous déterminerons, au moyen des substitutions d'un groupe donné et d'ailleurs quelconque, les coefficients de ces deux équations différentielles, et nous donnerons la formule générale du multiplicateur des fonctions Θ relatives au groupe donné.

[R6bα]

SUR LE DEGRÉ DE GÉNÉRALITÉ DES ÉQUATIONS (DYNAMIQUES) DE LAGRANGE ET LEUR INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. L'ABBÉ ISSALY.

Indiquer clairement pourquoi certaines dérivées partielles de la fonction classique T entrent comme éléments constitutifs dans les équations de Lagrange tant que des surfaces (en nombre déterminé) s'y trouvent implicitement en jeu et, au contraire, ne sont plus susceptibles d'y figurer dès que, au lieu d'elles, interviennent des pseudo-surfaces; rattacher, en second lieu, à notre travail la fonction récemment introduite dans cette même matière par M. Appell : tel est, en peu de mots, l'objet de la présente Note.

Disons tout de suite que nous limiterons nos formules au cas de quatre variables et qu'au lieu d'envisager la vitesse et l'accélération de tout un système de points, nous nous en tiendrons à celles de l'un quelconque d'entre eux, (x, y, z), ses coordonnées étant prises par rapport à un trièdre trirectangle fixe T_0. Le lecteur n'aura point de peine à étendre lui-même nos résultats au cas de n variables.

I. — Vitesses.

1. Soit, en conséquence, le système d'équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} dx &= P_1\, du_1 + P_2\, du_2 + \ldots + P_4\, du_4, \\ dy &= P'_1\, du_1 + P'_2\, du_2 + \ldots + P'_4\, du_4, \\ dz &= P''_1\, du_1 + P''_2\, du_2 + \ldots + P''_4\, du_4, \end{aligned} \right.$$

auquel satisfont les coordonnées du point choisi. Les coefficients $P_1, P_2, \ldots, P''_4$ désignent ici des fonctions arbitraires de $u_1, u_2, \ldots, u_4$, variables que nous supposerons être, à leur tour, des fonctions quelconques du temps. D'après cela, si l'on divise par dt les deux membres de chaque équation, et que, avec $\frac{du_i}{dt} = u'_i$, on fasse

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dz}{dt} = z',$$

on obtiendra le nouveau système

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= P_1\, u'_1 + P_2\, u'_2 + \ldots + P_4\, u'_4, \\ y' &= P'_1\, u'_1 + P'_2\, u'_2 + \ldots + P'_4\, u'_4, \\ z' &= P''_1\, u'_1 + P''_2\, u'_2 + \ldots + P''_4\, u'_4. \end{aligned} \right.$$

On en déduit, en désignant par V la vitesse du point (x, y, z),

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} V^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ &= A_1^2 u_1'^2 + A_2^2 u_2'^2 + \ldots + A_4^2 u_4'^2 \\ &\qquad + 2 B_{12} u_1' u_2' + 2 B_{13} u_1' u_3' + \ldots + 2 B_{34} u_3' u_4'\,; \end{aligned} \right.$$

à condition de poser

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} P_1^2 \;\; + P_1'^2 \;\; + P_1''^2 \;\; = \Sigma P_1^2 \;\; = A_1^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_4^2 \;\; + P_4'^2 \;\; + P_4''^2 \;\; = \Sigma P_4^2 \;\; = A_4^2, \\ P_1 P_2 + P_1' P_2' + P_1'' P_2'' = \Sigma P_1 P_2 = B_{12}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_3 P_4 + P_3' P_4' + P_3'' P_4'' = \Sigma P_3 P_4 = B_{34}. \end{array} \right.$$

2. Avant de poursuivre, donnons à ces premières relations une autre forme. Si, en remarquant que $ds_i = A_i\, du_i$, nous formons les *cosinus*

$$(6)\quad a_1 = \frac{P_1}{A_1}, \qquad b_1 = \frac{P_1'}{A_1}, \qquad c_1 = \frac{P_1''}{A_1}, \qquad a_2 = \frac{P_2}{A_2}, \qquad \ldots,$$

et cela, à l'exemple de ce que nous avons fait déjà dans notre Étude sur les pseudo-surfaces (*Nouvelles Annales*, 1901, p. 60), le système (1) pourra s'écrire

$$(1')\quad \left\{ \begin{aligned} dx &= a_1\, ds_1 + a_2\, ds_2 + \ldots + a_4\, ds_4, \\ dy &= b_1\, ds_1 + b_2\, ds_2 + \ldots + b_4\, ds_4, \\ dz &= c_1\, ds_1 + c_2\, ds_2 + \ldots + c_4\, ds_4. \end{aligned} \right.$$

De son côté, le système (3) devenant, par analogie,

$$(3')\quad \left\{ \begin{aligned} x' &= a_1 s_1' + a_2 s_2' + \ldots + a_4 s_4', \\ y' &= b_1 s_1' + b_2 s_2' + \ldots + b_4 s_4', \\ z' &= c_1 s_1' + c_2 s_2' + \ldots + c_4 s_4', \end{aligned} \right.$$

il en résulte que, présentement,

$$(4')\quad \left\{ \begin{aligned} V^2 = \frac{dS^2}{dt^2} &= s_1'^2 + s_2'^2 + \ldots + s_4'^2 + 2 s_1' s_2' \cos(s_1, s_2) + \ldots \\ &\qquad + 2 s_3' s_4' \cos(s_3, s_4). \end{aligned} \right.$$

Or sous cette forme géométrique, on voit que le vecteur V peut être envisagé (rigoureusement) comme la résultante d'une *ligne polygonale* dont les quatre côtés $s'_1, s'_2, \ldots, s'_4$ seraient respectivement portés sur les arêtes d'un *angle polyèdre* $\mathrm{M}\mathcal{L}_1 \ldots \mathcal{L}_4$ ou $\mathcal{A}_4$, ayant ses faces invariables et son sommet M en coïncidence avec le sommet O du trièdre fixe. C'est dire que, dans tous ses mouvements, $\mathcal{A}_4$ ne pourra que pivoter autour de cette origine.

3. Sans nous arrêter aux *identités* auxquelles se réduit, en vertu des relations (6), le système (5), projetons *orthogonalement* la vitesse V successivement sur les arêtes de l'angle solide $\mathcal{A}_4$. En désignant par V_1, $V_2, \ldots, V_4$ ces projections, nous aurons d'abord cette expression générale

$$V_i = a_i x' + b_i y' + c_i z',$$

et, par suite, d'après (3) et (5),

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 V_1 = P_1 x' + P'_1 y' + P''_1 z' = A_1^2\, u'_1 + B_{12} u'_2 + B_{13} u'_3 + B_{14} u'_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_4 V_4 = P_4 x' + P'_4 y' + P''_4 z' = B_{14} u'_1 + B_{24} u'_2 + B_{34} u'_3 + A_4^2 u'_4; \end{array}\right.$$

le déterminant du système n'étant autre que

$$D_u = \begin{vmatrix} A_1^2 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{12} & A_2^2 & B_{23} & B_{24} \\ B_{13} & B_{23} & A_3^2 & B_{34} \\ B_{14} & B_{24} & B_{34} & A_4^2 \end{vmatrix}.$$

En prenant les arcs $s_1, s_2, \ldots, s_4$ pour variables, on trouvera de même

$$(7')\quad \left\{\begin{array}{l} V_1 = s'_1 + s'_2 \cos(s_1, s_2) + \ldots + s'_4 \cos(s_1, s_4); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_4 = s'_1 \cos(s_1, s_4) + s'_2 \cos(s_2, s_4) + \ldots + s'_4, \end{array}\right.$$

avec un déterminant D_s dont la formation est, elle aussi, immédiate.

Ces formules établies, écrivons, conformément à l'usage,

$$(8)\qquad V^2 = \frac{dS^2}{dt^2} = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2T.$$

En différentiant successivement cette fonction T par rapport à $u'_1, u'_2, \ldots, u'_4$, considérés comme variables indépendantes, il viendra (4)

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial u'_1} = A_1^2\, u'_1 + B_{12} u'_2 + B_{13} u'_3 + B_{14} u'_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial T}{\partial u'_4} = B_{14} u'_1 + B_{24} u'_2 + B_{34} u'_3 + A_4^2 u'_4, \end{array}\right.$$

ou bien (4'),

$$(9')\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial s'_1} = s'_1 + s'_2 \cos(s_1, s_2) + \ldots + s'_4 \cos(s_1, s_4), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial T}{\partial s'_4} = s'_1 \cos(s_1, s_4) + s'_2 \cos(s_2, s_4) + \ldots + s'_4. \end{array}\right.$$

Que si nous comparons maintenant ce double résultat avec les Tableaux (7) et (7'), nous en déduirons aussitôt, pour exprimer les projections orthogonales qui nous occupent :

$$(10)\qquad A_1 V_1 = \frac{\partial T}{\partial u'_1}, \qquad A_2 V_2 = \frac{\partial T}{\partial u'_2}, \qquad \ldots, \qquad A_4 V_4 = \frac{\partial T}{\partial u'_4},$$

ou, équivalemment,

$$(10')\qquad V_1 = \frac{\partial T}{\partial s'_1}, \qquad V_2 = \frac{\partial T}{\partial s'_2}, \qquad \ldots, \qquad V_4 = \frac{\partial T}{\partial s'_4}.$$

Concluons de ces premières formules que, tant pour les surfaces que pour les pseudo-surfaces, les projections $V_1, V_2, \ldots, V_4$ de la vitesse V du point (x, y, z)

s'expriment *de la même manière* au moyen des dérivées partielles de la fonction T.

4. On nous demandera peut-être, à titre d'éclaircissement, en quoi la question présente implique des surfaces ou des pseudo-surfaces?... Le voici :

Remontons au système (1). Si l'on y suppose, par exemple, u_3 et u_4 *constants,* il se réduira à

$$(11)\qquad \begin{cases} dx = P_1\,du_1 + P_2\,du_2, \\ dy = P'_1\,du_1 + P'_2\,du_2, \\ dz = P''_1\,du_1 + P''_2\,du_2. \end{cases}$$

Or un tel système, on le sait (Étude citée), représente généralement une pseudo-surface $\mathcal{F}_{12}$, tangente en M au plan des arêtes $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ (lequel remplace ici le plan mobile des XY) et, très exceptionnellement, une surface F_{12} jouissant de la même propriété. Comme, d'autre part, avec nos quatre indices, pris deux à deux, on peut former six combinaisons, nous aurons d'abord quatre pseudo-surfaces ou surfaces *principales* correspondant aux combinaisons (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1) et respectivement tangentes en M aux faces de l'angle $\mathcal{A}_4$, puis, deux autres pseudo-surfaces ou surfaces qu'on peut appeler *secondaires,* comme tangentes aux plans *diagonaux* (1, 3) et (2, 4). Telle est notre réponse.

II. — Accélérations.

5. Soient W l'accélération du point donné et x'', y'', z'' ses composantes, par rapport aux axes fixes. Si l'on désigne par W_1, W_2, ..., W_4 les projections orthogonales de W sur les arêtes de l'angle polyèdre $\mathcal{A}_4$, on aura généralement

$$W_i = a_i x'' + b_i y'' + c_i z'',$$

et, par suite, eu égard à (6) :

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_1 W_1 = P_1 x'' + P'_1 y'' + P''_1 z'', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_4 W_4 = P_4 x'' + P'_4 y'' + P''_4 z'', \end{array}\right.$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$(12')\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 W_1 = \dfrac{d}{dt}(P_1 x' + P'_1 y' + P''_1 z') - \left(x' \dfrac{dP_1}{dt} + y' \dfrac{dP'_1}{dt} + z' \dfrac{dP''_1}{dt}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_4 W_4 = \dfrac{d}{dt}(P_4 x' + P'_4 y' + P''_4 z') - \left(x' \dfrac{dP_4}{dt} + y' \dfrac{dP'_4}{dt} + z' \dfrac{dP''_4}{dt}\right). \end{array}\right.$$

Or il résulte de notre premier paragraphe que

$$P_i x' + P'_i y' + P''_i z' = A_i V_i = \frac{\partial T}{\partial u'_i}.$$

Le système précédent revient donc à

$$(12'')\qquad \left\{\begin{array}{l} A_1 W_1 = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u'_1}\right) - R_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_4 W_4 = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u'_4}\right) - R_4, \end{array}\right.$$

en désignant, pour abréger, par R_i la deuxième parenthèse.

Nous reproduisons de la sorte, sans distinction aucune de surfaces ou de pseudo-surfaces, les premiers termes des équations dynamiques de Lagrange (pour une masse $m = 1$). On va voir qu'il n'en saurait être ainsi des seconds termes, et cela même précisera le degré de généralité qu'on peut accorder aux formules prises en entier.

Considérons à cet effet la fonction R_1, entre autres. De ce que les dérivées qu'elle contient sont des dérivées totales, il s'ensuit qu'en les développant on a

$$(13)\quad \begin{cases} R_1 = x'\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial u_1}u'_1 + \ldots + \dfrac{\partial P_1}{\partial u_4}u'_4\right) + y'\left(\dfrac{\partial P'_1}{\partial u_1}u'_1 + \ldots + \dfrac{\partial P'_1}{\partial u_4}u'_4\right) \\ \qquad\qquad + z'\left(\dfrac{\partial P''_1}{\partial u_1}u'_1 + \ldots + \dfrac{\partial P''_1}{\partial u_4}u'_4\right). \end{cases}$$

D'autre part, de la formule (8) on tire

$$\frac{\partial T}{\partial u_1} = x'\frac{\partial x'}{\partial u_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial u_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial u_1},$$

et, conséquemment, d'après (3),

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial u_1} = x'\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial u_1}u'_1 + \ldots + \dfrac{\partial P_4}{\partial u_1}u'_4\right) + y'\left(\dfrac{\partial P'_1}{\partial u_1}u'_1 + \ldots + \dfrac{\partial P'_4}{\partial u_1}u'_4\right) \\ \qquad\qquad + z'\left(\dfrac{\partial P''_1}{\partial u_1}u'_1 + \ldots + \dfrac{\partial P''_4}{\partial u_1}u'_4\right). \end{cases}$$

En comparant les expressions (13) et (14), on reconnaît que leur *identification* n'est possible que si l'on a

$$\frac{\partial P_1}{\partial u_2} = \frac{\partial P_2}{\partial u_1}, \qquad \frac{\partial P_1}{\partial u_3} = \frac{\partial P_3}{\partial u_1}, \qquad \frac{\partial P_1}{\partial u_4} = \frac{\partial P_4}{\partial u_1};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

En comparant de même R_2 avec $\dfrac{\partial T}{\partial u_2}$, on obtient les deux nouveaux groupes ternaires de conditions :

$$\frac{\partial P_2}{\partial u_3} = \frac{\partial P_3}{\partial u_2}, \qquad \frac{\partial P_2}{\partial u_4} = \frac{\partial P_4}{\partial u_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

R_3 comparé à $\dfrac{\partial T}{\partial u_3}$ fournira, à son tour, le suivant

$$\frac{\partial P_2}{\partial u_4} = \frac{\partial P_4}{\partial u_3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quant au dernier couple, R_4, $\dfrac{\partial T}{\partial u_4}$, il ne donne rien de nouveau.

En résumé, l'identification, deux à deux, des systèmes (13), (14) et de leurs similaires n'est possible que si les 6×3 ou 18 conditions d'intégrabilité qu'exigent les équations (1) sont satisfaites, c'est-à-dire si les trois coordonnées du point (x, y, z) sont des fonctions *finies* des variables $u_1, u_2, \ldots, u_4$.

Géométriquement, cela signifie que les six pseudo-surfaces, principales ou secondaires, que nous avons vues être tangentes en M respectivement aux faces de l'angle polyèdre $\mathcal{A}_4$ et à ses deux plans diagonaux, doivent se transformer en *surfaces*. Libre alors de faire usage des formules ordinaires de Lagrange, que nous reproduisons ici :

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 W_1 = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u_1'}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial u_1} = A_1 Q_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_4 W_4 = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial u_4'}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial u_4} = A_4 Q_4. \end{array}\right.$$

On arriverait aux mêmes conclusions en adoptant pour variables les arcs $s_1, s_2, \ldots, s_4$, vu que, dans les diverses conditions obtenues tout à l'heure,

$$P_1, \quad P_1', \quad P_1'', \quad P_2, \quad \ldots$$

se trouveraient remplacés simplement par les cosinus qui leur correspondent, à savoir : $a_1, b_1, c_1, a_2, \ldots$.

6. C'est pour obvier à l'insuffisance que manifeste, dans le cas général, la fonction T, que M. Appell a proposé (*Comptes rendus,* 1899) de la remplacer par une autre, d'un emploi, non pas plus simple, sans doute, mais plus sûr.

Occupons-nous brièvement de cette fonction nouvelle et, pour cela, reprenons d'abord notre système (3).

Si l'on forme les dérivées totales de ses équations, on aura

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} x'' = (P_1 u''_1 + \ldots + P_4 u''_4) + \left(\dfrac{dP_1}{dt} u'_1 + \ldots + \dfrac{dP_4}{dt} u'_4\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

ou, en développant,

$$(16')\quad \left\{\begin{array}{l} x'' = (P_1 u''_1 + \ldots + P_4 u''_4) \\ \qquad + \left[\dfrac{\partial P_1}{\partial u_1} u'^2_1 + \left(\dfrac{\partial P_1}{\partial u_2} + \dfrac{\partial P_2}{\partial u_1}\right) u'_1 u'_2 + \dfrac{\partial P_2}{\partial u_2} u'^2_2\right] + \ldots . \end{array}\right.$$

Or, que l'on ait

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial P_1}{\partial u_2} = \dfrac{\partial P_2}{\partial u_1}, \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial u_3} = \dfrac{\partial P_3}{\partial u_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \qquad \text{ou bien} \qquad \begin{array}{l} \dfrac{\partial P_1}{\partial u_2} \neq \dfrac{\partial P_2}{\partial u_1}, \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial u_3} \neq \dfrac{\partial P_3}{\partial u_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

autrement dit : que les équations (1) soient intégrables ou non; qu'il s'agisse de surfaces ou de pseudo-surfaces, on n'en a pas moins

$$(18)\quad \frac{\partial x''}{\partial u''_1} = P_1, \quad \frac{\partial y''}{\partial u''_1} = P'_1, \quad \frac{\partial z''}{\partial u''_1} = P''_1, \quad \frac{\partial x''}{\partial u''_2} = P_2, \quad \ldots .$$

Cela étant, à l'instar des relations (8), faisons

$$(19)\qquad W^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 = 2J.$$

On en tire

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial J}{\partial u''_1} = x'' \dfrac{\partial u''}{\partial u''_1} + y'' \dfrac{\partial y''}{\partial u''_1} + z'' \dfrac{\partial z''}{\partial u''_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Substituant à ces dérivées partielles leurs valeurs (18), il vient, d'après (12) et (15) :

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial J}{\partial u''_1} = P_1 x'' + P'_1 y'' + P''_1 z'' = A_1 W_1 = A_1 Q_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial J}{\partial u''_4} = P_4 x'' + P'_4 y'' + P''_4 z'' = A_4 W_4 = A_4 Q_4; \end{array}\right.$$

d'où l'on voit qu'il y aura effectivement un avantage réel à remplacer la fonction T par son analogue, la fonction J, lorsqu'on voudra établir, dans toute leur généralité, les équations du mouvement d'un système quelconque.

7. Allons plus loin : Puisque, en vertu de ce qui précède, nous nous trouvons conduit à limiter (conventionnellement) les expressions (16) des composantes x'', y'', z'' à leurs premières parenthèses, les seules qui aient été utilisées dans (20), nous pouvons par là même (conventionnellement aussi, dans ce qui suit) les prendre sous la forme correspondante (6)

$$x'' \equiv A_1 a_1 u''_1 + A_2 a_2 u''_2 + \ldots + A_4 a_4 u''_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

laquelle entraîne

$$(21)\quad x''^2 + y''^2 + z''^2 \equiv A_1^2 u''^2_1 + A_2^2 u''^2_2 + \ldots + 2 B_{34} u''_3 u''_4.$$

Mais, d'autre part, on a toujours

$$(22)\quad \begin{cases} A_i u''_i = A_i \dfrac{du'_i}{dt} = \dfrac{ds'_i}{dt} = s''_i, \\ B_{ij} \;\; = A_i A_j \cos(s_i, s_j). \end{cases}$$

Il vient donc (19)

$$(21')\quad \begin{cases} W^2 = 2J \equiv s''^2_1 + s''^2_2 + \ldots + s''^2_4 + 2 s''_1 s''_2 \cos(s_1, s_2) + \ldots \\ \qquad\qquad + 2 s''_3 s''_4 \cos(s_3, s_4). \end{cases}$$

Ainsi l'introduction de la fonction J et le procédé (artificiel, au fond) qui en règle l'emploi conduisent, par analogie, à assimiler (mais ici, sans précision aucune, quant aux mesures des segments) l'accélération W à la résultante d'une nouvelle ligne polygonale dont les côtés seraient respectivement portés, à l'exemple de

$s'_1, s'_2, \ldots, s'_4$ pour la vitesse V, sur les arêtes du même angle solide $\mathcal{A}_4$.

8. Ajoutons, en dernier lieu, cette remarque : La Thermodynamique utilise, de nos jours, fréquemment, les équations de Lagrange : demain, peut-être, celle de M. Appell. Quoi qu'il en soit, la divergence que cette science nouvelle est contrainte d'avouer, entre ses conclusions théoriques et les faits, ne tiendrait-elle pas, en principe, à ce *dédoublement de termes* que les déplacements, réels ou virtuels, opérés sur des pseudo-surfaces occasionnent nécessairement, et que leurs analogues, sur les surfaces, excluent?....

[F8h]

MOUVEMENT D'UN PLAN INVARIABLEMENT LIÉ A UNE BIELLE. (EXERCICE SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.)

Par M. E. LACOUR,
Professeur à l'Université de Nancy.

1. On suppose qu'une droite de longueur constante PQ se meut de façon que son extrémité P décrive une droite fixe Ox et qu'en même temps son extrémité Q décrive la circonférence d'un cercle ayant pour centre le point O de Ox; il s'agit d'étudier le mouvement d'un plan qui glisse sur le plan du cercle donné, et qui est invariablement lié à la droite PQ.

Dans le plan fixe, nous prenons pour axes Ox et une droite Oy perpendiculaire sur Ox; dans le plan mobile nous prenons pour origine l'extrémité Q de la droite de longueur constante, pour direction positive QX la direction de Q vers P, pour axe QY une droite menée par Q perpendiculaire à PQ dans un sens tel que les deux systèmes d'axes xOy, XQY aient même sens de rotation. Soient α l'angle de Ox avec OQ et $-\beta$ l'angle de Ox avec QX, ces angles étant comptés à partir de Ox et le sens positif pour les angles étant le sens de rotation du système xOy.

La condition pour que PQ ait une longueur constante est, si l'on désigne par R le rayon du cercle et par l la longueur de PQ,

$$(1) \qquad R \sin\alpha - l \sin\beta = 0$$

ou bien

$$(1)' \qquad \sin\beta = k \sin\alpha \qquad \left(k = \frac{R}{l}\right).$$

Dans tout ce qui suit, nous supposerons $l \geqq R$ de sorte que k est compris entre 0 et 1 ou au plus égal à 1.

Les formules de transformation permettant de passer du système xOy au système XQY peuvent s'écrire, en tenant compte de la condition (1),

$$(2) \qquad \begin{cases} x = R\cos\alpha + X\cos\beta + Y\sin\beta, \\ y = -(X - l)\sin\beta + Y\cos\beta, \end{cases}$$

et l'on a d'après (1)',

$$\sin\beta = k\sin\alpha, \qquad \cos\beta = \sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}.$$

On voit que, *dans ces formules de transformation, les coefficients peuvent s'exprimer en fonction elliptique d'un paramètre u.* Il suffit de poser

$$u = \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

il en résulte

$$(3) \qquad \begin{cases} \sin\alpha = \operatorname{sn} u, & \sin\beta = k \operatorname{sn} u, \\ \cos\alpha = \operatorname{cn} u, & \cos\beta = \operatorname{dn} u, \end{cases}$$

les fonctions sn, cn, dn ayant pour module $k = \frac{R}{l}$.

Les formules (2) deviennent

$$(4) \qquad \begin{cases} x = R \operatorname{cn} u + X \operatorname{dn} u + Y k \operatorname{sn} u, \\ y = (l - X) k \operatorname{sn} u + Y \operatorname{dn} u. \end{cases}$$

2. La trajectoire d'un point M du plan mobile rapportée aux axes fixes Ox, Oy est définie par les formules (4) où l'on regarde les coordonnées X et Y comme constantes.

On voit sans peine que, si l'on coupe cette courbe par une droite quelconque du plan, on a en général quatre points d'intersection dont les paramètres u_1, u_2, u_3, u_4, satisfont à la condition

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} 4K, 4iK').$$

Le cas particulier où $l = R$ est un cas de dégénérescence pour les fonctions elliptiques :

$$\operatorname{sn} u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{2}{e^u + e^{-u}},$$

$$\operatorname{dn} u = \frac{2}{e^u + e^{-u}}.$$

Le lieu du point M se réduit alors à une ellipse, résultat évident *a priori*, puisque dans ce cas particulier M est invariablement lié à une droite de longueur constante, $2l$, dont les extrémités décrivent respectivement Ox et Oy.

Le lieu de la trace d'un point du plan fixe sur le plan mobile est déterminé par les mêmes formules (4) où l'on regarde x et y comme constants, X et Y comme les coordonnées courantes.

3. Le centre instantané de rotation, C, est à l'intersection de la normale en P à Ox avec le prolongement du rayon OQ. Cherchons d'abord le lieu (γ) de ce point dans le plan fixe.

On trouve de suite que le point C a pour coordonnées

$$\left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{R}\cos\alpha \pm l\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha},\\ y &= x\,\mathrm{tang}\,\alpha,\end{aligned}\right.$$

le double signe correspond aux deux positions de la droite PQ qui passent par un point Q de la circonférence donnée : le signe + correspond au cas où OP est compté sur Ox dans le sens positif, le signe — au cas où OP est compté dans le sens négatif. On peut se borner au signe + du radical, à condition de compléter ensuite la courbe par symétrie par rapport à Oy.

Les formules elliptiques qui définissent la courbe (γ) sont

$$\left\{\begin{aligned} x &= l(\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,u),\\ y &= x\,\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u},\end{aligned}\right.$$

x et y sont des fonctions doublement périodiques de u admettant comme périodes primitives $4\mathrm{K}$ et $4i\mathrm{K}'$.

Pour trouver le degré de la courbe, il faut déterminer les pôles de x et de y dans un rectangle des périodes, par exemple celui qui a pour sommets o, $4\mathrm{K}$, $4i\mathrm{K}'$, $4\mathrm{K}+4i\mathrm{K}'$.

x ne peut devenir infini qu'en l'un des points

$$i\mathrm{K}',\quad 3i\mathrm{K}',\quad i\mathrm{K}'+2\mathrm{K},\quad 3i\mathrm{K}'+2\mathrm{K}$$

qui sont les zéros de $\Theta(u)$ situés dans le rectangle considéré. Or pour

$$u = i\mathrm{K}' + \varepsilon, \qquad \mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,u = \frac{-i\,\mathrm{cn}\,\varepsilon - i\,\mathrm{dn}\,\varepsilon}{\mathrm{sn}\,\varepsilon},$$

$i\mathrm{K}'$ est un pôle simple; il en est de même de $3i\mathrm{K}'$; pour

$$u = i\mathrm{K}' + 2\mathrm{K}' + \varepsilon,$$

$$\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,u = \frac{i(\mathrm{cn}\,\varepsilon - \mathrm{dn}\,\varepsilon)}{\mathrm{sn}\,\varepsilon} = \frac{-i\left(\frac{1-k^2}{2}\right)\varepsilon^2 + \ldots}{\varepsilon + \ldots},$$

$i\mathrm{K}' + 2\mathrm{K}$ est un zéro; il en est de même de $3i\mathrm{K}' + 2\mathrm{K}$.

Ainsi x admet deux pôles dans le rectangle considéré des périodes, et nous connaissons ses deux zéros.

$y = x\dfrac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$ admet six pôles, les deux pôles de x et les quatre zéros de $\mathrm{H}_1(u)$.

On conclut de là que la courbe (γ) est du sixième ordre et qu'une parallèle à Oy ne la rencontre qu'en deux points à distance finie.

Pour construire la courbe, on reconnait qu'il suffit de faire varier u de 0 à $2\mathrm{K}$ et de compléter ensuite par symétrie par rapport à Ox, puis par rapport à Oy.

Aux formules

$$x = l(\mathrm{dn}\,u + k\,\mathrm{cn}\,u), \qquad y = x\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$$

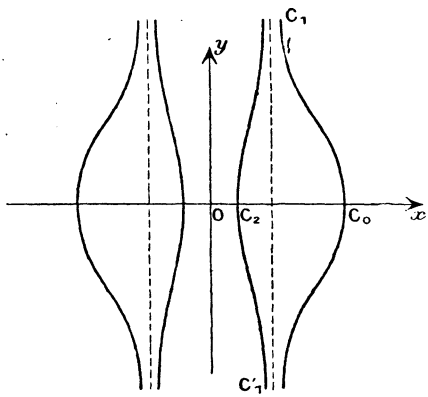
joignons les suivantes

$$\frac{x'_u}{x} = -k\,\mathrm{sn}\,u, \qquad \frac{y'_u}{y} = \frac{\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u};$$

remarquons que l'équation

$$\mathrm{dn}\,u - k\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}^2 u = 0$$

n'est jamais vérifiée dans l'intervalle considéré, ce qui se voit en discutant l'équation correspondante en $\operatorname{sn}^2 u$, et nous avons ce qui est nécessaire pour la construction de la courbe u variant de 0 à K, puis à $2K$, le point C



décrit la branche C_0C_1, puis la branche $C_1'C_2$.

4. Déterminons encore le lieu (Γ) du centre instantané C dans le plan mobile. Les coordonnées X, Y de C peuvent s'obtenir immédiatement, en remarquant sur une figure que l'on a

$$X = l\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\cos(\alpha+\beta),$$

$$Y = l\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\sin(\alpha+\beta),$$

ce qui donne, pour la courbe (Γ), les formules elliptiques

$$\left\{\begin{aligned} X &= l\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}(\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - k \operatorname{sn}^2 u),\\ Y &= l\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}(\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u)\operatorname{sn} u.\end{aligned}\right.$$

La fonction $\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u$ a été étudiée dans le numéro précédent, elle admet iK' et $3iK'$ comme pôles simples $iK' + 2K$ et $3iK' + 2K$ comme zéros simples.

La fonction $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - k \operatorname{sn}^2 u$ qui figure dans l'expression de X admet comme pôles doubles iK, $3iK'$, et elle n'admet pas d'autres pôles dans le rectangle considéré des périodes ; il est visible qu'elle ne s'annule pour aucun des zéros de $H_1(u)$ et on reconnaît (en formant l'équation correspondante en $\operatorname{sn}^2 u$) qu'elle s'annule quand PQ est tangente en Q à la circonférence donnée.

Je me bornerai à ces indications et à la remarque évidente que, pour $l = R$, chacun des lieux (γ) et (Γ) se réduit à un cercle, ce qui donne une vérification des calculs et un renseignement pour la forme de chacune de ces courbes, quand on suppose l un peu supérieur à R.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1901. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

Soient Ox, Oy *deux axes de coordonnées rectangulaires ; soient* a *et* a' *les abscisses de deux points* A *et* A' *de l'axe* Ox, *et* b *l'ordonnée d'un point* B *de l'axe* Oy.

On considère toutes les hyperboles équilatères (H_λ) *circonscrites au triangle* AA'B.

I. *Calculer les coordonnées* x_1, y_1, *du quatrième point* M *de rencontre de la circonférence circonscrite au triangle* AA'B *avec l'hyperbole* (H_λ). *Montrer qu'en* *désignant par* λ *un paramètre variable, ces coordonnées peuvent être mises sous la forme :*

$$x_1 = \frac{A + B\lambda}{1 + \lambda^2},$$
$$y_1 = \lambda x_1 + b,$$

et donner les valeurs des constantes A *et* B.

II. *Vérifier par le calcul que le diamètre de l'hyperbole qui est mené par le point* M *passe par un point fixe, quel que soit* λ.

Le démontrer géométriquement.

III. *Trouver le lieu géométrique des points de contact des tangentes menées aux hyperboles* (H_λ) *parallèlement à une direction donnée, et examiner en particulier les cas où cette direction est celle des axes de coordonnées.*

I. Tout cercle passant par les points A et A′ a une équation de la forme

$$x^2 + y^2 - (a + a')x + aa' + hy = 0.$$

Exprimant qu'il passe par le point B, on a

$$h = -\frac{aa' + b^2}{b}.$$

Si donc nous définissons b' par la relation

$$aa' + bb' = 0, \tag{1}$$

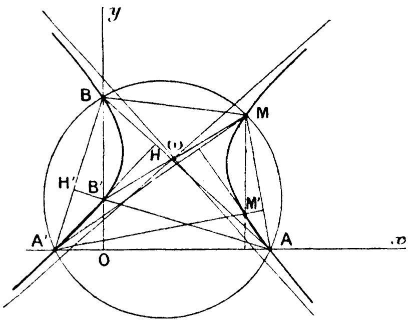
nous voyons que l'équation du cercle C s'écrit

$$x^2 + y^2 - (a + a')x + (b' - b)y + aa' = 0. \tag{2}$$

Si M est le quatrième point commun à ce cercle et à l'hyperbole H_λ (*fig.* 1), la droite BM ayant pour équation

$$y = \lambda x + b,$$

Fig. 1.



l'équation de l'hyperbole sera de la forme

$$x^2 + y^2 - (a + a')x + (b' - b)y + aa' + \theta y(y - \lambda x - b) = 0.$$

Exprimant qu'elle est équilatère, on a

$$\theta = -2.$$

L'équation de H_λ est donc

$$(3) \quad x^2 + 2\lambda xy - y^2 - (a + a')x + (b + b')y + aa' = 0,$$

et l'on vérifie immédiatement, en tenant compte de l'équation (1), que cette hyperbole passe, quel que soit λ, par le point $x = 0$, $y = b'$, qui n'est autre que l'*ortho-centre* B' *du triangle* ABA', propriété bien connue.

Pour avoir les coordonnées x_1, y_1 du point M, remarquons que, ce point se trouvant sur la droite BM, on a d'abord

$$(4) \qquad y_1 = \lambda x_1 + b.$$

Portant cette valeur de y dans l'équation du cercle et supprimant la racine $x = 0$ qui correspond au point B, on a

$$x_1 = \frac{a + a' - \lambda(b + b')}{1 + \lambda^2}. \tag{5}$$

II. Si l'on représente par $f(x, y) = 0$ l'équation (3) de H_λ, on a

$$f'_x = 2x + 2\lambda y - (a + a'),$$
$$f'_y = 2\lambda x - 2y + (b + b').$$

L'équation du diamètre passant au point (x_1, y_1) étant

$$f'_x f'_{y_1} - f'_y f'_{x_1} = 0,$$

on a, en remplaçant y_1 par sa valeur tirée de (4),

$$[2x + 2\lambda y - (a + a')](b' - b)$$
$$- (2\lambda x - 2y - b + b')[2(1 + \lambda^2)x_1 + 2\lambda b - (a + a')] = 0,$$

ou, en tenant compte de (5),

$$x[b' - b - \lambda(a + a') + 2b'\lambda^2]$$
$$+ (y - b')[a + a' - (b + b')\lambda] = 0,$$

équation d'une droite *passant constamment par le point* $x = 0$, $y = b'$, *c'est-à-dire par le point* B', *orthocentre de* ABA'.

Géométriquement, cela résulte de ces deux théorèmes bien connus :

1° *Toutes les hyperboles* H_λ *passent par* B' (*vérifié ci-dessus*);

2° *Le lieu de leur centre est le cercle des neuf points de* ABA', *homothétique du cercle* C *par rapport à l'orthocentre* B', *le rapport d'homothétie étant* $\frac{1}{2}$.

Si, en effet, on se donne sur le cercle des neuf points le centre ω d'une des hyperboles H_λ, le symétrique du point B′ par rapport à ω, qui sera la seconde extrémité du diamètre de H_λ passant par B′, se trouvera sur le cercle C. Or, ce cercle, qui coupe déjà H_λ en A, A′ et B, ne la rencontre qu'en un point en dehors de ces trois-là. Le point obtenu est donc bien le point M, et le diamètre de ce point passe par le point fixe B′ [1].

III. Le diamètre conjugué de la direction de coefficient angulaire m par rapport à l'hyperbole H_λ est

$$2x + 2\lambda y - (a + a') + m(2\lambda x - 2y + b + b') = 0.$$

Éliminant λ entre cette équation et celle (3) de l'hyperbole, on a, pour le lieu cherché, en tenant compte de (1), l'équation

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &y\,[x^2 + y^2 - (b + b')y + bb'] \\ &\quad - mx\,[x^2 + y^2 - (a + a')x + aa'] = 0, \end{aligned}\right.$$

cubique Γ_m passant par les neuf points communs aux deux cubiques dégénérées constituées par

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{c} y = 0, \\ x^2 + y^2 - (b + b')y + bb' = 0 \\ (\text{cercle de diamètre BB}'), \end{array}\right.$$

et par

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{c} x = 0, \\ x^2 + y^2 - (a + a')x + aa' = 0 \\ (\text{cercle de diamètre AA}'). \end{array}\right.$$

---

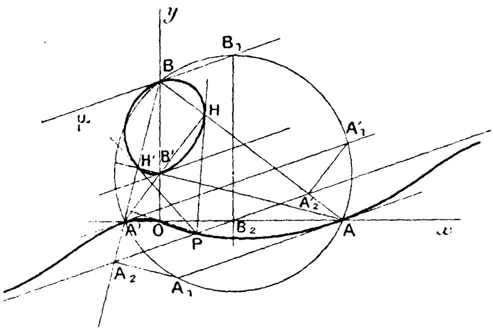
(1) On peut aussi ne s'appuyer que sur le premier des théorèmes énoncés ci-dessus, suivant la variante que voici :

Les cordes communes BM et AA′ à l'hyperbole H_λ et au cercle C sont également inclinées sur les axes de H_λ. Donc BM et la perpendiculaire BB′ à AA′ sont également inclinées sur les asymptotes de H_λ. Ce sont par suite deux cordes supplémentaires de cette hyperbole, et la droite MB′ qui joint les secondes extrémités de ces cordes est un diamètre.

Il suffit alors de remarquer que le centre ω est le milieu de MB′ pour déduire de là le lieu connu de ce point.

Ces neuf points sont les sommets A, A′, B du triangle, son orthocentre B′, les pieds de ses hauteurs O, H, H′, et les deux points cycliques du plan (*fig.* 2). La cu-

Fig. 2.



bique Γ_m est donc circulaire.

Pour le cas où $m = 0$, on a la cubique dégénérée (7) et pour celui où $m = \infty$, la cubique dégénérée (8) (¹).

Pour construire la cubique Γ_m dans le cas général, il suffit de remarquer que *l'asymptote réelle de cette courbe est parallèle à la direction m.*

Coupons donc par la droite

$$y = mx + t.$$

Faisant cette substitution dans (6), on trouve, en

(¹) *Évident géométriquement :* Si $m = 0$, on voit, en prenant l'hyperbole H_λ dégénérée constituée par Ox et Oy, que Ox fait partie du lieu. Pour voir que le reste du lieu est le cercle de diamètre BB′, il suffit de remarquer que, d'après le théorème de Frégier, aux points où ce cercle coupe une hyperbole H_λ quelconque, la normale est parallèle à BB′, et, par suite, la tangente parallèle à Ox. De même pour le second cas de dégénérescence. La même remarque s'applique évidemment aux directions des deux autres côtés AB, A′B et des deux autres hauteurs AH′ et A′H.

égard à (1), l'équation

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &[(1+m^2)t-(b+b')m^2+(a+a')m]x^2 \\ &\qquad +[t^2-(b+b')t+bb'](2mx+t)=0. \end{aligned} \right.$$

Elle montre que l'ordonnée à l'origine de l'asymptote est donnée par

$$(10)\qquad t=-m\,\frac{a+a'-m(b+b')}{1+m^2},$$

et, par suite, son abscisse à l'origine par

$$s=\frac{a+a'-m(b+b')}{1+m^2}.$$

Comparant cette formule à (5), on en déduit que *le point où l'asymptote coupe* AA' *est la projection* B_2 *sur cette droite du point* B_1 *où la droite de direction* m *menée par* B *coupe le cercle* C.

Comme tout est symétrique par rapport aux trois côtés du triangle, une construction analogue fournira les points de rencontre de l'asymptote avec les côtés AB et A'B [1].

La condition de réalité des valeurs de x données par (9) peut s'écrire

$$(11)\quad [t^2-(b+b')t+bb'][t^2+m(a+a')t+m^2aa']\leqq 0.$$

Les valeurs de t qui annulent le premier facteur correspondent aux parallèles à la direction m menées par

---

[1] Le rapprochement de ces trois constructions fournit ce théorème :

Les parallèles à une même direction Δ, *menées par les trois sommets d'un triangle, coupent le cercle circonscrit en des points dont les projections sur les côtés opposés sont sur une même droite parallèle à* Δ.

Coïncidence curieuse : ce théorème a servi de sujet pour le concours général de Mathématiques élémentaires en 1898.

les points B et B′, celles qui annulent le second aux parallèles à la direction m menées par les points A et A′. Il résulte d'abord de là que *ces quatre droites parallèles à la direction m sont respectivement les tangentes à la cubique en* B, B′, A et A′.

L'inégalité (11) montre ensuite que, si l'on considère les trois bandes contiguës formées par ces quatre droites parallèles et les deux régions extérieures à ces bandes, il ne peut y avoir de points de la cubique Γ_m ni dans ces deux régions, ni dans la bande centrale.

La tangente à l'origine de la courbe est donnée par

$$y + mx = 0,$$

droite symétrique de la droite de direction m menée par O, par rapport à AA′.

Par raison de symétrie, la construction s'étendra aux tangentes en H et en H′, pieds des hauteurs sur les côtés AB et A′B. Il est facile de voir que *ces trois tangentes concourent en un même point* P *du cercle des neuf points du triangle* ABA′. On a, en effet, d'après la construction qui vient d'être indiquée,

$$\begin{aligned} \dot{A'H'P} &= \mu BH', \\ AHP &= B_1BH, \end{aligned}$$

d'où, en additionnant,

$$H'BH + H'PH = 180^\circ - H'BH,$$

ou

$$H'PH = 180^\circ - 2H'BH,$$

ce qui prouve que le point P est sur le cercle passant par les pieds H, H′, O des trois hauteurs, c'est-à-dire sur le cercle des neuf points.

D'après l'équation (9), t ayant la valeur (10) correspondant à l'asymptote, l'abscisse du point de rencontre de cette asymptote et de la cubique est donnée par

$$2mx + t = 0, \tag{12}$$

c'est-à-dire que cette abscisse est la moitié de celle du point B_2 où l'asymptote elle-même coupe Ox. Cela montre que le point cherché n'est autre que le point P qui vient d'être trouvé, puisque le triangle OPB_2 est isoscèle.

En résumé :

La cubique Γ_m *correspondant à la direction de coefficient angulaire m est une cubique circulaire passant par les trois sommets, l'orthocentre et les pieds des hauteurs du triangle donné. Les tangentes aux trois sommets, celle à l'orthocentre et l'asymptote sont parallèles à la direction m* [1]. *Les tangentes aux pieds des hauteurs concourent au point où l'asymptote rencontre la courbe, point qui appartient au cercle des neuf points du triangle donné.*

Ces diverses remarques, jointes à celle faite précédemment sur les régions de réalité, fixent de façon très nette la forme générale de la courbe qui est celle représentée sur la *fig.* 2.

On voit que si l'un des angles du triangle est droit, le sommet de cet angle constitue un point double de la cubique, isolé ou effectif suivant qu'il se trouve en dehors ou en dedans des parallèles à la direction m menées par les deux autres sommets. La cubique est alors unicursale.

Supposons, par exemple, que ce soit l'angle A' qui soit

---

[1] De là résulte, en vertu d'un théorème connu, que Γ_m est anallagmatique par rapport aux trois sommets du triangle et à son orthocentre.

droit. Alors

$$a' = b' = 0,$$

et l'équation (6) devient

$$(y - mx)(x^2 + y^2) - by^2 + max^2 = 0.$$

L'équation de l'ensemble des tangentes à l'origine est

$$by^2 - max^2 = 0.$$

Ces tangentes, également inclinées sur Ox, sont rectangulaires si

$$b - ma = 0,$$

c'est-à-dire *si la direction m est celle de la médiane issue de A' dans le triangle ABA'*. Dans ce cas, la cubique Γ_m, unicursale circulaire, ayant des tangentes rectangulaires en son point double, est une *strophoïde*.

Remarque complémentaire. — A la direction m correspond une hyperbole du faisceau défini dans la première partie, que nous représenterons par H_m, et qui s'obtient en faisant coïncider le point M de la *fig.* 1 avec le point B_1 de la *fig.* 2. La cubique Γ_m et l'hyperbole H_m, qui ont déjà en commun les quatre points A, A', B, B', se coupent en deux autres points qui sont ceux de l'hyperbole H_m où la tangente à cette courbe a la direction m. Ces points se trouvent donc sur le diamètre de cette hyperbole conjugué de cette direction, c'est-à-dire sur la droite qui joint le centre (milieu de $B'B_1$) au milieu de la corde BB_1 qui est précisément de direction m. Cette droite, parallèle équidistante de OB et de B_1B_2, passe, d'après ce qui vient d'être vu, par le point P où la cubique rencontre son asymptote. Ainsi :

Les points où l'hyperbole H_m rencontre la cubique Γ_m sont sur le diamètre de cette hyperbole perpendiculaire à AA', diamètre qui passe par le point P où la cubique rencontre son asymptote.

La vérification analytique de ce théorème peut être ainsi faite :

L'équation de l'hyperbole H_m, obtenue en remplaçant λ par m dans (3), peut s'écrire

$$x^2 + y^2 - (a + a')x + aa' + 2mxy - 2y^2 + (b + b')y = 0.$$

Éliminant le polynome $x^2 + y^2 - (a + a')x + aa'$ entre cette équation et l'équation (6) de Γ_m, on a, après suppression de la solution $y = 0$ qui donnerait les points A et A',

$$x^2 + y^2 - (b + b')y + bb' + mx(2mx - 2y + b + b') = 0.$$

L'addition des deux dernières équations écrites donne, en tenant compte de (1), et après suppression de la solution $x = 0$ qui donnerait les points B et B',

$$2(1 + m^2)x + m(b + b') - (a + a') = 0.$$

Cette équation est bien l'équation (12) de la parallèle à Ox menée par P, dans laquelle t a la valeur (10).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1849.

(1900, p. 192.)

Étant donnés une couronne circulaire de centre O *comprise entre les cercles* C *et* C', *et un point* A *en dehors de cette couronne* (*c'est-à-dire intérieur au plus petit cercle ou extérieur au plus grand*), *on appelle* B *et* B' *les points des cercles* C *et* C' *situés sur la perpendiculaire à* OA *élevée en* A *si ce point est intérieur, sur les tangentes issues de* A *si ce point est extérieur et du même côté de* OA, *et l'on pose dans les deux cas*

$$\widehat{AOB} = \omega, \qquad \widehat{AOB'} = \omega'.$$

Si le rayon situé du même côté que B *et* B', *sur lequel l'épaisseur de la couronne est vue de* A *sous le plus grand* *angle* θ, *fait avec* OA *l'angle* φ, *on a*

$$\tang\frac{\varphi}{2} = \tang\frac{\omega}{2}\tang\frac{\omega'}{2},$$

$$\tang\theta = 2\,\frac{\sin\frac{\omega'+\omega}{2}\sin\frac{\omega'-\omega}{2}}{\sin\omega\sin\omega'}.$$

(M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. NICOLAI, à Pistoia.

Si un rayon situé du même côté que B et B', sur lequel l'épaisseur de la couronne circulaire comprise entre les cercles C et C' est vue de A sous l'angle θ, fait avec OA l'angle φ, on a la relation

$$(1)\qquad \tang\theta = \frac{a(R-R')\sin\varphi}{RR'-a(R+R')\cos\varphi+a^2},$$

a désignant l'abscisse de A, R et R' les rayons de C et C'. Le plus grand angle θ correspond à

$$(2)\qquad \cos\varphi = \frac{(R+R')a}{RR'+a^2}.$$

Des formules (1) et (2) on déduit aisément

$$(1')\qquad \tang\theta = \frac{\sin\varphi(\cos\omega-\cos\omega')}{1-\cos\varphi(\cos\omega'+\cos\omega)+\cos\omega\cos\omega'},$$

$$(2')\qquad \cos\varphi = \frac{\cos\omega+\cos\omega'}{1+\cos\omega\cos\omega'}.$$

Si l'on remplace $\cos\sigma$ par $\dfrac{1-\tang^2\frac{\sigma}{2}}{1+\tang^2\frac{2}{\sigma}}$, l'équation (2') devient

$$\tang\frac{\varphi}{2} = \tang\frac{\omega}{2}\tang\frac{\omega'}{2}.$$

On a encore

$$\tang\theta = \frac{\cos\omega-\cos\omega'}{(1+\cos\omega\cos\omega')\sin\varphi} = \frac{\cos\omega-\cos\omega'}{\sin\omega\sin\omega'}.$$

ERRATA.

4ᵉ série, Tome I, 1901, page 292, ligne 1, *au lieu de* T 2 x, *lisez* T 2 a x.
» page 384, *remplacez partout* y *par* J.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME I, 4ᵉ SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

A. — Algèbre élémentaire; théorie des équations algébriques et transcendantes; groupes de Galois; fractions rationnelles ; interpolation.

B. — Déterminants; substitutions linéaires; élimination; théorie algébrique des formes; invariants et covariants; quaternions; équipollences et quantités complexes.

C. — Principes du Calcul différentiel et intégral ; applications analytiques ; quadratures ; intégrales multiples ; déterminants fonctionnels; formes différentielles ; opérateurs différentiels.

D. — Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires; séries et développements infinis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique; nombres de Bernoulli; fonctions sphériques et analogues.

F. — Fonctions elliptiques avec leurs applications.

H. — Équations différentielles et aux différences partielles; équations fonctionnelles; équations aux différences finies; suites récurrentes.

K. — Géométrie et Trigonométrie élémentaires (étude des figures formées de droites, plans, cercles et sphères); Géométrie du point, de la droite, du plan, du cercle et de la sphère; Géométrie descriptive; perspective.

L¹. — Coniques.

L². — Quadriques.

M¹. — Courbes planes algébriques.

M². — Surfaces algébriques.

M³. — Courbes gauches algébriques.

O. — Géométrie infinitésimale et Géométrie cinématique; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes et des surfaces; quadrature et rectification; courbure; lignes asymptotiques, géodésiques; lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.

P. — Transformations géométriques; homographie; homologie et affinité; corrélation et polaires réciproques; inversion; transformations birationnelles et autres.

Q. — Géométrie, Divers; Géométrie à n dimensions; Géométrie non euclidienne. Analysis situs; Géométrie de situation.

R. — Mécanique générale; Cinématique; Statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie; Dynamique; Mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.

T. — Physique mathématique; élasticité; résistance des matériaux; capillarité; lumière; chaleur; électricité.

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Questions de concours.

Correspondance.

Bibliographie.

Divers.

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS

(TOME I, 4e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

29687 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

AVIS.

Un Tableau de correspondance entre les numéros des Questions des NOUVELLES ANNALES *depuis la fondation et les Solutions est actuellement en préparation et sera mis en vente dans le courant de janvier* 1901.

Les abonnés des NOUVELLES ANNALES *pour* 1901 *recevront gratuitement un exemplaire de ce Tableau avec le numéro de Février.*

CHRONIQUE.

Collège de France. — Programme des Cours du 1er semestre 1900-1901.

Mécanique analytique et Mécanique céleste. — M. Maurice LÉVY, membre de l'Institut, professeur. M. HADAMARD, suppléant, traitera des équations aux dérivées partielles en Mécanique.

Mathématiques. — M. JORDAN, membre de l'Institut, traitera de la construction des groupes résolubles.

Histoire générale des Sciences. — M. Pierre LAFFITTE, professeur. M. Camille MONIER, remplaçant, étudiera l'histoire de la Sociologie depuis Aristote jusqu'à Auguste Comte.

★

M. **Eug. Estanave**, attaché au Secrétariat de la Faculté des Sciences de Paris, a soutenu le 8 novembre 1900 une thèse fort intéressante intitulée : *Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince dont deux bords opposés au moins sont appuyés sur un cadre.* Ce Mémoire offre un caractère pratique particulier par les résultats qu'il contient. Peut-être les ingénieurs pourront-ils y trouver quelques renseignements utiles. (Paris, Gauthier-Villars.)

★

M. **Davidoglou** a soutenu devant la Faculté des Sciences de Paris, le 14 novembre, pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques, une thèse : *Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques.*

★

Philosophical Society (Washington). — Le Dr Artemas Martin a fait une Communication sur *Une méthode de calcul du logarithme d'un nombre sans employer d'autre logarithme que celui de* 10 *ou d'une puissance de* 10.

Le canton de Zurich a voté l'augmentation de sa subvention au « Concilium bibliographicum », en considération de la haute valeur de cette œuvre et dans l'espoir que d'autres aideront à assurer à l'entreprise une base financière solide. Un projet de loi est présenté pour quintupler le subside fédéral et placer le *Concilium* sous le contrôle immédiat du gouvernement suisse. Le résultat final de ces votes se traduira sans doute par l'expansion du champ d'activité du *Concilium*, de façon à comprendre la Botanique, l'Anthropologie, etc.; mais, pour le moment, tout sera fait en vue de rendre plus complètes les bibliographies existantes et de les publier plus rapidement.

★

Les prix Steiner viennent d'être distribués entre : M. le Dr *Geiser*, professeur à l'École polytechnique de Zurich, pour ses recherches en Géométrie et ses services par la publication des *Leçons* de Steiner; M. *D. Hilbert*, professeur à l'Université de Göttingue, pour ses importantes recherches sur la Géométrie et pour son Ouvrage sur la *Théorie des invariants;* et M. le Dr *Lindemann*, professeur à l'Université de Munich, pour son édition des *Vorlesungen über Geometrie* de Clebsch.

★

Agrégation; Concours de 1901 (Sciences mathématiques).

I. — *Programme général d'Analyse et de Mécanique.*

Le programme des certificats d'études supérieures variant d'une Université à l'autre, le jury indique, dans le programme ci-dessous, le minimum des connaissances générales qui sont supposées acquises par les candidats en Calcul différentiel, Calcul intégral et Mécanique.

Calcul différentiel et Calcul intégral : *Opérations fondamentales du Calcul différentiel et intégral.*— Dérivées et différentielles; intégrales simples, intégrales curvilignes, intégrales de différentielles totales; intégrales doubles et triples. — *Applications du Calcul différentiel.* — Étude des fonctions de variables réelles (formule et série de Taylor, maxima et minima, déterminants fonctionnels, fonctions implicites); calcul des dérivées et différentielles, changement de variables. — *Applications du Calcul intégral.* — Procédés d'intégration; longueur d'un arc de courbe, aires planes et gauches, volumes; différentiation et changement de variables sous le signe $\int\int \ldots$; étude de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ quand une limite ou la fonction devient infinie; formule de Green; Étude des fonctions représentées par des séries; Propriétés des séries entières. — *Éléments de Géométrie infinitésimale.* — Propriétés infinitésimales des courbes planes et gauches (courbes enveloppes, courbure, torsion); propriétés infinitésimales des surfaces : surfaces enveloppes, surfaces développables, surfaces réglées; théorème de Meusnier, sections principales. Lignes de courbure, lignes asymptotiques, en coordonnées curvilignes quelconques. — *Théorie des fonctions analytiques.* — Fonctions élémentaires d'une variable complexe; fonctions algébriques simples, fonctions circulaires et logarithmiques. Propriétés de l'intégrale $\int f(z)\,dz$; séries de Taylor et de Laurent; pôles, points singuliers essentiels, résidus. Réduction des intégrales hyperelliptiques. — *Équations différentielles du premier ordre.* — Intégrale générale, intégrales particulières, intégrales singulières. Types simples d'équations intégrables; facteur intégrant. — *Équations différentielles et systèmes d'équations d'ordre quelconque.* Intégrale générale, intégrales particulières, intégrales premières. Types simples d'équations intégrables. Équations linéaires. — *Intégration de l'équation aux dérivées partielles ou aux différentielles totales du premier ordre.*

MÉCANIQUE : *Statique.* — Composition des forces appliquées à un même point. Attraction d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur ou intérieur; propriétés élémentaires du potentiel. Réduction des forces appliquées à un corps solide. Conditions d'équilibre d'un corps solide; application aux machines simples. Polygone funiculaire: ponts suspendus; chaînette. Théorème du travail virtuel. — *Cinématique.* — Vitesse; accélération. Mouvement d'une figure plane dans son plan; représentation du mouvement par le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe; représentation d'un mouvement par le roulement d'un cône mobile sur un cône fixe. Mouvement d'un corps solide dans l'espace; mouvement hélicoïdal. Mouvements relatifs; théorème de Coriolis. — *Dynamique du point.* — Travail. Théorèmes généraux. Intégrales premières des équations du mouvement. Application au mouvement des planètes. Mouvement d'un point sur une courbe ou sur une surface; pendule dans le vide et dans un milieu résistant; pendule conique; lignes géodésiques. — *Géométrie des masses.* — Centres de gravité; moments d'inertie. — *Dynamique des systèmes.* — Théorèmes généraux; intégrales premières. Énergie; stabilité de l'équilibre. Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe; pressions supportées par l'axe; pendule composé. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Mouvement général d'un corps solide. Lois du frottement de glissement. Application du théorème des forces vives aux machines. Principe de d'Alembert. Équations de Lagrange; équations canoniques. Mouvements relatifs. Percussions. — *Hydrostatique.* — Équilibre d'une masse fluide; surface de niveau; pression contre une paroi plane; principe d'Archimède; équilibre des corps flottants. — *Hydrodynamique.* — Équations générales du mouvement d'une masse fluide. Théorème de Bernoulli; théorème de Torricelli. (*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Bulletin des Sciences mathématiques (Paris), 2e série, t. XXIV, année 1900 (avril à août). — Remarque sur la série de Fourier; par M. *Lerch.* — Sur une classe d'équations de Laplace; par M. *G. Tzitzeica.* — Sur les courbes tracées sur une surface développable dont les tangentes rencontrent une courbe donnée; par M. *Ch. Michel.* — Sur le théorème de Fermat; par M. *J. Perrot.* — Note au sujet de l'article : « Sur une relation géométrique entre deux courbes », publié par M. *Hatzidakis.*

Journal de l'École Polytechnique, 2e série, 5e cahier. — Azimut, latitude et longitude par des hauteurs égales d'astres; par M. *E. Caspari.* — Sur les groupes de classe $N - u$ et de degré N au moins $u - 1$ fois transitifs; par M. *Edmond Maillet.* — Sur l'équilibre d'élasticité du tore; par M. *L. Lecornu.* — Sur l'équilibre d'un flotteur avec un chargement liquide; par M. *P. Appell.* — Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette; par M. *E. Carvallo.*

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4e série, t. XVI, année 1900, IIe et IIIe fascicules. — Les invariants des formes binaires; par M. *Gordan.* — Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont des intégrales d'une même équation de Riccati; par M. *Léon Autonne.* — Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch; par M. *P. Duhem.* — Sur les équations indéterminées à deux et trois variables qui n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers; par M. *Edmond Maillet.*

Sur les fonctions abéliennes singulières (2e Mémoire); par M. *G. Humbert.*

Atti della Reale Accademia dei Lincei (Rendiconti), août. — Sulla teoria delle funzioni e degli insiemi (*Levi*).

Journal für die reine und angewandte Mathematik (Berlin), Band 122. Heft I à III; 1900. — *Thomé,* Ueber lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten. — *E. Muller,* Ein Satz über Flächen zweiter Ordnung und seine Beziehungen zur Kreisgeometrie der Ebene. — *Alf. Guldberg,* Zur Theorie der unbeschränkt integrablen totalen Differentialgleichungen. — *Heffter, Lothar.* Ueber reductible lineare Differentialgleichungen. — *E. Grünfeld,* Zur Theorie der einer linearen Differentialgleichung n — ter Ordnung adjungirten Differentialgleichungen. — *Alfred Læwy,* Ueber Scharen reeller quadratischer und *Hermitescher,* Formen. — *J. Horn,* Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle. — *P. Muth.* Ueber die Elementartheiler componirter Systeme. — *E. Grünfeld,* Bemerkung zu der Arbeit, S. 43-52 dieses Band.

P. Muth. Ueber alternirendi Formen. — *F.-Gomes Teixeira,* Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée. — *O. Hermes,* Die Formen der Vielflache. — *Georg Wallenberg,* Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung. — *W. Heymann,* Ueber Differential und Differenzengleichungen, welche durch die hypergeometrische Reihe von *Gauss* integrirt werden können. — *H.-E. Timerding,* Ueber die Reduction einer quadratischen Function.

Nanson. On certain determinant theorems. — *F. Dingeldey,* Ueber die Discriminante einer gewissen quadratischen Gleichung und die Bedingungen für den Kreis bei allgemeinen projectiven Coordinaten. — *Josef Sterbu,* Ueber eine *Jacobische Gleichung.* — *P. Appell,* Sur une forme générale des équations de la Dynamique et sur le principe de Gauss. — *H.-E. Timerding,* Ueber die Gruppirengen der Doppeltangenten einer eibenen Curve vierter Ordnung. — *E. Busche,* Ueber eine reale Darstellung der imaginären Gebilde einer reellen Ebene und einige Anwendungen davon auf die Zalhentheorie. — *Reedolf Sturm.* Ueber die Jacobische Erzengungsweise der Flächen zweiten Grades.

Monatshefte für Mathematik und Physik, 4. Vierteljahr 1900. — *Zindler.* Ueber simultane gewöhnliche Differentialgleichungen, welche continuierliche Transformationsgruppen gestatten. — *Weiss.* Bemerkung über eine Abzählung der Wendepunkte algebraischer Curven.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

Nos 2-3. *SUPPLÉMENT.* FÉVRIER-MARS 1901.

CHRONIQUE.

G. Bellavitis (**1803-1880**), dont nous donnons le portrait avec le présent numéro, est né à Bassano (Italie) et a passé presque toute sa vie à Padoue, où il est mort. C'était un esprit ouvert à toutes les Sciences, et il suffit de parcourir la liste de ses Œuvres pour se rendre compte de la variété extraordinaire des sujets qu'il a abordés. Partout il a apporté une marque d'originalité, et l'on sent, dans tous ses Travaux, non seulement qu'il cherche à découvrir des vérités nouvelles, mais qu'il a surtout à cœur de faire profiter les autres des vérités découvertes par lui.

Son principal titre, celui qui le placera, dans l'avenir plus encore que dans le présent, au nombre des géomètres dont le nom sera conservé, c'est l'invention de la méthode des équipollences, véritable doctrine nouvelle de Géométrie analytique, très philosophique et très féconde à la fois.

En développant cette doctrine dans un grand nombre de Mémoires, en l'appliquant à une foule de problèmes, il a véritablement créé une nouvelle méthode de Géométrie analytique, trop inconnue encore de nos jours, et dont les principes essentiels, d'une extrême simplicité, méritent de passer dans l'enseignement.

Il est juste d'ajouter que chez Bellavitis, le caractère de l'homme, les vertus privées et celles du patriote étaient à la hauteur des talents du Géomètre. Il fut sénateur du royaume d'Italie.

*

Un buste de Gauss va être placé dans une des salles de l'Université de Berlin.

*

M. **Paul Painlevé** vient d'être élu Membre de l'Académie des Sciences (Section de Géométrie). Ses beaux travaux de Mathématiques pures, spécialement ceux relatifs aux équations différentielles, rendaient sa nomination assurée. La Rédaction des *Nouvelles Annales* adresse à M. Painlevé ses bien vives félicitations.

*

L'assemblée générale annuelle du 8 novembre dernier de la **Société mathématique de Londres** a élu le Dr E.-W. Hobson président de la Société. Lord Kelvin a prononcé, comme président sortant, un discours sur la *Transmission de la force à travers un solide*.

*

L'**Association internationale des Académies** se réunira en assemblée générale le 15 avril prochain et étudiera les propositions présentées par les Académies adhérentes. On dit qu'il sera présenté une proposition relative à la question d'une langue internationale auxiliaire.

M. **Georges Humbert** a été élu Membre de l'Académie des Sciences de Paris, dans la séance du 18 mars dernier. Ses travaux mathématiques sont bien connus du monde savant et son Cours d'Analyse à l'École Polytechnique jouit, auprès de ses anciens élèves, d'une réputation méritée.

★

M. **H. Poincaré** a été nommé Membre étranger de l'Académie des Sciences de Munich.

★

On annonce la mort de **M. F. Kowalski,** professeur à Karkhof.

★

Les fonds destinés à la **médaille Sylvester,** de la Société royale de Londres, s'élèvent actuellement à près de 20 000 francs.

Cette médaille est décernée tous les trois ans pour encourager les recherches de Mathématiques pures, sans distinction de nationalité.

★

Le **prix Lobachevsky,** consistant en une médaille et 2000 roubles, a été décerné par l'Université de Kazan au professeur W. Killing, de Munster, pour ses excellents Travaux de Mathématiques.

★

Université de Paris (Faculté des Sciences)

(ANNÉE SCOLAIRE 1900-1901, SECOND SEMESTRE).

Analyse supérieure et Algèbre supérieure. — M. Picard, professeur, étudiera les fonctions algébriques et les transcendantes qui s'y rattachent.

Calcul différentiel et Calcul intégral. — M. Goursat, professeur, traitera des équations différentielles.

Mécanique rationnelle. — M. Appell, professeur, exposera les lois générales du mouvement des systèmes, la Mécanique analytique, l'Hydrostatique et l'Hydrodynamique.

Astronomie physique. — M. Wolf, professeur, développera l'ensemble des matières comprises dans le programme du certificat d'études supérieures d'Astronomie.

Physique mathématique et Calcul des probabilités. — M. Boussinesq, professeur, après avoir terminé l'exposé des questions du premier semestre, traitera des écoulements tumultueux et tourbillonnants auxquels donnent lieu les lits à grande section (régimes tant uniformes que graduellement variés des cours d'eau).

Mécanique physique et expérimentale. — M. G. Kœnigs, professeur. Étude des machines et en particulier des locomoteurs mécaniques.

Cours annexés.

Éléments d'Analyse et de Mécanique. — M. L. Raffy, professeur adjoint, chargé du cours. M. C. Bourlet, en son absence, traitera des équations différentielles et de leurs applications à la Mécanique et à la Physique.

Conférences.

Sciences mathématiques. — M. Servant, chargé de conférences, fera des conférences sur le Calcul différentiel et le Calcul intégral; M. Hadamard, professeur adjoint, fera des conférences sur le Calcul différentiel et le Calcul intégral; M. P. Puiseux, professeur adjoint, fera des conférences sur la Mécanique et l'Astronomie; M. Andoyer, maître de conférences, fera des conférences aux candidats à l'agrégation des Sciences mathématiques. M. Hadamard, professeur adjoint, fera une conférence aux candidats à l'agrégation des Sciences mathématiques. M. Blutel, chargé de conférences, fera une conférence aux candidats à l'agrégation des Sciences mathématiques.

*

Agrégation; Concours de 1901 (Sciences mathématiques).

(SUITE.)

II. — Programme des questions spéciales d'Analyse et de Mécanique d'où sera tiré le sujet d'une des compositions écrites.

Analyse : Fonctions uniformes doublement périodiques; périodes primitives; parallélogramme des périodes. Fonctions elliptiques; théorèmes généraux; pôles, résidus, zéros, ordre d'une fonction elliptique. Fonctions σ, p de Weierstrass; propriétés élémentaires; formules d'addition; invariants g_2 et g_3. Notations de Jacobi; fonctions H, H_1, Θ, Θ_1, sn, cn, dn; propriétés élémentaires; formules d'addition; module et multiplicateur. Passage de l'un des systèmes de notation à l'autre. — Diverses formes que peut prendre une fonction elliptique : 1° décomposition en éléments simples (formule de M. Hermite); 2° décomposition en facteurs; théorème de Liouville; 3° expression d'une fonction elliptique en fonction rationnelle de p et p'. Relation algébrique entre deux fonctions elliptiques aux mêmes périodes. Inversion de l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + \ldots + a_4}}$; réduction aux formes normales de Weierstrass et de Legendre. On admettra qu'à un système donné d'invariants g_2 et g_3, ou de module et de multiplicateur, correspond toujours un couple de périodes primitives permettant de construire les fonctions elliptiques correspondantes. Expression des périodes par des intégrales définies : 1° sur la forme normale de Weierstrass, dans le cas où g_2 et g_3 sont réels; 2° sur la forme normale de Legendre, dans le cas où k^2 est réel et compris entre 0 et 1. — Calcul de l'intégrale $\int \mathrm{R}\left(z, \sqrt{a_0 z^4 + \ldots}\right) dz$, où R est une fonction rationnelle de z et de la racine carrée d'un polynome du troisième ou du quatrième degré. Exemples : intégrales de deuxième et de troisième espèces. Étude des fonctions p, p', sn, cn, dn, dans le cas où l'une des périodes est réelle, et l'autre purement imaginaire. Valeurs de l'argument rendant les fonctions réelles. Applications immédiates de la théorie des fonctions elliptiques aux courbes algébriques planes à singularités simples, et aux problèmes élémentaires se rattachant au programme général d'Analyse et de Mécanique indiqué ci-dessus.

Nota. — Pour les compositions écrites, les candidats seront autorisés à se servir d'un tableau imprimé, résumant les principales formules relatives aux fonctions elliptiques, publié par la librairie Gauthier-Villars.

MÉCANIQUE : Dynamique du corps solide; percussion.

III. — Sujets de leçons.

Mathématiques élémentaires. — 1. Supposant connus les principes de la théorie des nombres premiers, établir la formule qui fait connaître combien il y a de nombres inférieurs à un nombre donné et premiers avec lui. Théorème de Fermat. Généralisation de ce théorème. Théorème de Wilson. Applications. — 2. Extraction de la racine carrée à moins d'une unité; à moins de $\frac{1}{n}$. (Indiquer quelques méthodes abrégées.) — 3. Nombres positifs et négatifs; opérations sur ces nombres. — 4. Division algébrique. — 5. Résoudre et discuter : 1° l'équation $P+\sqrt{Q}=0$, où P est un polynome du premier degré et Q un polynome du second degré; 2° l'équation $\sqrt{P}+\sqrt{Q}=a$, où P et Q sont des polynomes du premier degré et a une constante. Exemples tirés de la Géométrie. — 6. Calcul de π. — 7. Transformation par rayons vecteurs réciproques. Applications. — 8. Cercles orthogonaux dans le plan et sur la sphère. — 9. Intersection d'une droite et d'une hyperbole; nombre de points d'intersection situés sur chaque branche; tangentes et asymptotes. — 10. Démontrer que toute conique peut être considérée comme le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques. Réciproque. Rapport anharmonique de quatre points sur une conique. Applications (Ouvrages à consulter : CHASLES, *Traité des coniques;* ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*). — 11. Involution sur une droite. Faisceaux en involution. Involution sur une conique. Applications. — 12. Transformation par semi-droites réciproques. Application à la construction d'un cycle touchant trois cycles donnés. (On pourra consulter le *Traité de Géométrie* de E. Rouché, 7e édition, p. 314.) — 13. Figures homothétiques dans l'espace. Centre d'homothétie. Axe d'homothétie. Plan d'homothétie. Application à un système de quatre sphères. — 14. Propriétés générales des polyèdres convexes. Théorème d'Euler. Applications. — 15. Vitesse. Étude de la vitesse dans quelques mouvements. Représentations graphiques. — 16. Composition des vitesses. Applications géométriques et mécaniques. — 17. Théorie des couples. Réduction à une force et à un couple d'un système de forces appliquées à un corps solide. Conditions d'équilibre. — 18. Équilibre d'un corps pesant sur un plan incliné dépoli, en supposant le corps soumis à l'action d'une force passant par son centre de gravité. — 19. Systèmes articulés. Appareils de Peaucellier et de Hart. Parallélogramme de Watt. — 20. Principes de la théorie des engrenages cylindriques. Exemples simples. — 21. Énoncé du principe général des forces vives. Application aux machines. Volants. — 22. Définition et détermination de la latitude et de la longitude d'un lieu, soit sur terre, soit sur mer. — 23. Cartes géographiques. — 24. *Géométrie descriptive.* — Changements de plans, rotations et rabattements. (*A suivre.*)

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 4. *SUPPLÉMENT.* Avril 1901.

CHRONIQUE.

L'Association internationale des Académies a tenu sa première assemblée générale à Paris, au Palais de l'Institut, le 16 avril 1901. Dix-huit Académies étaient représentées. Après le discours d'ouverture par M. Darboux, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, président du Comité, le bureau a été constitué. M. Darboux a été nommé président, M. Diels vice-président, MM. Gomperz (Vienne) et Moissan (Paris) secrétaires.

Les questions examinées ont été les suivantes :

Projet relatif au prêt mutuel des manuscrits. — Les Académies associées tâcheront d'obtenir que, dans chacun de leurs pays, les bibliothèques et dépôts publics reçoivent directement tout imprimé, manuscrit ou document dont ces établissements feront la demande, à moins que des raisons sérieuses (valeur inestimable, dimensions, poids, état de conservation, contenu du manuscrit, défense réglementaire) ne s'opposent au prêt.

On propose provisoirement les conditions suivantes : 1° l'emprunteur, en chaque cas, s'obligera par écrit à conserver l'objet demandé de manière qu'il se trouve à l'abri du feu ou de tout autre risque; 2° il s'obligera de même à réparer tout dommage qui pourrait être causé à l'objet prêté et à indemniser de sa perte jusqu'à concurrence d'une somme qui ne sera pas nécessairement identique à celle pour laquelle l'objet aura été assuré; 3° il aura soin que la restitution de l'objet prêté se fasse avec toute la diligence voulue, avec un emballage conforme à celui que l'établissement prêteur aura jugé convenable pour l'envoi, et dans le terme fixé par celui-ci; et il assurera l'envoi, soit à la poste, soit à une Compagnie d'assurance, pour la somme qu'aura déterminée le propriétaire. Les frais d'envoi et d'assurance sont à la charge des emprunteurs.

Rapport sur la question de la mesure d'un arc géodésique le long du 30e méridien. — Quoique plusieurs mesures d'arcs de grandes dimensions, destinées à déterminer les dimensions et la forme du géoïde, aient été exécutées ou soient en cours d'exécution, la mesure d'un arc de latitude le long du 30e méridien projetée par Sir David Gill pourra avancer d'une manière extraordinaire notre connaissance de la figure du géoïde; d'abord par les dimensions de l'arc qui surpassent de beaucoup celles des arcs que l'on a mesurés jusqu'à présent, ensuite par sa situation. Au point de vue mathématique, la situation de l'arc de méridien en Afrique des deux côtés de l'équateur est particulièrement favorable. En combinant les mesures de cet arc avec celles que l'on a exécutées ailleurs, on est dans les meilleures conditions pour déterminer la figure générale du géoïde. A ce point de vue, les résultats que l'on pourra déduire des mesures de l'arc en Afrique offriront un contrôle précieux de ceux que l'on obtiendra par la mesure de l'arc du

Pérou, dont la longueur sera moindre. Sans entrer dans le détail, la section des Sciences émet le vœu que les latitudes astronomiques soient déterminées à chaque station géodésique, puisque c'est seulement de cette manière qu'il sera possible de faire des recherches sur la courbure spéciale dans les différentes parties du géoïde, recherches dont l'intérêt s'accentue de jour en jour. On peut d'autant plus recommander cette extension des travaux, qu'elle n'augmentera pas d'une manière notable les frais de l'entreprise. La section se permet aussi de rappeler l'attention sur la grande importance des observations de la pesanteur et du magnétisme terrestre et des recherches géologiques, considérées non seulement en elles-mêmes, mais aussi comme supplément aux travaux géodésiques en Afrique.

Étude des moyens propres à préparer et à publier une édition complète des Œuvres de Leibniz. Projet présenté par l'Académie des Sciences Morales et Politiques de l'Institut de France. — En vue d'une publication projetée des Œuvres de Leibniz dont l'exécution sera soumise à la prochaine séance de l'Association, la Commission propose de confier à l'Académie des Sciences Morales et Politiques, à l'Académie des Sciences de Berlin et à l'Académie des Sciences de Paris, le soin de déléguer chacune un directeur. Ces trois directeurs auront pour mission : 1° de faire appel à toutes les bibliothèques et dépôts publics ou privés en leur demandant de signaler toutes les pièces utiles à la publication; 2° de dresser un catalogue descriptif ou raisonné de toutes ces pièces; 3° de préparer le plan méthodique que l'on pourrait adopter dans l'édition projetée. Les directeurs pourront s'adjoindre des auxiliaires, et d'ailleurs les Académies constituantes seront invitées à déléguer des savants chargés de correspondre avec les directeurs et de leur prêter tout l'appui qui sera nécessaire.

La prochaine Assemblée générale se réunira à Londres, en 1904.

★

M. **Carvallo,** examinateur d'admission à l'École Polytechnique, est nommé examinateur de sortie pour la Mécanique.

★

M. **Paul Tannery** est nommé membre étranger de la Société royale des Sciences du Danemark.

★

Université de Munich. — *Cours de Mathématiques du second semestre de* 1901. — Théorie des courbes planes algébriques : *G. Bauer.* — Géométrie analytique de l'espace. Intégrales définies et séries de Fourier : *F. Lindemann.* — Mécanique céleste : méthodes de Jacobi et de Hamilton; exercices avec les instruments de l'observatoire : *H. Seeliger.* — Géométrie descriptive, avec exercices. L'imaginaire en Géométrie : *K. Döhlemann.* — Encyclopédie de Géométrie élémentaire. Théories géométriques modernes : *E. von Weber.* — Méthodes d'interpolation et d'intégration mécanique : *K. Schwarzschild.*

★

La **Société des Naturalistes et Médecins allemands** tient sa

73e session à Hambourg du 22 au 28 septembre 1901. En dehors de la Section de Médecine, cette réunion comprend une Section scientifique (Mathématiques, Astronomie, Géodésie, Physique, Mathématiques et Physique appliquées, Chimie, Géographie, Minéralogie, Botanique, Zoologie, Anthropologie). Par une heureuse innovation, il a été décidé qu'une question d'importance très générale serait soumise à la discussion des deux Sections réunies. Ce sujet pour 1902 est le suivant : *Le Développement moderne de l'atomistique et les ions.*

★

L'**Académie des Sciences de Naples** a décerné son prix de Mathématique au Dr G. Torrelli, de Palerme, pour son Ouvrage *Sur la Sommation des nombres premiers.* Le sujet du prochain prix est la *Théorie des invariants des biquadratiques ternaires,* considérée de préférence par rapport à la condition de réduction aux formes inférieures. Les Mémoires, qui peuvent être écrits en italien, français ou latin, doivent être envoyés avant le 31 mars 1902.

★

Le prochain prix annuel de l'**Académie des Sciences de Madrid** sera décerné à un Mémoire historique sur les mathématiciens espagnols du XVIe siècle.

★

M. **Henri Poincaré** a été élu membre honoraire étranger de l'*American Academy of Arts and Sciences.*

★

Agrégation; Concours de 1901 (Science mathématique).

(SUITE ET FIN.)

IV. — Programme des matières d'où seront tirés les sujets des leçons de Mathématiques spéciales.

Convergence et divergence des séries. Règles élémentaires permettant de reconnaître la convergence ou la divergence d'une série. Règles de Gauss et de Duhamel. Séries à termes alternativement positifs et négatifs. Séries à termes imaginaires. Convergence absolue. Principales propriétés des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable complexe. Convergence uniforme. La variable étant supposée réelle, étudier la dérivée, l'intégrale de la série. Applications. Séries de Taylor et de Mac-Laurin dans le cas d'une variable réelle; applications. — Produits infinis de facteurs réels ou complexes. Convergence et divergence. Définition de $\sin z$ par un produit infini de facteurs complexes; montrer que si z est réel, cette fonction coïncide avec la fonction considérée en Trigonométrie. — Fractions continues limitées et illimitées; fractions continues périodiques. — Propriétés générales des équations algébriques. Nombre des racines. Relations entre les coefficients et les racines. Calcul des fonctions symétriques des racines. Applications. Élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques entières (diverses méthodes). Équations à coefficients réels : nombre, séparation et calcul approché des racines réelles. —

Transformation d'une équation algébrique $f(x) = 0$ dans le cas où chaque racine y de l'équation cherchée doit être une fonction rationnelle φ d'une ou de deux racines de l'équation donnée. Exemples. — Soit $y = \varphi(x)$ l'équation qui définit la transformation. On suppose que les coefficients des fonctions f et φ appartiennent à un certain domaine de rationalité dans lequel $f(x)$ est irréductible et l'on désigne par $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ les racines de l'équation $f(x) = 0$. Si les quantités $\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_{n-1})$ sont distinctes, elles sont racines d'une équation irréductible de degré n. Toute fonction rationnelle d'une racine α_0 dans le domaine considéré s'exprime rationnellement au moyen de $\varphi(\alpha_0)$. Cas où plusieurs des quantités $\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_{n-1})$ sont égales. Si les racines d'une équation irréductible s'expriment rationnellement au moyen de l'une d'entre elles, elles s'expriment rationnellement au moyen de l'une quelconque de ces racines. — Étant donnée, dans un certain domaine de rationalité, une équation $f(y) = 0$, on peut former, dans le même domaine, une équation irréductible $F(x) = 0$ telle que toutes les racines de $f(x) = 0$ soient des fonctions rationnelles de l'une quelconque des racines de $F(y) = 0$. Exemples. — Définition des invariants et des covariants d'une ou de deux formes binaires. Application aux formes des trois premiers degrés. Interprétations géométriques. Application à la résolution de l'équation du troisième degré. Invariants de la forme biquadratique. Rapport anharmonique de quatre quantités. Équation du sixième degré qui donne les six valeurs du rapport anharmonique : 1° des racines de l'équation du quatrième degré; 2° des racines de l'équation du troisième degré et d'un nombre donné x. Signification des invariants de la forme biquadratique. Relation fondamentale entre les covariants de la forme cubique. — Courbes planes. Ordre, classe; points doubles, points de rebroussement; tangentes doubles, tangentes d'inflexion. Genre. Formules de Plücker pour une courbe ne possédant que les singularités simples de l'espèce ci-dessus. Exemples choisis dans les courbes du troisième et du quatrième ordre. — Transformation quadratique birationnelle du plan : applications. — Formes quadratiques à trois ou quatre variables. Formes adjointes. Équations ponctuelles et équations tangentielles des coniques et des quadriques. Réduction simultanée de deux formes quadratiques à trois variables x, y, z, à des sommes de trois ou d'un nombre moindre de carrés. Triangle conjugué commun à deux coniques. Invariants simultanés de deux formes quadratiques à trois variables. Triangle inscrit ou circonscrit à une première conique et conjugué à une seconde conique. Triangle inscrit dans une conique et circonscrit à une autre. Applications aux propriétés projectives et métriques. Propriétés analogues des cônes du second ordre. — Étude de la surface telle que les coordonnées homogènes d'un de ses points soient proportionnelles à quatre formes quadratiques données de trois paramètres : cas particuliers où la surface se réduit à une quadrique. Intersection de deux quadriques quand cette intersection se décompose. — *Géométrie descriptive*. — Surfaces de révolution. Surface gauche de révolution. Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 5. *SUPPLÉMENT.* MAI 1901.

CHRONIQUE.

Le prix de 260 dollars offert par l'**Académie royale des Sciences de Cracovie,** pour Recherches sur la théorie des groupes, vient d'être décerné au Dr *G.-A. Miller*, de la Cornell University.

*

La **Société mathématique d'Amérique** a élu pour président le professeur E.-H. More, de l'Université de Chicago.

*

Association britannique pour l'avancement des Sciences. — Le professeur P.-A. Mac Mahon, membre de la Société royale, présidera la Section des Sciences Mathématiques et Physiques à la session de l'Association britannique pour l'avancement des Sciences, qui s'ouvrira à Glascow le 11 septembre prochain.

*

Association américaine pour l'avancement des Sciences. — Le Conseil de l'Association s'est réuni le 20 décembre dernier, sous la présidence du professeur R.-S. Woodward. Le secrétaire perpétuel, Dr L.-O. Howard, a fait un Rapport sur la situation de l'Association ainsi que sur les préparatifs pour la session d'août prochain à Denver. Le professeur L.-G. Carpentier a visité les agents de l'Association et les principaux centres scientifiques des États de l'Est, en vue de cette session. Un comité a été nommé pour s'enquérir si les Universités et autres centres scientifiques pourraient disposer d'une semaine pendant l'hiver pour des réunions de Sociétés savantes. Deux cent quarante-sept nouveaux membres ont été admis, ce qui porte à plus de deux mille l'ensemble de l'Association.

*

Catalogue international de la Littérature scientifique. — Le comité nommé pour préparer le travail a fait son Rapport au Conseil international réuni les 12 et 13 décembre dernier, à Londres, sous la présidence de Sir Michael Foster. MM. Darboux, Deniker et H. Poincaré représentaient la France.

Le prix annuel de la collection des 17 Volumes est de 17 liv. sterl.; on a annoncé que 290 exemplaires étaient déjà souscrits (dont 35 par la France).

La Société Royale a avancé le capital nécessaire pour commencer. Le Conseil international pense que les dons des divers pays et la vente des Volumes permettront de rembourser l'avance en quelques années.

On a adopté une instruction à l'usage de tous les participants à la préparation du Catalogue. Les traductions seront admises dans le Catalogue, mais en indiquant que ce sont des traductions. Les titres de classification des sujets des diverses sciences ont été adoptés.

Un Comité exécutif a été nommé, comprenant quatre délégués de la Société Royale et les représentants des quatre plus grands pays souscripteurs : Allemagne, États-Unis, France et Italie. Le Dr H. Forster Morley a été nommé Directeur du Catalogue.

Le travail commence à partir du 1er janvier 1901 et comprendra tout ce qui sera publié après cette date.

★

L'**Académie Royale des Sciences de Turin,** se conformant aux dispositions testamentaires du Dr *César-Alexandre Bressa,* annonce que le 31 décembre 1900 s'est clos le concours pour les découvertes et les Ouvrages scientifiques produits dans les années 1897-1900, concours auquel devaient seuls prendre part les savants et les inventeurs italiens.

En même temps, l'Académie rappelle qu'à partir du 1er janvier 1899 est ouvert un concours, auquel, suivant la volonté du testateur, seront admis *les savants et les inventeurs de toutes les nations.*

Ce concours a pour but de récompenser le savant ou l'inventeur qui. durant la période de 1897-1900, « au jugement de l'Académie des Sciences de Turin, aura fait la découverte la plus éclatante et la plus utile, ou qui aura produit l'Ouvrage le plus célèbre en fait de Sciences physiques et expérimentales, Histoire naturelle, Mathématiques pures et appliquées, Chimie, Physiologie et Pathologie, sans exclure la Géologie, l'Histoire, la Géographie et la Statistique ».

Ce concours sera clos le 31 décembre 1902. Le montant de ce prix est de 9600 francs. S'adresser au Président de l'Académie des Sciences, à Turin.

★

La **Société des Sciences mathématiques d'Amsterdam** vient de publier le programme des questions de concours pour l'année 1901. Tous les étudiants en Mathématiques sont invités par l'administration de la Société à envoyer leurs solutions avant le 1er décembre 1901, franco de port, à M. Korteweg (Nondelstraat, 104 f.). Les questions envoyées doivent être rédigées clairement et écrites lisiblement; en outre, l'explication de chaque question doit former un écrit séparé, dont chaque feuille ne doit être écrite que d'un côté. Les solutions couronnées pourront être publiées dans la Revue *Nieuw Archief voor Wiskunde.* Tout membre qui, dans la même année ou dans le cours de plusieurs années, aura répondu d'une façon satisfaisante à dix des questions posées obtient par là le rang de *membre de mérite.*

★

Société américaine de Mathématiques. — Une réunion a eu lieu à Columbia University, New-York, le 23 février, sous la présidence du professeur Moore, président de la Société. Trente personnes environ ont assisté à la Séance. Ont été reçus membres de la Société :

MM. Downey, professeur à l'Université de Minnesota; Ferry, professeur à Williams College; Gerrans, maître ès arts de l'Université d'Oxford; Haviland jeune, de New-York; Love, professeur à l'Université d'Oxford; Thyagarajaiyar, de Bangalore (Indes). Deux demandes d'admission ont été présentées.

*

Association des Universités américaines. — La seconde Assemblée annuelle a eu lieu à Chicago du 26 au 28 février dernier. Les quatorze institutions associées y étaient représentées. Les journalistes et le public en général n'étaient pas admis aux séances. Trois questions surtout ont été discutées : le passage des gradués d'une Université à une autre; l'agrégation; l'examen du doctorat en philosophie. Sur le premier point, l'assemblée croit sage de favoriser le passage des gradués dans les diverses Universités, où ils trouveront des maîtres enseignant à divers points de vue. Quant à l'agrégation, la majorité pense que le recrutement est déjà trop grand, l'agrégation ne devrait être accordée qu'aux étudiants pourvus du doctorat en philosophie. Sur ce troisième point, l'assemblée blâme l'usage de faire subir l'examen cours par cours: les cours ne représentent qu'une faible part du travail supposé fait par le candidat. La plus grande importance devrait être donnée à l'examen oral final sur les sujets, sans égard aux cours. On vote à l'unanimité : la *Semaine de convocation* réservée pour permettre aux Sociétés savantes de se réunir entre elles; l'impression des procès-verbaux des deux assemblées annuelles, qui ont déjà eu lieu. Le lieu et la date de l'assemblée de 1902 seront fixés par le Comité exécutif.

*

Le sujet du **prix Adams** pour 1903, à l'Université de Cambridge (États-Unis), est :

« L'importance en Physique mathématique des récents progrès de la théorie de la représentation d'une quantité discontinue par une série; étude des limites logiques des méthodes employées. » Le prix est d'environ 1100 dollars et est destiné à ceux qui ont pris un grade à Cambridge.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXI, nos 16 à 27. — Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un fil et sur le calcul de sa tension; par M. *G. Floquet*. — Sur les systèmes orthogonaux admettant un groupe continu de transformations de Combescure; par M. *Egorov*. — Sur une méthode de Riemann et sur les équations aux dérivées partielles, linéaires; par M. *F. Laurent*. — Sur une classe de surfaces algébriques; par MM. *Castelnuovo* et *Enriques*. — Sur les surfaces qui

possèdent une série non linéaire de courbes rationnelles; par M. *S. Kantor*. — **Sur la série analogue à la série de Lagrange**; par M. *N. Bougaiev*. — Sur quelques applications de la Géométrie non euclidienne; par M. *Servant*. — Les séries absolument sommables, les séries (M) et le prolongement analytique; par M. *Emile Borel*. — Sur la définition de certaines intégrales de surface; par M. *H. Lebesgue*. — Sur les fonctions fondamentales et le problème de Dirichlet; par M. *W. Stekloff*. — Sur les systèmes orthogonaux admettant un groupe continu de transformations de Combescure; par M. *Maurice Fouché*. — Solution d'un problème d'équilibre élastique; par M. *Ivar Fredholm*. — Sur les surfaces isothermiques; par M. *A. Thibaut*. — Sur le minimum de certaines intégrales; par M. *H. Lebesgue*. — La Géométrographie dans l'espace; par M *E. Lemoine*. — Sur les fonctions bornées et intégrables; par M. *Léopold Tejer*. — Sur la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann; par M. *W. Stekloff*. — Sur le théorème de Hugoniot et quelques théorèmes analogues; par M. *P. Duhem*. — Sur les congruences dont les deux réseaux focaux sont cycliques; par M. *C. Guichard*. — Sur une série relative à la théorie d'une équation différentielle linéaire du second ordre; par M. *Liapounoff*. — Sur les fonctions θ à trois variables; par M. *M. Krause*. — Sur un nouveau cercle à calculs; par M. *Pierre Weiss*.

Bibliotheca mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Heft III und IV; 1900. — Haben Vitruv und die römischen Feldmesser aus Heron geschöpft (*Wilhelm Schmidt*). — Sind die Heronischen Vielecksformeln trigonometrisch? (*Wilhelm Schmidt*). — Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter (*Maximilian Curtze*). — Ueber die Lösung einiger Aufgaben im « Tractatus de numeris datis » des Jordanus Nemorarius (*G. Wertheim*). — Ueber Leibnizens Thätigkeit auf physikalischem und technischem Gebiete (*E. Gerland*). — Zur Geschichte des Taylor'schen Lehrsatzes (*Alfred Pringsheim*). — Ueber die von der « Royal Society » geplante mathematische Iahresbibliographie (*G. Eneström*). — Der Zweite internationale mathematiker-Kongress zu Paris von 6 *bis* 11 august 1900 (*E. Lampe*). — Mathematiker-Versammlungen in Iahre 1900. — Kleine Bemerkungen zur 2 Auflage von Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (*H. Suter, M. Curtze, P. Tannery, J. Timtchenko, G. Wertheim, G. Eneström*). — Vermischte historiche Notizen (*J. Kürschak, J. Timtchenko*). — Aufragen und Antworten-Recensionen-Neuerschiene Schriften-Wissenschaftliche Chronik-namenregister.

Journal für die reine und angewandte Mathematik (Berlin), Band 122, Heft IV; Band 123, Heft I, II. — *Hancok*. On the reduction of Kronecker's modular systems whose elements are functions of two und three variables. — *Schafheitlin*. Die nunstellen der Besselschen functionen. — *Hamburger*. Ueber die singulären Lösungen eines algebraischen Differentialgleichungs systems erster ordnung mit n abhängigen Variablen. — *Zimmermann*. Neue Ableitung der Plückerschen gleichungen nebst einigen directen Beslimmungen der Dappeltangenten ebener algebraischen Curven beliebiger Ordnung. — *Grünfeld*. Ueber einige in der Theorie der linearen Differentialgleichungen vorkommende bilineare Differentialausdrücke. — *Juhnke*. Eine dreifach perspectiven Dreiecken zugehörige Punktgruppe. Construction gewisser Punkte aus der Dreieckgeometrie. — *Fuchs*. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, welche mit ihrer Adjungirten zu derselben art gehören. — *Thomé*. Ueber lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten. — *Schlesinger*. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen im Anschlusse an das Riemannsche Problem. — *Fuchs*. Nachruf für Charles Hermite.

N° 6. *SUPPLÉMENT.* Juin 1901.

CHRONIQUE.

Les Communications suivantes ont été lues à la séance du 9 mai de la **Société mathématique de Londres** : *Un cas de division algébrique,* par le major P.-A. Mac-Mahon; *Une propriété des séries récurrentes,* par le Dr G.-B. Mathews; *Le produit de deux fonctions harmoniques de surfaces sphériques,* par M. Dale.

★

Un **buste de Gauss** a été placé dans une des salles de l'Université de Berlin.

★

Le **Comité international des Poids et Mesures** et la *Conférence générale* se réuniront à Paris au mois d'octobre prochain.

★

On annonce la mort, à 84 ans, du Dr **Peter Helmling**, ancien professeur de Mathématiques à l'Université de Dorpat.

★

M. **Carnegie** a donné 100 000 livres sterling pour établir des bibliothèques à Glascow.

★

L'**Association allemande pour le progrès de l'enseignement des Mathématiques et des Sciences naturelles** a tenu sa session générale du 27 au 30 mai. Le programme comprenait des Communications sur l'enseignement de la Physique et de la Géométrie et sur l'emploi de manuels dans les Sciences biologiques.

★

Société mathématique américaine. — Une circulaire récente indique les dispositions prises pour la session qui aura lieu à la Cornell University, à Ithaca, du 19 au 24 août. La réunion proprement dite, consacrée aux affaires de la Société et à la présentation des Mémoires, aura lieu les deux premiers jours, la fin de la semaine étant prise par des séances générales. Deux discours, du professeur Oscar Bolza et du professeur E.-W. Brown, seront la base de ces séances que la Société organise régulièrement dans ses réunions d'été. Le professeur Bolza a pris pour sujet : *Le calcul des variations, en particulier les découvertes de Weierstrass.* Le but principal est de donner un résumé de la solution du type le plus simple de problèmes, dans son développement historique, en insistant surtout sur les recherches de Weierstrass et de ses élèves. Le professeur Brown parlera des

Méthodes modernes pour traiter les problèmes dynamiques, le problème des trois corps en particulier. Son but est de mettre en évidence quelques-uns des derniers travaux pour introduire plus de rigueur dans les méthodes de solution des problèmes dynamiques, principalement les recherches de H. Poincaré. L'orateur montrera les principes des méthodes, les difficultés mathématiques qui s'élèvent et les résultats qui ont été obtenus. Signalons, parmi les sujets traités : *Formes variées des équations différentielles de la Dynamique; Existence d'intégrales; Solutions par séries infinies; Solutions périodiques; Stabilité et instabilité.* Aucun des discours ne suppose chez l'auteur une connaissance approfondie du sujet.

*

Le professeur **Asaph Hall** a cessé son cours de Mécanique céleste à Harvard University.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Bulletin des Sciences Mathématiques, 1900 (septembre à décembre). — COMPTES RENDUS ET ANALYSES : Papers on mechanical subjects. — *Pascal* (*E.*). Repertorio di Matematiche superiori (definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici). — *Serret* (*J.-A.*). Cours de Calcul différentiel et intégral. — MÉLANGES : *Picard* (*Emile*). De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface fermée. — Bulletin bibliographique. — Revue des publications mathématiques.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Mougin* (*E.*). Nouvelles Tables de Logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques. — *Dehn* (*M.*). Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme in Dreick. Inauguraldissertation. — *Walker* (*G.*). Aberration and some other problems connected with the electromagnetic field, one of the two Essays to which the Adams Prize was awarded in 1899, in the University of Cambridge. — — *Fricke* (*R.*). Kurzefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-Functionen-theoretischer Teil. — *Schlömilch* (*O.*). Uebungsbuch zum Studium des höheren Analysis. Zweiter Teil : Aufgaben aus der Integralrechnung. — *Andoyer*. Leçons sur la Théorie des formes et la Géométrie analytique supérieure à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences. — MÉLANGES : *Cotton* (*Émile*). Sur une équation linéaire aux dérivées partielles. — Bulletin bibliographique. — Revue des publications mathématiques.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES. — *Schilling* (*F.*). Ueber die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet. — *Studnicka* (*F.*). Prager Tychoniana zur bevorstehenden Säcularfeier der Errinnerung an das vor 300 Jahren erfolgte Ableben des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho Brahe. — *Boehm* (*K.*). Zur Integration partieller Differenzialsysteme. — *Schœnflies* (*A.*). Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Bericht, erstattet der deutschen Mathematiker Vereinigung. — MÉLANGES : *Leroy* (*Edouard*). Valeurs asymptotiques de certaines séries procédant suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle. — Bulletin bibliographique. — Revue des publications mathématiques.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES. — *Carl-Friedrich Gauss' Werke.* Achter Band herausgegeben von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. — *Walras* (*L.*). Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale. — *Picard* (*E.*). Sur le développement depuis un siècle de quelques théories fondamentales dans l'Analyse mathématique. — *Forsyth* (*A.-R.*). Theory of fonctions of a complex variable. — MÉLANGES : *Clairin*(*J.*). Sur une transformation de Bäcklund. — *Ocagne* (*M. d'*). Sur quelques principes élémentaires de Nomographie. — Bulletin bibliographique. — Revue des publications mathématiques.

Bulletin of the American mathematical Society (octobre, novembre, décembre 1900). — The seventh summer meeting of the American mathematical Society; by *Cole* (*F.-N.*). — The undergraduate mathematical curriculum. Report of the discussion at the seventh summer meeting of the American mathematical Society; by *Maltbie* (*H.*). — On a Memoir by Riccardo de Paolis; by *Scott.* — The international Congress of Mathematicians in Paris; by *Scott.* — The forty-ninth annual meeting of the american Association for the advancement of Science; by *Miller* (*G.-A.*). — Note on geometry of four dimensions; by *Lovett* (*E.-O.*). — The october meeting of the American mathematical Society; by *Cole* (*F.-N.*). — On linear dependence of functions of one variable; by *Bocher* (*Maxime*). — Report on the groups of an infinite order; by *Miller* (*G.-A.*). — The strength of materials; by *Chree* (*Charles*). — Scheffers' differential geometry; by *Page* (*J.-M.*).

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 1900 (numéros d'octobre, novembre, décembre). — Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques (*suite*); par M. *Davidoglou.* — Sur les systèmes articulés gauches; par M. *Étienne Delassus.* — Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoïdale soumise à une pression intérieure uniforme; par M. *L. Lecornu.* — Sur une classe de surfaces isothermiques; par M. *A. Thybaut.*

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, fascicule IV; 1900. — Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor; par M. *Edouard Le Roy.* — Sur les courbes des déformations des fils (2e Partie), par M. *Bouasse.*

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5e série, t. VI, 1900 (fascicule IV). — Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles; par M. *J. Leroux.* — Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles; par M. *Ernst Lindelöf.*

American Journal of Mathematics, Volume XXII (1900), number 4. — Asymptotic evaluation of certain totient sums; by *Derrick Norman Lehmer.* — Concerning Klein's group $(n+1)!$ n — any collineations; by *Eliakin Hastings Moore.* — The Cross ratio group of 120 quadratic Cremona transformations of the plane; by *Herbert Ellworth Slaught.*

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, septembre-octobre 1900. — Théorie des systèmes articulés simples; par M. *Burgatti.* — Sur les fonctions analytiques sur la surface de Riemann; par M. *Vitali.* — Sur les limites par $n = \infty$ du dérivé $n^{\text{ième}}$ des fonctions analytiques; par M. *Vitali.* — Sur la représentation analytique des fonctions d'une variable réelle (extrait d'une lettre de M. Emile Picard), par M. *Mittag-Lefler.* — Sur la formule pour la composition des mouvements finis; par M. *Puglisi.* — Sur la représentation analytique des fonctions réelles, données sur un ensemble quelconque de points (extrait d'une lettre à M. G.-B. Guccia); par M. *Phragmén.* — Francesco Brioschi; par M. *Beltrami.* — Eugenio Beltrami; par M. *Cremona.*

Transactions of the American mathematical Society, Vol. I, nos 3 et 4, juin-octobre 1900. — Wave propagation over monuniforme conductors; by M. *I. Pupin.* — Ueber Systeme von Differentialgleichungen denen vierfach periodische Functionen Genüge leisten; by M. *Krause.* — On linear criteria for the determination of the radius of convergence of a power series; by *E.-B. van Vleck.* — On the existence of the Green's function for the most general simply connected plane region; by *W.-F. Osgood.* — D lines on quadrics; by *A. Pell.* — Sundry metric theorems concerning n lines in a plane; by *F.-H. Loud.* — An application of group theory to hydrodynamics; by *E.-J. Wilczynski.* — Determination of an abstract simple group of order $2^7.3^6.5.7$ holoedrically isomorphic with a certain orthogonal group and with a certain hyperabelian group; by *L.-E. Dickson.* — On surfaces enveloped by spheres belonging to a linear spherical complex; by *P.-F. Smith.* — On certain relations among the theta constants; by *J.-I. Hutchinson.* — On the groups which have the same groups of isomorphisms; by *G.-A. Miller.* — Die Hessische und die Cayley'sche Curve; by *P. Gordan.* — Application of a method of d'Alembert to the proof of Sturm's theorems of comparison; by M. *Bôcher.* — Two plane movements generating quartic scrolls; by *E.-M. Blake.* — The invariant theory of the inversion group; geometry upon a quadric surface; by *E. Kasner.* — A simple proof of the fundamental Cauchy-Goursat theorem; by *E.-H. Moore.*

Atti della Reale Accademia dei Lincei, octobre à décembre 1900. — *Segre.* Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice. — *Severi* (F). Le coincidenze di una serie algebrica $\infty^{(k+1)(2-k)}$ di coppie di spazi a k dimensioni, immersi nello spazio ad z dimensioni. — *Bianchi.* Sulla integrazione della equazione $\Delta_2 u = 0$ nello spazio indefinito non euclideo. — *Burgutti* (P.). Sopra alcune superficie a linee di curvatura isoterme.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXII, n^{os} 1 à 7. — Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables; par M. *Émile Picard.* — Sur les surfaces convexes fermées; par M. *H. Minkowski.* — Sur le théorème des forces vives; par M. *H. Duport.* — Sur les équations linéaires à points d'indétermination; par M. *Ludwig Schlesinger.* — Sur la théorie des équations de la Physique Mathématique; par M. *S. Zaremba.* — Sur les fonctions quadruplement périodiques; par M. *Georges Humbert.* — Sur les systèmes orthogonaux admettant un groupe de transformations de Combescure; par M. *D.-Th. Egorov.* — Sur une généralisation d'un théorème de M. Picard; par M. *S. Kantor.* — Sur un théorème du calcul des probabilités; par M. *A. Liapounoff.* — Remarque au sujet d'une Note de M. S. Kantor; par M. *Enriques.* — Sur les réseaux qui, par la méthode de Laplace, se transforment des deux côtés en réseaux orthogonaux; par M. *C. Guichard.* — Sur la densité des zéros et le module maximum d'une fonction entière; par M. *Pierre Boutroux.* — Une classe nouvelle de surfaces algébriques qui admettent une déformation continue en restant algébriques; par M. *D.-Th. Egorov.* — Sur certaines transformations de Backlund; par M. *Clairin.* — Sur le théorème d'Hugoniot et la théorie des surfaces caractéristiques; par M. *J. Coulon.* — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. *R. d'Adhémar.* — Sur les formes linéaires aux dérivées partielles d'une intégrale d'un système d'équations différentielles simultanées qui seront aussi des intégrales de ce système; par M. *Buhl.* — Sur les voûtes en arc de cercle encastrées aux naissances; par M. *Ribière.* — Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique; par M. *H. Poincaré.* — Sur la déformation du paraboloïde quelconque; par M. *C. Guichard.* — Sur le problème des isopérimètres; par M. *A. Hurwitz.* — Sur des fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires; par M. *R. Alezais.*

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 7. *SUPPLÉMENT.* JUILLET 1901.

CHRONIQUE.

M. **Andrew Carnegie** a remis 10 000 000 de dollars aux commissaires pour l'enseignement supérieur en Écosse. Ces commissaires sont : Lord Rosebery, Lord Kelvin, M. John Morley et d'autres Écossais éminents. L'acte de donation établit expressément que ce don est destiné à étendre les recherches scientifiques dans les Universités d'Écosse, et à faciliter l'assistance aux cours en payant les droits d'inscription des étudiants; le revenu sera partagé également entre ces deux objets. Ces ressources sont applicables aux travaux sur les Sciences, la Médecine, les Langues modernes, la Littérature et l'Histoire anglaise.

*

La réunion de la **Société des Naturalistes et Médecins allemands**, que nous avons annoncée dans le *Supplément* d'avril, s'annonce comme devant réunir un grand nombre d'adhérents. La Section de Mathématiques, Astronomie et Géodésie est constituée en fait par la **Deutschen Mathematiker Vereinigung**; son bureau est composé de MM. le professeur Dr Sohnbert, président, Dr Schorr, Dr Messerschmitt, Dr Sund, Dr Scheller, Dr Schröder.

Les communications annoncées sont les suivantes : *Eberhard,* Théorie des équations; *Ebert,* Une question de Mécanique céleste; *Engel,* Les quotients différentiels; *Folie,* Les formules de la nutation d'après Oppolzer; *Hilbert,* Quelques nouveaux sujets mathématiques; *Kowalewsky,* Rapport sur les théories de Sophus Lie; *Lilienthal,* La Géométrie du mouvement et son application à la Géométrie différentielle; *Marcuse,* Développements nouveaux des travaux géodésiques; *Meyer, Klein, Wiechert,* État de la publication de l'Encyclopédie des sciences mathématiques; *Schilling,* Nouveaux modèles cinématiques pour la théorie des engrenages, leur emploi pour la théorie des transformations de mouvements; *Schoute,* La mobilité d'un système de zéros N_{n-1} dans R_n; *Schubert,* Nombre des constantes dans la généralisation des polyèdres à n dimensions; *Stäckel,* Rapport sur le développement de l'enseignement des Mathématiques appliquées dans les Universités de Prusse; *Study,* Une nouvelle branche de la Géométrie.

Les fêtes n'ont pas été oubliées dans le programme et les adhérents pourront assister à une série de réceptions et de divertissements dans cette belle ville de Hambourg : bataille de fleurs sur l'Alster, soirée offerte par le Sénat, visite de transatlantiques, banquet au Jardin zoologique, concert et bal à l'établissement Sagebiel, promenades en bateau dans le port et sur l'Elbe, excursion à Héligoland, et enfin fête de clôture au Concerthaus.

M. **Mannheim,** professeur à l'École Polytechnique, vient de prendre sa retraite après trente-sept ans d'enseignement et a été nommé professeur honoraire. Son successeur est M. Haag.

*

Les examens d'entrée pour l'**École Polytechnique** sont commencés depuis le 24 juin et se poursuivront probablement jusque vers le 10 août : cette année les admissibles des années précédentes conservent leur droit à passer les examens du second degré.

*

M. **Maurice Godefroy,** bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille, a soutenu une thèse *Sur la fonction gamma; théorie, histoire, bibliographie,* pour obtenir le titre de Docteur de l'Université de Paris.

*

M. **Harris Hancock,** professeur de Mathématiques à l'Université de Cincinnati (U. S. A.), a soutenu une thèse *Sur les systèmes modulaires de Kronecker* pour obtenir le titre de Docteur de l'Université de Paris.

*

Association américaine. — *Section de Mathématique et d'Astronomie.* — Le professeur James Mc Mahon, président, et le professeur George-A. Miller, secrétaire, ont reçu, entre autres, les Communications suivantes : *Rapport supplémentaire sur la Géométrie non euclidienne,* par le professeur George-Bruce Halsted; *Sur l'application des lois fondamentales de l'Algèbre aux séries infinies,* par le professeur Florian Cajori; *Séries convergentes conditionnelles dont le produit est absolument convergent,* par le même; *Rapport sur les groupes continus,* par le professeur H.-B. Newson; *Sur les systèmes de courbes isothermes,* par le professeur L.-E. Dickson; *Sur la fonction modulaire associée à l'irrationalité*

$$S^3 = z(z-1)(z-x)(z-y),$$

par le Dr J.-L. Hutchinson; *Philosophie des Mathématiques,* par le professeur W.-J. Kerr; 1° *Le concept de l'espace à n dimensions;* 2° *Géométries réciproques à elles-mêmes,* par C.-J. Keyser; *Histoire de divers théorèmes fondamentaux de la théorie des groupes d'ordre fini,* par le Dr G.-A. Miller.

*

On annonce la mort, à 77 ans, de M. **William Walton,** ancien professeur de Mathématiques à l'Université de Cambridge et auteur de divers Manuels.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXII, nᵒˢ 8 à 25. — Sur une certaine catégorie de fonctions transcendantes; par M. *Edmond Maillet*. — Sur une certaine surface de troisième ordre; par M. *D.-Th. Egorov*. — Sur les ondes du second ordre par rapport aux vitesses, que peut présenter un fluide visqueux; par M. *P. Duhem*. — Sur une certaine catégorie de fonctions transcendantes; par M. *Edmond Maillet*. — Sur les groupes quaternaires réguliers d'ordre fini; par M. *Léon Autonne*. — De la propagation des discontinuités dans un fluide visqueux; par M. *P. Duhem*. — Sur les zéros des fonctions entières de n variables; par M. *P. Cousin*. — Sur les vibrations des poutres encastrées; par M. *Ribière*. — Sur le diagramme entropique; par M. *Marchis*. — Sur la propagation des discontinuités dans les fluides; par M. *E. Jouguet*. — Une proposition générale du calcul de probabilités; par M. *A. Liapounoff*. — Sur la déformation du paraboloïde général; par M. *Servant*. — Sur la somme des angles d'un polygone à connexion multiple; par M. *M. d'Ocagne*. — Sur une formule de M. Fredholm; par M. *Mittag-Leffler*. — Sur l'expression générale de la fraction rationnelle appprochée de $(1+x)^m$. — Sur la décomposition des fonctions méromorphes en éléments simples; par M. *Emile Borel*. — Sur les racines des équations transcendantes; par M. *Edmond Maillet*. — Sur la fraction continue de Stieltjes; par M. *H. Padé*. — Sur les groupes d'opérations; par M. *G.-A. Miller*. — Sur les résidus et les périodes des intégrales doubles de fonctions rationnelles; par M. *Emile Picard*. — Sur une question relative au déplacement d'une figure de grandeur invariable; par M. *R. Bricard*. — Sur les fonctions entières de plusieurs variables et les modes de croissance; par M. *Emile Borel*. — Sur une généralisation de l'intégrale définie; par M. *H. Lebesgue*. — Sur les intégrales analytiques des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage de conditions initiales singulières; par M. *Henri Dulac*. — Sur les équations de certains groupes; par M. *de Séguier*. — Sur une classe particulière de surfaces réglées; par M. *A. Demolin*. — Sur la déformation continue des surfaces; par M. *G. Tzitzéica*. — Sur les séries de Taylor et les étoiles correspondantes; par M. *L. Desaint*. — Sur les intégrales réelles des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage d'un point singulier; par M. *Henri Dulac*. — Sur certaines relations involutives; par M. *Maurice Lelieuvre*. — Sur un problème de d'Alembert; par M. *F. Siacci*. — Sur les groupes réguliers d'ordre fini; par M. *Leon Autonne*. — Sur la série de Bernoulli; par M. *Mittag-Leffler*. — Sur les intégrales eulériennes incomplètes de deuxième espèce et les intégrales indéfinies des fonctions précédentes; par M. *E. Vallier*. — Sur le domaine de la convergence de l'intégrale infinie

$$\int_0^\infty F(ax)e^{-a};$$

par M. *E. Phragmén*. — Équations et propriétés fondamentales des figures autopolaires réciproques dans le plan et dans l'espace; par M. *Rabut*. — Sur les séries de Fourier; par M. *A. Hurwitz*. — Sur l'application de la théorie de l'élasticité au calcul des pièces rectangulaires fléchies; par M. *Mesnager*. — Sur la déformation continue des surfaces; par M. *Egorov*. — Théorie des groupes linéaires dans un domaine arbitraire de rationalité; par M. *Dickson*. Sur l'intégration de l'équation $\Delta w - \mu^2 w = 0$; par M. *Zaremba*.

Annales de l'Université de Lyon (fascicule V). — Étude sur les occultations d'amas d'étoiles par la Lune avec un catalogue normal des Pléiades; par M. *Joanny Lagrula*.

Journal de l'École Polytechnique (6e cahier). — Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette (fin); par M. *E. Carvallo*. — A propos de deux problèmes de probabilités, et *errata* d'un Mémoire du LXIVe cahier, 1894; par *J. Andrade*. — Détermination des invariants différentiels fondamentaux attachés au groupe G.16 de M. Klein; par M. *A. Boulanger*. — Sur les graphiques et les formules d'annonces de crues; par M. *Edmond Maillet*. — Sur divers cas de la flexion des cylindres à base circulaire; par M. *C. Ribière*.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5e série, tome VII (fascicules I et II); 1901. — Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique; par M. *Paul Appell*. — Sur de nouvelles analogies entre la théorie des groupes de substitutions et celle des groupes finis continus de transformations de Lie; par M. *Edmond Maillet*. — Sur un théorème de M. Duhem; par M. *Paul Saurel*. — Notice sur M. *Ch. Hermite;* par M. *C. Jordan*. — Sur les fonctions abéliennes (troisième Mémoire); par M. *G. Humbert*. — Mouvement d'un liquide parfait soumis à la pesanteur. Détermination des lignes de courant; par M. *C. Sautreaux*. — Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques; par M. *H. Poincaré*.

Bulletin de la Société Mathématique de France, 1900 (fascicule IV); 1901 (fascicule I). — Mémoires et Communications : Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme; par M. *Painlevé*. — Propriété caractéristique du cylindroïde; par M. *P. Appell*. — Sur plusieurs groupes simples; par M. *Miller*. — Comptes rendus des Séances : Généralisation des formules de Schwarz relatives aux surfaces minima; par M. *de Montcheuil*. — Table des matières du Tome XXVIII. — État de la Société Mathématique au commencement de 1901. — Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation. — Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société échange son Bulletin. — Comptes rendus des Séances (novembre et décembre 1900). — Sur un remarquable déplacement à deux paramètres; par M. *E. Duporcq*. — Sur une question posée par d'Alembert; par M. *Touche*. — Invariants des équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires et homogènes; par M. *Rivereau*. — Déformation spéciale d'un milieu continu, tourbillons de divers ordres; par M. *P. Appell*. — Sur une propriété du cylindroïde; par M. *R. Bricard*. — Sur les formules d'Olinde Rodrigues; par M. *E. Borel*. — Sur les points de base d'un faisceau linéaire de courbes algébriques; par M. *M. Weill*. — Sur une extension à l'espace du théorème de Simson; par M. *E. Duporcq*. — Sur une application des fonctions elliptiques à l'étude du mouvement des projectiles; par M. *de Sparre*. — Sur le cylindroïde et sur la théorie des faisceaux de complexes linéaires; par M. *A. Demoulin*. — Sur la propagation des ondes; par M. *J. Hada*.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (fascicule I); 1901. — Contribution à la théorie de l'équation aux dérivées partielles $\Delta v + \xi v = 0$; par M. *S. Zaremba*. — Recherches sur l'uranium et ses composés; par M. *Jules Aloy*. — Sur une formule de Lagrange et le théorème de Lambert; par M. *Henry Bourget*. — Sur les surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce; par M. *Federigo Enriques*. — Sur les courbes de déformation des fils (2e Partie); par M. *H. Bouasse*.

Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure; 1901, janvier-février-Mars. — L'Œuvre scientifique de *Charles Hermite* (avec un portrait); par M. *Emile Picard*. — Sur les surfaces symétriques par rapport au cône de révolution; par M. *S. Mangeot*. — Recherches sur les séries de fonctions cylindriques dues à MM. *C. Neumann* et *W. Kapteyn;* par M. *Niels Nielsen*. — Sur les applications géométriques du théorème d'Abel; par M. *Michel*. — Sur l'intégration de l'équation $\Delta u = fu$; par M. *J.-W. Lindeberg*. — Théorie mathématique du jeu; par M. *L. Bachelier*.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 8. SUPPLÉMENT. Aout 1901.

CHRONIQUE.

Le **don de M. Carnegie aux Universités d'Écosse**. — A la première nouvelle du don de M. Carnegie, et lorsque rien n'en était connu, sinon la magnificence et le fait qu'il était destiné à défrayer l'éducation universitaire des étudiants écossais, nous sentîmes la nécessité de faire remarquer, tout en exprimant cordialement notre admiration pour la générosité du donateur, que l'extrême importance même du capital en rendrait difficile la sage administration, et d'appeler l'attention sur les circonstances qui pouvaient intervenir dans la réalisation pratique du bénéfice attendu. Les conditions de la fondation, telles qu'elles sont connues aujourd'hui, semblent justifier, presque en chaque détail, les considérations que nous avions émises. L'application de la moitié du revenu à l'amélioration du matériel d'instruction et à l'établissement, dans chaque branche des sciences du domaine universitaire, de laboratoires qui ne peuvent manquer d'atteindre une renommée universelle, élèvera d'un coup les Universités d'Écosse au plus haut niveau d'importance académique et mettra probablement le pays à l'extrême avant-garde de l'enseignement et des recherches scientifiques pratiques. La Médecine est spécialement mentionnée dans l'acte de donation, et, pour ne prendre qu'un exemple, il sera au pouvoir des administrateurs de mettre telle Université écossaise en mesure d'équiper une expédition d'enquête sur la vie et les mœurs des moustiques propagateurs de fièvre, ou d'autres insectes, et d'accomplir ainsi, peut-être en quelques mois, plus que ne pourrait accomplir, même en plusieurs années, une entreprise privée, soutenue seulement par de maigres dons péniblement réunis. Les problèmes de Chimie organique se relient de plus en plus chaque jour aux questions de santé et de maladie, comme ceux de Chimie inorganique à un grand nombre de procédés de manufactures ou d'industries. Sur ces matières, et sur d'autres en grand nombre qui y touchent, le grand obstacle au travail scientifique en Grande-Bretagne était tout simplement le défaut de moyens pécuniaires, et, ce défaut une fois disparu, un pas immense sera fait en vue de nous aider à maintenir nos positions dans la grande lutte industrielle que l'avenir ne peut guère manquer de nous réserver, et dans laquelle le savoir scientifique sera certainement un des plus importants éléments de succès. Nous ne pouvons même nous empêcher de penser que cette partie de la fondation sera probablement, par le temps qui court, infiniment la plus importante des deux, et que dans l'avenir, étant donnés les termes élastiques et la largeur des pouvoirs de l'acte de donation, elle finira même par absorber ou infirmer le payement général des droits qui, après tout, ne sont pas si considérables qu'ils mettent un obstacle sérieux sur le chemin d'un jeune homme qui n'est pas absolument sans ressources et qui est déterminé à aller jusqu'au bout de la carrière dans laquelle il a l'intention de s'engager. (*Times.*)

★

Johns Hopkins University. — Pendant l'année scolaire 1901-1902, les cours de perfectionnement ci-après seront donnés : Professeur F. Morley, *Géométrie, les Équations différentielles en Physique, Cinématique;* Dr A. Cohen, *Équations différentielles supérieures, Théorie des nombres algébriques, Théorie élémentaire des fonctions, Équations différentielles élémentaires;* Dr F. Franklin, *Sur les Probabilités.*

★

Les Professeurs **David Hilbert,** de Göttingen, **Georges Cantor,** de Halle, et **Ulysse Dini,** de Pise, ont été élus Membres étrangers de la Société mathématique de Londres.

★

M. le Professeur **Ames** (de la Johns Hopkins University) devient co-Directeur de l'*American Journal of Science,* en remplacement du Professeur Rowland, décédé.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Th. de Donder, *Étude sur les invariants intégraux* (Extrait du *Bulletin du Circolo matematico de Palerme*). Grand in-8 de 66 pages; 1901. Prix : 3 fr. (Paris, Gauthier-Villars.)

Mémoire didactique fort intéressant et souvent réclamé par ceux qui désirent étudier cette importante question.

Hermite (1822-1901). Notice sur ses travaux scientifiques, par M. *C. Jordan.* — Esquisse biographique et bibliographique, par M. *P. Mansion.* Grand in-8 de 47 pages; 1901. Prix : 1 fr. (Paris, Gauthier-Villars.)

La Notice scientifique de M. Jordan a paru dans le *Journal de Mathématiques*, mais les indications bibliographiques données par M. Mansion seront consultées avec intérêt par nos lecteurs.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Bulletin des Sciences Mathématiques (janvier-février-mars). — COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Kneser* (*Adolf*). Lehrbuch der Variationsrechnung. — *Rouché* et *Lévy*. Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs. — *Lüroth.* Vorlesungen über numerisches Rechnen. — *Heger* (*R.*). Fünfstellige Logarithmische und goniometrische Tafeln, sowie Hülfstafeln zur Auflösung höherer numerischer Gleichungen für den Gebrauch an höherer Schulen. — *Lorenz* (*H.*). Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffs Maschinen. — MÉLANGES : *Picard* (*Emile*). Sur les principes de la

Mécanique et l'explication mécanique des phénomènes naturels. — *Hadamard*. Sur les réseaux de coniques. — *Otto de Alencar Silva*. Sur l'équation de Riccati. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et Analyses : *Weber* (*H.*). Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen in vierten Auflage neu bearbeitet von Henrich Weber. — *Stolz* (*O.*), *Gmeiner* (*J.*). Theoretische Arithmetik. — Mélanges : *Hadamard*. Sur les éléments linéaires à plusieurs dimensions. — *Lelieuvre*. Sur la multiplication de l'argument des fonctions elliptiques. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et Analyses : *Hill* (*J.-M.*). The Contents of the fifth and sixth books of Euclid. — Mélanges : *Lindelöff*. Théorème sur la convergence uniforme des séries. — Revue des publications mathématiques.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (nos 1-2, 1901, janvier-février-mars-avril-mai-juin, juillet-août). — *Calapso* (*P.*). Sur les déformations du paraboloïde de rotation. — *Severi* (*F.*). Sur les points doubles impropres d'une surface générale de l'espace à quatre dimensions, et sur ses points triples apparents. — *Paci* (*P.*). Sur la fonction potentielle d'une couche superficielle sphérique. — *Bonola* (*R.*). Détermination par la voie géométrique des trois types d'espaces : hyperbolique, elliptique et parabolique. — *Donder* (*Th. de*). Etude sur les invariants intégraux. — *Picard*. L'œuvre scientifique de Charles Hermite. — *Bagnera*. I gruppi finiti reali di sostituzioni lineari quaternarie.

Transactions of the American mathematical Society (Volume II, no 1, janvier 1901). — Invariants of systems of linear differential equations; by *Wilczynski* (*E.-J.*). — Divergent and conditionally convergent series whose product is absolutely convergent; by *Florian Cajori*. — Sets of coincidence points on the non-singular cubics of a syzygetic sheaf; by *Porter*. — Note on non-quaternion number systems; by *Wendell M. Strong*. — On the reduction of the general abelian integral; by *Fields* (*J.-C.*). — Ueber Flächen von constanter Gausscher Krümmung; by *David Hilbert*. — Note on the functions of the form $f(x) = \Phi(x) + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots - a_n$ which in a given interval differ the least possible from zero; by *Blichfeldt* (*H.-F.*).

American Journal of Mathematics (Volume XXIII, numbers 1 and 2). — Die Typen der linearen complexe rationaler Curven im R_r, *von Kantor* (*S.*). — Transformation of systems of linear differential equatious; by *Wilczynski* (*E.-J.*). — Distribution of the ternary linear homogeneous substitutions in a Galois field into complete sets of conjugate substitutions; by *Dickson* (*L.-E.*). — Distribution of the quaternary linear homogeneous substitutions in a Galois field into complete sets of conjugate substitutions; by *Putnam* (*T.-M.*). — On the determination and solution of the metacyclic quintic equations with rational coefficients; by *Glashan* (*J.-C.*). — Construction of the geometry of Euclidean *n* dimensional space by the theory of continuous groups; by *Lovett* (*E.-O.*). — A table of class numbers for cubic number fields; by *Reid* (*Legh. W.*). — On certain properties of the plane cubic curve in relation to the circular points at infinity; by *Roberts* (*R.-A.*). — The cros ratio group of 120 quadratic Cremona transformations of the plane; by *Herbert Ellsworth Slaught*. — Memoir on the algebra of symbolic logic; by *Whitehead* (*A.-N.*). — On a special form of annular surfaces; by *Virgil Snyder*. — On the transitive substitution groups whose order is a power of a prime number; by *Miller* (*G.-A.*). — Geometry on the cubic scroll of the second Kind; by *Ferry* (*Frederick C.*).

Atti della Reale Accademia dei Lincei. — *Dini*. Sopra una classe d'equazioni a derivate parziali del 2° ordine, con un numero qualunque di variabili.

— *Bortolotti.* Sui prodotti infinite divergenti. — *Levi-Civita.* Sui moti stazionari di un corpo rigido nel caso della Kovalevsky.

Bulletin of the American mathematical Society (janvier à juin 1901). — Mathematics at the international congress of Philosophy Paris, 1900; by *Lovett* (*E.-O.*). — A demonstration of the impossibility of a triply asymptotic system of surfaces; by *Eisenhart* (*L.-P.*). — Shorter notices.

The seventh annual meeting of the American mathematical Society; by *Cole* (*F.-N.*). — On some birational transformations of the Kummer surface into itself; by *Hutchinson* (*J.-I.*). — Theorems concerning positive definitions of finite assemblage and infinite assemblage; by *Keyser* (*C.-J.*). — Dini's method of showing the convergence of Fourier's series and of other allied developments; by *Ford* (*Walter B.*). — Shorter notices.

The february meeting of the American mathematical Society; by *Cole* (*F.-N.*). — Green's functions in space of one dimension; by *Bôcher* (*Maxime*). — On a system of plane curves having factorable parallels; by *Virgil Snyder*. — Possible triply asymptotic systems of surfaces; by *Eisenhart* (*L.-P.*). — Note on Hamilton's determination of irrational numbers; by *Hawkes* (*H.-E.*). — Muth's Elementartheiler; by *Bromwich*. — Shorter notices.

Non-oscillatory linear differential equations of the second order; by *Bôcher* (*M.*). — Concerning real and complex continuous groups; by *Dickson* (*L.-E.*). — On holomorphisms and primitive roots; by *Miller* (*G.-A.*). — Bessel functions; by *Virgil Snyder*. — Shorter notices.

The april meeting of the American mathematical Society; by D^r *Kasner* (*Ed.*). — The april meeting of the Chicago section; by professeur *Holgate* (*Th. F.*). — The value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log 2 \cos \varphi)^m \varphi^n \, d\varphi$; by professeur *Morley* (*F.*). — On the algebraic potential curves; by D^r *Kasner* (*Ed.*). — Steinmetz's alternating current phenomena; by *Whitehead* (*J.-B.*). — Shorter notices. — Notes. — New publications.

Le Matematiche pure ed applicate (n^{os} 1 et 2, février-mars 1901). — *Ch. Hermite* Sulle frazioni continue. — *C. Jordan.* Ch. Hermite. — *G. Delitala.* Relazioni dipendditi dei raggi uscenti da un punto e passanti pei vertici di un triangolo. — *J. de Vries.* Alcune applicazione geometrica dei determinanti. — *E. Gelin.* Su di un sistema di equazioni di primo grado. — *C. Alasia.* Note bibliografici. — Questioni da risolvere (J. de Vries, E. Lemoine, C.-A. Laisant, C. Alasia). — Suggetti de ricera (H. Brocard, C. Alasia, J. Joring).

E. Gelin. Su di un sistema di equazioni de primo grado. — *Duran Loriga.* Ch. Hermite. — *W.-J. Greenstreet.* Alcuni teoremi sull'omologia. — *V. Retali.* Osservazioni geometriche sulla nota precedente. — *C. Alasia.* Note bibliografici. — Sulle equazioni di 3° et 4° grado (J. Brill). — A proposito di un esercizio dell' « Introd. alla Teoria delle funzioni di Harkness e Morley ». — Soluzione delle questioni 1, 4, 5, 6. — Questioni da risolvere (L. Ripert, E. Lemoine, A. Newton). — Soggetti di ricerche (H. Brocard, C. Alasia, J. Joring).

PETITE CORRESPONDANCE.

M. **L. B.**, à Lyon. — Nous avons transmis votre question à la Direction de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

M. **A. de V.**, à Moulins. — Vous trouverez les indications nécessaires dans le *Tableau de correspondance des questions et des solutions* encarté dans le numéro de février. On peut du reste se procurer ce supplément séparément.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 9. *SUPPLÉMENT.* SEPTEMBRE 1901.

CHRONIQUE.

A la **distribution des prix du concours général**, le discours d'usage a été prononcé par M. *Blutel*, professeur au Lycée Saint-Louis. Le sujet choisi était le suivant : « Du rôle de l'enseignement des Mathématiques dans la formation de l'esprit ».

L'orateur a su, par les idées sérieuses et la haute tenue littéraire de son discours, captiver l'attention de son auditoire. Nous donnons ici les noms des lauréats en Mathématiques dans les classes supérieures. — *Mathématiques spéciales :* 1er prix, Rémy; 2e prix, Dazier; accessits, Dunoyer, Feintuch, Thouvenot, Belgodère, Gorand, Guérithault. — *Mathématiques élémentaires :* 1er prix (non décerné); 2e prix, Labussière; accessits, Staub, Genty, Jocard, Jacob, Bérard, Baize, Pélissier, Ferdinand Dreyfus, Walter. — *Rhétorique :* 1er prix, De Larminat; 2e prix, Goursat; accessits, Codine, Govin, Dalloz, Blum, Girot.

Par arrêté du Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts, en date du 31 juillet 1901, sont nommés élèves de l'École Normale supérieure (section des Sciences) dans l'ordre de mérite suivant :

MM. Dunoyer et Rémy (*ex æquo*), Thouvenot, Rivoire, Sève, Lacombe, Giboin, Léon, Stiffel, Traynard, Chotard, Dazier, Feintuch.

*

Les candidats à l'**École spéciale militaire de Saint-Cyr** sont autorisés, à partir de 1902, pour la composition de calcul logarithmique, à faire usage, dans l'emploi des fonctions circulaires, soit des Tables établies dans le système de la division centésimale du quart de la circonférence, soit des Tables établies dans le système de la division sexagésimale. A partir des examens de 1905, l'usage des Tables du système centésimal sera obligatoire, mais les candidats pourront contrôler le calcul avec les Tables du système sexagésimal.

*

Ont été reçues au **certificat d'aptitude à l'enseignement secondaire** des jeunes filles :

Mlles Blanquies (école de Sèvres), Woirion (école de Sèvres), Halbwachs (école de Sèvres), Guillot (école de Sèvres), Delsart (école de Sèvres), Gilquin, maîtresse répétitrice au lycée du Puy.

*

M. **Bühl** a soutenu à la Faculté des Sciences de Paris une fort intéressante thèse *Sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe.*

L'Association internationale pour l'avancement des Sciences, Arts et Éducation tiendra sa deuxième session à Glascow, du 29 juillet au 27 septembre. Les séances auront lieu à l'Université et à l'Exposition. Comme à Paris l'année dernière, le but principal sera l'étude et l'interprétation des sujets d'intérêt scientifique, géographique et autres fournis par l'Exposition, au moyen de leçons et de conférences, avec démonstrations et visites dirigées par des guides compétents.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, fascicule II; 1901. — Sur la connexion linéaire de quelques surfaces algébriques; par M. l'abbé *H. Lacaze*. — Sur les courbes de déformation des fils (2e partie, Chap. VIII); par M. *H. Bouasse*. — Sur les équations de l'Hydrodynamique. Commentaire à un Mémoire de Clebsch; par M. *P. Duhem*.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXVII, nos 1 à 6 (2e semestre 1901). — Sur les réseaux conjugués de courbes orthogonales et isothermes; par M. *Demartres*. — Sur l'extension de la méthode d'intégration de Riemann; par M. *J. Coulon*. — Sur la solution des équations de l'élasticité, dans le cas où les valeurs des inconnues à la frontière sont données; par MM. *Eugène* et *François Cosserat*. — Sur l'Hermitien; par M. *Léon Autonne*. — Sur une application des fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité; par MM. *Eugène* et *François Cosserat*. — Sur les surfaces susceptibles d'une déformation continue avec conservation d'un système conjugué; par M. *A. Demoulin*. — Sur les intégrales analytiques des équations différentielles du premier ordre et de degré quelconque dans le voisinage de certaines valeurs singulières; par M. *Henri Dulac*. — Sur la déformation infiniment petite d'un corps élastique soumis à des forces données; par MM. *Eugène* et *François Cosserat*. — Sur les vibrations des nappes liquides de formes déterminées; par MM. *C. Chéneveau* et *G. Cartaud*. — Sur le théorème de Poisson et un théorème récent de M. Bühl; par M. *Paul Appell*. — Sur la déformation infiniment petite d'une enveloppe sphérique élastique; par MM. *Eugène et François Cosserat*. — Sur une relation qui existe probablement entre l'angle caractéristique de la déformation des métaux et le coefficient newtonien de restitution; par M. *G. Gravaris*. — Étude critique sur la théorie générale des mécanismes; par M. *G. Kœnigs*.

Atti della Reale Accademia dei Lincei (1901), t. IX, n° 12. — *Levi Civita*. Sui moti stazionari di un corpo rigido nel caso della Kovalevsky. — *Nicoletti*. Sulle serie doppie di Taylor.

American Journal of Mathematics, n° 3, july 1901. — Geometry on the cubic scroll of the second kind; *F.-G. Ferry*. — Congruent reductions of bilinear forms; by *T.-J.-Ia. Bromswich*. — On the imprimitive substitution groups of degree fifteen and the primitive substitution groups of degree eighteen; by *Emile-Norton Martin*. — Removal of any two terms from a binary quartic by linear transformations; by *B.-G. Morrisson*.

Bulletin de la Société Mathématique, 1901 (fascicule III). — Mémoires : Sur les rapports entre le calcul mécanique et le calcul graphique; par

M. *Torrès*. — Appareil stéréoscopique pour mettre en relief les figures géométriques se rapportant aux fonctions elliptiques; par M. *A.-G. Greenhill*. — Sur la dynamique des corps déformables; par M. *L. Lecornu*. — Sur une integration par approximations successives; par M. *R. d'Adhémar*. — Sur une classe de polygones de Poncelet; par M. *M. Weill*. — COMPTES RENDUS DES SÉANCES (avril à juillet 1901) : Sur les systèmes complets d'équations aux dérivées partielles; par M. *E. Maillet*. — Détermination simple de la direction des axes d'une conique; par M. *E. Lemoine*. — Sur certains théorèmes de Géométrie cinématique; par M. *E. Maillet*. — Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles; par M. *J. Hadamard*. — Sur la méthode d'approximation de Newton; par M. *A. Pellet*. — Sur les déformations des quadriques; par M. *M. Servant*.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 123, Heft III und IV. — *Zimmermann*. Neue Abteilung der *Plückerschen* Gleichungen nebst einigen directen Bestimmungen der Doppeltangenten ebener algebraischen Curven beliebiger Ordnung. — *Saalschütz* (*L.*). Gleichungen zwischen den Anfangsgliedern von Differenzreihen und deren Verwendung zu Sommationen und zur Darstellung der *Bernoullischen* Zahlen. — *Jung*. Ueber die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst. — *Lœwy*. Ueber die Verallgemeinerung eines *Weierstrassschen* Satzes. — *Pirondini*. Sur les cylindres et les cônes passant par une ligne. — *Laudau*. Zur Theorie der Gammafunction. — *Timerding*. Ueber eine Raumcurve fünfter Ordnung. — *Hermes*. Die Formen der Vielflache. — *Hamburger*. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 5ᵉ série, t. V (2ᵉ Cahier). — *E. Lenoble*. Contribution à l'étude des déformations permanentes des fils métalliques. — *H. Chevallier*. Sur les variations permanentes de résistance électrique des fils d'alliage platine-argent soumis à des variations de température.

Bulletin des Sciences mathématiques, 1901 (nᵒˢ d'avril et mai). — COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Brückner* (*M.*). Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte. — *Dʳ Suter* (*Heinrich*). Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke.— *Weiss* (*H.*). Grundsätze der Kinematik.— *Borel* (*E.*). Leçons sur les séries divergentes. — MÉLANGES : *Minkowski* (*H.*). Quelques nouveaux théorèmes sur l'approximation des quantités à l'aide de nombres rationnels. — Revue des publications mathématiques.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES : *Vogt* (*H.*). Eléments de Mathématiques supérieures à l'usage des physiciens, chimistes et ingénieurs et des élèves des Facultés des Sciences. — *Russell* (*B.*). Essai sur les fondements de la Géométrie. Traduction par *A. Cadenat*. — *Kiepert* (*L.*). Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. — MÉLANGES : *Émile Picard*. Sur la résolution de certaines équations à deux variables à l'aide de fonctions rationnelles et sur un théorème de M. Noether. — Revue des publications mathématiques.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 1901 (nᵒˢ d'avril à juillet). — Sur l'intégration de l'équation $\Delta u = fu$ (*suite* et *fin*); par M. *J. Lindeberg*. — Théorie mathématique du jeu; par M. *L. Bachelier*. — Contribution à l'étude des fonctions méromorphes; par M. *E. Borel*. — Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales; par M. *E. Cartan*.

OUVRAGES RÉCENTS.

BERTHELOT (M.), Sénateur, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur au Collège de France. — *Les carbures d'hydrogène* (1851-1901).

Recherches expérimentales. Trois volumes grand in-8; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

TOME I : *L'Acétylène : synthèse totale des carbures d'hydrogène.* Volume de x-414 pages.

TOME II : *Les Carbures pyrogénés. Séries diverses.* Volume de IV-558 pages.

TOME III : *Combinaison des carbures d'hydrogène avec l'hydrogène, l'oxygène, les éléments de l'eau.* Volume de IV-459 pages.

L'Ouvrage que nous présentons aujourd'hui au public contient la réunion des expériences et des recherches exécutées sur les carbures d'hydrogène, et principalement sur leur synthèse depuis les éléments, synthèse qui est le pivot de toutes les autres synthèses en Chimie organique. La formation de l'acétylène, de l'éthylène, du formène et de la benzine, les quatre carbures fondamentaux, celle des carbures pyrogénés, les méthodes générales propres à hydrogéner les carbures et autres composés organiques, etc., n'ont cessé de préoccuper l'Auteur pendant un demi-siècle : ses premiers travaux à cet égard datent de l'année 1851, et les derniers de 1901.

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — *Leçons sur les séries divergentes.* Un volume in-8, avec figures; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

L'accueil favorable que le public mathématique a bien voulu faire aux deux Ouvrages déjà publiés sur la Théorie des fonctions a engagé l'Auteur à continuer la tâche entreprise.

Étant donné l'intérêt que paraît présenter le problème des séries divergentes et vu les polémiques ardentes qu'il a autrefois soulevées, M. Borel a cru devoir faire précéder d'une courte Introduction historique l'exposition des théories modernes. Cette Introduction se termine par quelques considérations générales sur les séries divergentes et par quelques indications sur le plan de ces Leçons.

BREITHOF (N.), Professeur à l'Université de Louvain, Inspecteur de l'Enseignement des Arts du dessin, et BREITHOF (Franz), Ingénieur civil des Mines, Directeur des travaux graphiques à l'Université de Louvain. — *Traité de Géométrie descriptive* (Paris, Gauthier-Villars).

Ire PARTIE : *Point. Droite. Plan.* 4e édition revue et augmentée. In-8 de 193 pages avec Atlas in-4 de 24 planches; 1901.

BREITHOF (Franz). — *Stéréotomie. Théorie et construction des arches biaises.* In-8 de 68 pages avec Atlas in-4 de 10 planches; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

FÖPPL (Aug.), Professeur à l'Université technique de Munich. — *Résistance des matériaux et éléments de la théorie mathématique de l'Élasticité.* Traduit de l'allemand par E. HAHN, Ingénieur diplômé de l'École Polytechnique de Zurich. Grand in-8 de 489 pages, avec 74 fig. 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

Ce Volume contient tout ce que, de nos jours, un ingénieur d'une culture supérieure doit connaître dans le domaine de la résistance des matériaux. L'Auteur présente l'état actuel de cette branche de l'art du constructeur en tenant compte des progrès les plus récents.

Les sujets traités sont ceux que l'on rencontre dans la plupart des Ouvrages classiques sur la résistance des matériaux.

A signaler comme particulièrement intéressant le dernier Chapitre, dans lequel l'Auteur a su condenser les principes fondamentaux de la théorie mathématique de l'élasticité; on y trouve, notamment, un aperçu des théories de Boussinesq et de Hertz.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 10. *SUPPLÉMENT.* Octobre 1901.

CHRONIQUE.

École Polytechnique. — A la date du 17 août 1901, le Ministre de la Guerre a pris la décision suivante : « Les candidats à l'École Polytechnique feront, à l'avenir, la composition de Calcul trigonométrique avec des Tables à 5 décimales. Ils seront autorisés, à partir de 1902, à faire usage, dans l'emploi des fonctions circulaires, soit de Tables établies dans le système de la division centésimale du quart de la circonférence, soit des Tables établies dans le système de la division sexagésimale. A partir des examens de 1905, l'usage des Tables du système centésimal sera obligatoire. mais les candidats pourront contrôler les calculs avec les Tables du système sexagésimal. »

★

École Centrale des Arts et Manufactures. — Le programme pour l'admission vient d'être modifié d'une façon assez sensible, et nous reproduisons ici le texte même du *Journal officiel* expliquant la base de ces modifications :

Les modifications apportées au programme ont été faites dans le but de le simplifier, de le préciser et de le développer dans le sens dans lequel les élèves eux-mêmes sont appelés à se diriger après leur entrée à l'école.

1° *Simplifications.* — On a supprimé toutes les questions pouvant donner lieu à des discussions sur les principes : ces questions, qui touchent à la philosophie des Mathématiques, seraient intéressantes et utiles pour des élèves se destinant à l'enseignement; elles ne peuvent même pas être comprises d'un élève de lycée. Personne ne songerait à demander à des candidats à l'École Centrale d'approfondir et de justifier les définitions de la ligne droite et du plan, de discuter le postulatum d'Euclide : les notions simples et intuitives fournies par le bon sens ne peuvent qu'être obscurcies par des discussions prématurées. La même prudence s'impose en Arithmétique, en Algèbre et en Mécanique. C'est ainsi que, pour l'Algèbre et l'Arithmétique, on a supprimé du programme toutes les questions pouvant donner lieu à des développements ou à des interrogations sur les nombres incommensurables en général, sur l'idée générale de limite, sur la continuité en un point ou dans un intervalle, sur l'existence des dérivées et des fonctions implicites... : ce genre de notions se trouvera précisé par les exemples particuliers qui s'en présentent dans le cours : l'idée d'incommensurable, par le rapport de la diagonale du carré au côté; l'idée de limite, par les progressions géométriques décroissantes, les séries, les dérivées, etc.; pour éviter toute difficulté pour la continuité, on a indiqué au programme que l'idée d'un trait continu pour la représentation graphique de la fonction suffirait à définir la continuité; on a, d'une façon générale, introduit dans toutes les questions d'Analyse et d'Algèbre la représentation graphique; par exemple, on a indiqué que, pour le théorème des accroissements finis, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'e$, on peut le déduire de cette remarque que, sur l'arc de courbe $y=f(x)$ entre les deux points $x=a$ et $x=b$, il existe un point $x=c$ où la tangente est parallèle à la corde, pourvu que la dérivée remplisse les conditions connues; de même, la représentation graphique doit jouer un rôle fondamental dans tout ce qui touche à la théorie des équations à coefficients réels, théorème de Rolle, méthodes d'approximation Newton et des parties proportionnelles. Pour les séries, on ne demandera que l'étude de celles dont la convergence ou la divergence puisse s'étudier par l'application directe des théorèmes indiqués au programme. En Mécanique, les interrogations ne porteront pas sur les principes. Les candidats devront être exercés aux questions du programme accompagnées d'applications simples; par exemple, les conditions générales d'équilibre d'un corps solide devront être appliquées aux cas simples d'un corps solide sollicité par deux forces, par trois forces, par des forces parallèles, par des forces dans un même plan. Une autre simplification du programme a consisté à supprimer les petites questions traitées par des méthodes spéciales et compliquées, quand il existe des méthodes générales plus simples. Enfin, une dernière simplification en Mathématiques a consisté à diminuer en Géométrie analytique la place excessive prise par la théorie des courbes et surfaces du second ordre, principalement en supprimant des questions relatives à ces courbes ou surfaces rapportées à des axes quelconques. On a supprimé toutes les formules générales qui ne sont que des exercices de mémoire ou des jeux d'écriture; exemples : condition de contact d'une droite et d'une conique, équation quadratique des tangentes menées d'un point, équation quadratique des asymptotes dans l'équation générale, théorie générale des foyers et des directrices, etc. De même, dans l'espace, on a supprimé ce qui se rapporte à la réduction de l'équation générale du deuxième degré; par contre, on a précisé les points sur lesquels portera l'étude des quadriques avec les formes réduites. Pour éviter de charger la mémoire de formules compliquées, on a spécifié en Géométrie analytique que, dans toutes les questions relatives aux angles et aux distances, on emploierait les coordonnées rectangulaires. Dans le même ordre d'idées, on a supprimé les notions de sciences naturelles précédemment exigées.

2° *Précision.* — L'ancien programme contient quelques expressions trop vagues ou trop générales, de telle sorte que les professeurs, ne sachant jusqu'où l'examinateur ira, fatiguent les élèves à force de vouloir prévoir des questions possibles. Dans cet ordre d'idées rentrent d'abord des questions sur les principes qui sont déjà écartées, puis des questions comme les suivantes : En Trigonométrie, application à la résolution de certaines équations trigonométriques; en Algèbre, fonctions primitives qui s'obtiennent comme conséquences immédiates des dérivées ci-dessus indiquées; en Géométrie analytique, recherche des asymptotes à une courbe; application aux courbes algébriques; équations générales de coniques assujetties à certaines conditions; équations d'un plan assujetti à certaines conditions, etc. Ces questions ont été précisées et l'on a énuméré les applications demandées, ce qui allonge le texte, mais diminue le programme.

3° *Développement.* — Enfin, on s'est proposé de développer le programme. Il y a actuellement une tendance à faire tourner toute la Géométrie analytique autour de l'étude des courbes et surfaces du second ordre *définies par leurs équations générales* et de la recherche de *lieux géométriques artificiels;* les élèves apprennent par cœur des formules et des équations tout à fait inutiles. Comme nous l'avons déjà dit, on a supprimé dans le programme tout ce qui pourrait pousser les professeurs dans cette voie où les élèves se fatiguent sans aucun développement de l'intelligence et acquièrent le dédain des questions simples et précises, des applications numériques, des calculs entièrement terminés. Beaucoup d'élèves sont incapables de construire une courbe définie par une équation numérique explicite $y = f(x)$, de calculer les maxima, minima, les points d'inflexion, etc. On a, en conséquence, introduit quelques questions qui obligeront les élèves à approfondir la représentation d'une fonction par une courbe sur des exemples numériques et à pousser les calculs jusqu'au bout. C'est pourquoi l'on a divisé la partie du programme relative aux courbes en trois parties : A. Étude des courbes définies par une équation explicite $y = f(x)$, cas très important au point de vue des applications; B. Études des courbes telles que les coordonnées d'un de leurs points soient exprimées en fonctions d'un paramètre, cas qui se présente constamment en Cinématique; C. Courbes définies par une équation implicite, cas sur lequel portaient presque toutes les questions de l'ancien programme. En Trigonométrie on a ajouté la formule de Moivre et la formule d'Euler $e^{xi} = \cos x + i \sin x$. Pour établir cette formule, on remarquera que, en prenant la dérivée de $y = \mathrm{L}(\cos x + i \sin x)$ par les règles ordinaires et réduisant, on trouve $y'_x = i$; on en conclut $y = ix + \mathrm{C}$, $\cos x + i \sin x = \mathrm{A} e^{ix}$ et en faisant $x = 0$, $\mathrm{A} = 1$. Il ne sera soulevé aucune difficulté au sujet de cette démonstration. Enfin le programme se trouve complété, dans le sens que nous avons indiqué, par l'introduction de quelques notions de Cinématique et de Mécanique. Si, pour les parties déjà anciennes et depuis longtemps classiques du programme, on a tenu à le préciser, à plus forte raison en est-il ainsi dans ces parties nouvelles. Ce qu'on a voulu tout d'abord, c'est que de futurs ingénieurs acquièrent le plus tôt possible quelques notions précises sur les machines les plus simples et que, sur chacune d'elles, il leur soit montré clairement qu'on ne peut pas gagner à la fois en force et en chemin parcouru, ce qui n'exige en aucune façon qu'on leur donne et surtout qu'on leur développe la notion du travail mécanique. Galilée, sans cette notion, pouvait déjà dire à ses contemporains que celui qui chercherait un dispositif mécanique ayant par lui-même la double vertu de faire gagner à la fois de la force et du temps ne mériterait pas d'avoir du temps, parce qu'il l'emploierait trop mal. C'est ce que les machines comprises au programme suffisent à faire concevoir. Si ce but avait été le seul utile, le programme de Statique y eût suffi. Si l'on y a ajouté les premiers éléments de la Cinématique et de la Dynamique du point, c'est surtout en vue de l'enseignement de la Physique, cette science dont l'importance en industrie grandit chaque jour. Les professeurs de Physique n'ont jamais pu se passer d'employer des notions de Mécanique plus ou moins déguisées. Il a paru préférable de les donner franchement en les réduisant à ce qui est indispensable dans la Physique élémentaire et restera indispensable dans la Physique la plus industrielle, à savoir : la notion du champ de forces uniforme et celle du champ de forces centrales variant en raison directe de la distance au centre. C'est à bien en imprégner les débutants que s'attache le programme dès ses premières lignes, dès qu'on a défini l'accélération. On ne demandera d'ailleurs aucun des théorèmes généraux relatifs à la Dynamique du point. En Statique, on a, dès le début, et contrairement à l'usage, introduit la notion du frottement. C'est la réalité, ce que chacun conçoit. Elle est de nature à donner aux débutants des idées beaucoup plus justes que l'abstraction sur laquelle, d'ordinaire, on les tient peut-être un peu longtemps et non au profit de la claire vue des choses.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

OUVRAGES RÉCENTS.

Bigourdan (G.), Astronome titulaire à l'Observatoire de Paris. — *Le Système métrique des poids et mesures. Son établissement et sa propagation.* Un volume petit in-8 en caractères elzévirs, avec 17 figures, planches et portraits; 1901 (Paris, Gauthier-Villars).

La création du *Système métrique* remonte aujourd'hui à un siècle; et les Poids et Mesures qui le constituent sont maintenant répandus dans le monde entier; bientôt même ils seront seuls en usage dans tous les pays civilisés.

Le moment est donc propice pour rappeler la fondation de ce système qui a marqué sa date parmi les créations les plus utiles à l'humanité, et dont les mérites sont universellement reconnus. D'ailleurs, aucune autre entreprise n'a porté ni plus haut ni plus loin le bon renom de la France.

L'auteur a eu entre les mains des documents originaux fort nombreux qui éclairent certaines parties restées obscures dans l'histoire de l'établissement du *Système métrique.*

Brisse (Ch.), Professeur à l'École Centrale et au Lycée Condorcet, Répétiteur à l'École Polytechnique. — *Cours de Géométrie descriptive.* 2 volumes grand in-8.

Ire Partie, à l'usage des Élèves de la *Classe de Mathématiques élémentaires.* 2e édition revue par C. Bourlet, Prof. au Lycée Saint-Louis, avec 255 fig.; 1900 (Paris, Gauthier-Villars).

En dehors de l'introduction de la théorie des changements de plans en général, au Chapitre III, et de quelques corrections de détail, M. Bourlet s'est contenté de faire les additions qui lui ont paru nécessaires pour mettre le Volume en harmonie avec les habitudes de l'enseignement actuel.

Dans tout l'Ouvrage il a donné une plus large place aux questions de la ponctuation. Au Chapitre V, il a ajouté les résolutions des trièdres. Enfin, des quelques lignes que Brisse avait consacrées aux projections du cercle, il a fait le Chapitre VI, réservé aux projections du cercle et de l'hélice et aux problèmes qui s'y rattachent.

N° 12. *SUPPLÉMENT.* DÉCEMBRE 1901.

CHRONIQUE.

M. **Raymond Alezais** a soutenu, devant la Faculté des Sciences de Paris, le vendredi 15 novembre, pour obtenir le grade de docteur ès Sciences mathématiques, une thèse *Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes*.

*

Le 2 janvier 1902 aura lieu à Saint-Pétersbourg l'ouverture du XI[e] **Congrès des Naturalistes et Médecins russes.** Le Congrès sera divisé en sections : Mathématiques et Mécanique, Astronomie et Géodésie, Physique, Géographie physique, Chimie, Géologie et Minéralogie, Botanique, Zoologie, Anatomie et Physiologie, Géographie. Le Congrès siégera du 2 au 12 janvier 1902.

Ceux qui désirent prendre part à la réunion comme membres du Congrès sont priés de bien vouloir envoyer au comité exécutif du Congrès (Saint-Pétersbourg, Université), avant le 15 décembre, leur adresse précise, ainsi que leur cotisation (3 roubles), avec l'indication de la section choisie.

*

Harvard University. *Cours de l'année scolaire* 1901-1902. — M. J.-M. Peirce : Calcul des quaternions, Théorie des coordonnées triangulaires et des courbes planes algébriques, Application des quaternions à la théorie des courbes et surfaces, Choix de quaternions topiques. — M. Byerly : Calcul différentiel supérieur et Calcul intégral, Séries trigonométriques, harmoniques sphériques, fonction potentielle, Étude du *Traité d'Analyse*, Vol. I, de M. E. Picard. — M. B.-O. Peirce : Séries trigonométriques, harmoniques sphériques, fonction potentielle. — M. Osgood : Séries infinies et produits, Théorie des fonctions, Recherches sur le calcul des variations. — M. Bôcher : Algèbre supérieure, polynomes et invariants, Équations partielles différentielles, Équations linéaires différentielles du second ordre. — M. Bouton : Théorie des nombres, Théorie élémentaire des équations différentielles. — M. Coolidge : Théorie des équations, invariants, Géométrie non euclidienne, Recherches sur la Géométrie projective. — M. Whittemore : Méthodes modernes en Géométrie, déterminants

*

Agrégation; Concours de 1902 (Science mathématique).

(SUITE ET FIN.)

II. — Programme des questions spéciales d'Analyse et de Mécanique d'où sera tiré le sujet d'une des compositions écrites.

ANALYSE : Fonctions uniformes doublement périodiques; périodes primitives; parallélogramme des périodes. Fonctions elliptiques; théorèmes généraux; pôles, résidus, zéros, ordre d'une fonction elliptique.

Fonctions σ, p de Weierstrass; propriétés élémentaires; formules d'addition; invariants g_2 et g_3. Notations de Jacobi; fonctions H, H_1, Θ, Θ_1, sn, cn, dn; propriétés élémentaires; formules d'addition; module et multiplicateur. Passage de l'un des systèmes de notation à l'autre. — Diverses formes que peut prendre une fonction elliptique : 1° décomposition en éléments simples (formule d'Hermite); 2° décomposition en facteurs; théorème de Liouville; 3° expression d'une fonction elliptique en fonction rationnelle de p et p'. Relation algébrique entre deux fonctions elliptiques aux mêmes périodes. Inversion de l'intégrale $\int \frac{dz}{\sqrt{a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + \ldots + a_4}}$; réduction aux formes normales de Weierstrass et de Legendre. On admettra qu'à un système donné d'invariants g_2 et g_3, ou de module et de multiplicateur, correspond toujours un couple de périodes primitives permettant de construire les fonctions elliptiques correspondantes. Expression des périodes par des intégrales définies : 1° sur la forme normale de Weierstrass, dans le cas où g_2 et g_3 sont réels; 2° sur la forme normale de Legendre, dans le cas où k^2 est réel et compris entre o et 1. — Calcul de l'intégrale $\int R(z, \sqrt{a_0 z^4 + \ldots})\, dz$, où R est une fonction rationnelle de z et de la racine carrée d'un polynome du troisième ou du quatrième degré. Exemples : intégrales de deuxième et de troisième espèces. Étude des fonctions p, p', sn, cn, dn, dans le cas où l'une des périodes est réelle, et l'autre purement imaginaire. Valeurs de l'argument rendant les fonctions réelles. Applications immédiates de la théorie des fonctions elliptiques aux courbes algébriques planes à singularités simples, et aux problèmes élémentaires se rattachant au programme général d'Analyse et de Mécanique indiqué ci-dessus.

Nota. — Pour les compositions écrites, les candidats seront autorisés à se servir d'un tableau imprimé, résumant les principales formules relatives aux fonctions elliptiques, publié par la librairie Gauthier-Villars.

Mécanique : Dynamique du corps solide; percussion.

III. — *Sujets de leçons.*

Mathématiques élémentaires. — **1.** Supposant connus les principes de la théorie des nombres premiers, établir la formule qui fait connaître combien il y a de nombres inférieurs à un nombre donné et premiers avec lui. Théorème de Fermat. Généralisation de ce théorème. Théorème de Wilson. Applications. — **2.** Extraction de la racine carrée à moins d'une unité; à moins de $\frac{1}{n}$. (Indiquer quelques méthodes abrégées.) — **3.** Nombres positifs et négatifs; opérations sur ces nombres. — **4.** Division algébrique. — **5.** Résoudre et discuter : 1° l'équation $P + \sqrt{Q} = o$, où P est un polynome du premier degré et Q un polynome du second degré; 2° l'équation $\sqrt{P} + \sqrt{Q} = a$, où P et Q sont des polynomes du premier degré et a une constante. Exemples tirés de la Géométrie. — **6.** Calcul de π. — **7.** Transformation par rayons vecteurs réciproques. Applications. — **8.** Cercles orthogonaux dans le plan et sur la sphère. — **9.** Cercles tangents à trois cercles donnés. Cas particuliers. — **10.** Intersection d'une droite et d'une hyperbole; nombre de points d'intersection situés sur chaque branche; cas où la droite est tangente; cas où elle est asymptote. — 11. Démontrer que toute conique peut être considérée comme le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques. Réciproque. Rapport anharmonique de quatre points sur une conique. Applications (Ouvrages à consulter : CHASLES, *Traité des coniques;* ROUCHÉ et DE COMBEROUSSE, *Traité de Géométrie*). — 12. Involution sur une droite. Faisceaux en involution. Involution sur une conique. Applications. — 13. Transformation par semi-droites réciproques. Application à la construction d'un cycle touchant trois cycles donnés. (On pourra consulter le *Traité de Géométrie* de E. Rouché, 7e édition, p. 314.) — 14. Figures homothétiques dans l'espace. Centre d'homothétie. Axe d'homothétie. Plan d'homothétie. Application à un système de quatre sphères. — 15. Propriétés générales des polyèdres convexes. Théorème d'Euler. Applications. — 16. Vitesse. Étude de la vitesse dans quelques mouvements. Représentations graphiques. — 17. Composition des vitesses. Applications géométriques et mécaniques. — 18. Théorie des couples. Réduction à une force et à un couple d'un système de forces appliquées à un corps solide. Conditions d'équilibre. — 19. Équilibre d'un corps pesant sur un plan incliné dépoli, en supposant le corps soumis à l'action d'une force passant par son centre de gravité. — 20. Principes de la théorie des engrenages cylindriques. Exemples simples. — 21. Énoncé du principe général des forces vives. Application aux machines. Volants. — 22. Définition et détermination de la latitude et de la longitude d'un lieu, soit sur terre, soit sur mer. — 23. Cartes géographiques. — 24. *Géométrie descriptive.* — Rotations et rabattements. Applications. — 25. *Géométrie cotée.* — Représentation des droites et des plans. Intersection de droites et de plans. Droite perpendiculaire à un plan.

IV. — Programme des matières d'où seront tirés les sujets des leçons de Mathématiques spéciales.

Convergence et divergence des séries. Règles élémentaires permettant de reconnaître la convergence ou la divergence d'une série. Règles de Gauss et de Duhamel. Séries à termes alternativement positifs et négatifs. Séries à termes imaginaires. Convergence absolue. Principales propriétés des séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable complexe. Convergence uniforme. La variable étant supposée réelle, étudier la dérivée, l'intégrale de la série. Applications. Séries de Taylor et de Mac-Laurin dans le cas d'une variable réelle; applications. — Produits infinis de facteurs réels ou complexes. Convergence et divergence. Définition de $\sin z$ par un produit infini de facteurs complexes; montrer que si z est réel, cette fonction coïncide avec la fonction considérée en Trigonométrie. — Fractions continues limitées et illimitées; fractions continues périodiques. — Propriétés générales des équations algébriques. Nombre des racines. Relations entre les coefficients et les racines. Calcul des fonctions symétriques des racines. Applications. Élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques entières (diverses méthodes). Équations à coefficients réels : nombre, séparation et calcul approché des racines réelles. —

Transformation d'une équation algébrique $f(x) = 0$ dans le cas où chaque racine y de l'équation cherchée doit être une fonction rationnelle φ d'une ou de deux racines de l'équation donnée. Exemples. — Soit $y = \varphi(x)$ l'équation qui définit la transformation. On suppose que les coefficients des fonctions f et φ appartiennent à un certain domaine de rationalité dans lequel $f(x)$ est irréductible et l'on désigne par $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ les racines de l'équation $f(x) = 0$. Si les quantités $\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_{n-1})$ sont distinctes, elles sont racines d'une équation irréductible de degré n. Toute fonction rationnelle d'une racine α_0 dans le domaine considéré s'exprime rationnellement au moyen de $\varphi(\alpha_0)$. Cas où plusieurs des quantités $\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_{n-1})$ sont égales. Si les racines d'une équation irréductible s'expriment rationnellement au moyen de l'une d'entre elles, elles s'expriment rationnellement au moyen de l'une quelconque de ces racines. — Étant donnée, dans un certain domaine de rationalité, une équation $f(x) = 0$, on peut former, dans le même domaine, une équation irréductible $F(y) = 0$ telle que toutes les racines de $f(x) = 0$ soient des fonctions rationnelles de l'une quelconque des racines de $F(y) = 0$. Exemples. — Définition des invariants et des covariants d'une ou de deux formes binaires. Application aux formes des trois premiers degrés. Interprétations géométriques. Application à la résolution de l'équation du troisième degré. Invariants de la forme biquadratique. Rapport anharmonique de quatre quantités. Équation du sixième degré qui donne les six valeurs du rapport anharmonique : 1° des racines de l'équation du quatrième degré; 2° des racines de l'équation du troisième degré et d'un nombre donné x. Signification des invariants de la forme biquadratique. Relation fondamentale entre les covariants de la forme cubique. — Courbes planes. Ordre, classe; points doubles, points de rebroussement; tangentes doubles, tangentes d'inflexion. Genre. Formules de Plücker pour une courbe ne possédant que les singularités simples de l'espèce ci-dessus. Exemples choisis dans les courbes du troisième et du quatrième ordre. — Transformation quadratique birationnelle du plan : applications. — Formes quadratiques à trois ou quatre variables. Formes adjointes. Équations ponctuelles et équations tangentielles des coniques et des quadriques. Réduction simultanée de deux formes quadratiques à trois variables x, y, z, à des sommes de trois ou d'un nombre moindre de carrés. Triangle conjugué commun à deux coniques. Invariants simultanés de deux formes quadratiques à trois variables. Triangle inscrit ou circonscrit à une première conique et conjugué à une seconde conique. Triangle inscrit dans une conique et circonscrit à une autre. Applications aux propriétés projectives et métriques. Propriétés analogues des cônes du second ordre. — Étude de la surface telle que les coordonnées homogènes d'un de ses points soient proportionnelles à quatre formes quadratiques données de trois paramètres : cas particuliers où la surface se réduit à une quadrique. Intersection de deux quadriques quand cette intersection se décompose. — *Géométrie descriptive*. — Surfaces de révolution. Surface gauche de révolution. Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.