NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. CASPARY

Sur quelques nouveaux théorèmes, relatifs au triangle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 75-77

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__75_0>

[K1c]

SUR QUELQUES NOUVEAUX THÉORÈMES, RELATIFS AU TRIANGLE;

PAR M. F. CASPARY.

(Extrait d'une lettre adressée à M. E. LEMOINE.)

..... On doit à vous, Monsieur, à M. Brocard, à M. Neuberg et à d'autres éminents géomètres, des théorèmes, relatifs au triangle, dans lesquels le point qui porte votre nom est pris comme point de départ.

L'application des méthodes de Grassmann à la géométrie récente du triangle m'a conduit au résultat surprenant que lesdits théorèmes existent encore si l'on remplace le point d'intersection des symédianes par un point absolument quelconque.

Permettez-moi, Monsieur, de vous communiquer quelques-uns de mes théorèmes.

Soit $A_1A_2A_3$ un triangle, X un point absolument quelconque de son plan et $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ les points où les droites A_1X, A_2X, A_3X coupent les côtés. Soient, de plus, $B_2^{(1)}$ et $B_3^{(1)}$ les points où les parallèles menées par $X^{(3)}$ et $X^{(2)}$ respectivement aux côtés A_3A_1 et A_1A_2 coupent A_2A_3; et de même les points $B_3^{(2)}$ et $B_1^{(2)}$; $B_1^{(3)}$, $B_2^{(3)}$ obtenus par permutation cyclique. Soient enfin $B_1^{(1)}$, $B_2^{(2)}$, $B_3^{(3)}$ les points situés respectivement sur A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 et construits de façon que les segments $A_3B_1^{(1)}$, $A_1B_2^{(2)}$, $A_2B_3^{(3)}$ soient égaux respectivement aux segments $X^{(1)}A_2$, $X^{(2)}A_3$, $X^{(3)}A_1$. Alors on a les théorèmes suivants :

1. *Les droites* $A_1B_i^{(1)}$, $A_2B_i^{(2)}$, $A_3B_i^{(3)}$ *concourent au point* B_i $(i = 1, 2, 3)$.

2. *Les droites* B_iX *sont parallèles aux côtés* A_kA_l ($i, k, l = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$).

3. *Les deux triangles* $A_1A_2A_3$ *et* $B_1B_2B_3$ *ont le même centre de gravité* G.

4. *Les droites* A_iG *passent par les milieux des segments* B_iX.

5. *Le point d'intersection* C_i *des droites* A_iX *et* B_iG *est situé sur la droite qui passe par* B_i *et le milieu du segment* B_kB_l.

6. *Les triangles* $A_1A_2A_3$ *et* $B_1B_2B_3$ *sont triplement homologiques, de façon que les droites* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 *concourent au point* D_1; *les droites* A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 *au point* D_2 *et les droites* A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2 *au point* D_3.

7. *Le centre de gravité du triangle* $D_1D_2D_3$ *est le point* G, *centre de gravité des triangles* $A_1A_2A_3$ *et* $B_1B_2B_3$.

8. *Si l'on désigne par* W_i *les points d'intersection des droites* A_kD_2 *et* A_lD_3, *les droites* A_iW_i *concourent au point* W.

9. *La droite* WX *passe par le milieu du segment* D_2D_3.

10. *Si l'on désigne par* L_i *les points d'intersection des droites* B_kC_l *et* B_lC_k *et par* X_i *les points d'intersection des droites* A_kL_k *et* A_lL_l, *les points* X *et* X_i *sont des points associés.*

11. *Les droites* B_iX_i *passent par les milieux des segments* A_kA_l.

12. *Si l'on désigne par* F_i *les points d'intersection des droites* A_kC_l *et* A_lC_k, *les droites* F_iG *sont parallèles aux droites* B_iX *et aux côtés* A_kA_l.

13. *Les droites* A_iF_i *concourent au point* F.

14. *Les droites* C_iF_i *concourent au point* Q.

15. *Les points* X, G, F, Q *sont situés sur la même*

droite, et de telle façon que le point Q *est le milieu du segment* FX *et le segment* $XG = \frac{1}{2} GF = 2 GQ$.

16. *Les parallèles menées par les milieux des côtés* $B_k B_l$ *aux côtés* $A_k A_l$ *concourent au point* Q.

17 *Les parallèles menées par les points* A_i *aux côtés* $B_k B_l$ *concourent au point* R.

18. *Les droites* $B_i G$ *passent par les milieux des segments* $A_i R$.

19. *Les points* B_1, B_2, B_3, D_2, D_3, X *sont situés sur une même conique.*

20. *Les points* A_1, A_2, A_3, D_3, D_2, R *sont situés sur une même conique.*

Des théorèmes précédents se déduisent d'autres si l'on échange A_i avec B_i, et conséquemment D_2 avec D_3, X avec R, etc. Les théorèmes 4 et 18, 19 et 20 en sont des exemples.

Si le point quelconque X devient le point de Lemoine, les triangles $B_1 B_2 B_3$ et $C_1 C_2 C_3$ représentent le premier et le second triangle de Brocard et les points D_2 et D_3 les points brocardiens Ω' et Ω.