NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGRANGE

Sur les cubiques strophoïdales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 66-74

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__66_1>

[$M_1 5 c\alpha$]

SUR LES CUBIQUES STROPHOÏDALES;

PAR M. LAGRANGE,
Professeur à Brest.

Définition. — Soient O et A deux points fixes et (Δ) une droite passant par A; M un point variable de (Δ). On sait que si, sur OM, on prend deux points P et P' tels que $MP = MP' = MA$ le lieu de ces points est une strophoïde ayant pour point double le point A.

Dans le cas où (Δ) ne passe pas par A le lieu est également une cubique que nous appellerons une cubique *strophoïdale* et nous nous proposons, dans cet article, d'indiquer quelques propriétés intéressantes de cette classe de cubiques.

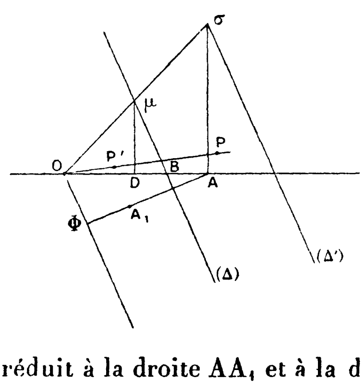
Tout rayon issu de O coupe (Δ) en un seul point M et sur ce rayon il y a deux points P et P' du lieu distincts de O. L'un de ces points ne peut venir en O que si l'on a $MO = MA$, c'est-à-dire que si M est sur la perpendiculaire au milieu de OA; soit $D\mu$ cette perpendiculaire; le point O est un point simple du lieu et la tangente en ce point est le rayon $O\mu$. Au point O correspond le point σ tel que $\mu\sigma = \mu O$ (*fig.* 1). Le lieu est donc bien une courbe du troisième ordre.

Remarquons, dès maintenant, que le point A_1 symétrique de A par rapport à (Δ) peut, dans la construction du lieu, remplacer A; on a, en effet, $MA = MA_1$ quel que soit M. On peut encore dire que P et P' sont les points communs au cercle de centre M et de rayon MA avec le rayon OM.

Les différents cercles forment un faisceau linéaire : à chaque cercle du faisceau correspond un rayon issu de O et inversement, de sorte que ce mode de génération du lieu est un cas particulier du mode de génération des cubiques quelconques indiqué par Chasles. Si OM devient une droite isotrope, c'est une asymptote du cercle correspondant, puisqu'elle passe par le centre du cercle et les points P et P′ sont confondus avec l'un des points cycliques du plan. La cubique est donc circulaire et les tangentes aux points cycliques, c'est-à-dire les asymptotes imaginaires, passent par O. Ce dernier point est donc un foyer singulier de la courbe.

Construisons maintenant l'asymptote réelle. Les points réels P et P′ ne peuvent s'éloigner à l'infini que si M s'éloigne à l'infini sur (Δ); à la limite le cercle de

Fig. 1.



centre M se réduit à la droite AA_1 et à la droite de l'infini; le point P′ a pour limite le point Φ, intersection de AA_1 avec la parallèle à (Δ) menée par O; le point P est à l'infini, mais les deux points P et P′ étant toujours à la même distance de (Δ) l'asymptote réelle est symétrique de $O\Phi$ par rapport à (Δ). Elle passe par σ que nous appellerons le *point de section*.

Forme de la courbe. — Les deux points P et P′ étant de part et d'autre de (Δ), et la distance MP n'étant jamais nulle, ne peuvent venir se confondre quand OM tourne autour de O. La cubique se compose donc de deux séries continues de points : elle est *bipartite*.

Elle comprend une branche infinie coupant son asymptote (Δ') en σ et d'un ovale qui passe par O et Φ. Des deux points A et A_1 l'un est sur la branche infinie, l'autre sur l'ovale.

Démontrons maintenant le théorème suivant :

Théorème. — *Toute cubique circulaire dont les asymptotes imaginaires se coupent sur la courbe est une cubique strophoïdale.*

Remarquons d'abord que $A\sigma$ est parallèle à $D\mu$ et, par suite, perpendiculaire à OA. De même σA_1 est perpendiculaire à OA_1. Supposons que, les points O et σ et la droite (Δ) restant fixes, le point A se déplace sur le cercle de diamètre $O\sigma$. A chaque position de A correspond une cubique strophoïdale et toutes ces cubiques ont neuf points communs, savoir : quatre points de contact qui sont les trois points à l'infini et le point O, puis le point σ. Elles forment donc un faisceau linéaire qui peut être défini par les deux cubiques suivantes : 1° la cubique formée par les deux droites isotropes issues de O et par (Δ') ; 2° la cubique formée par la droite de l'infini comptée deux fois et par $O\sigma$.

Cela posé, soit une cubique circulaire ayant un foyer singulier en O, pour asymptote réelle (Δ') et coupant son asymptote en σ. En appliquant aux trois points à l'infini le théorème bien connu sur les tangentiels de trois points en ligne droite, on voit que la tangente en O est $O\sigma$ et, par suite, la cubique considérée fait partie du faisceau linéaire examiné plus haut.

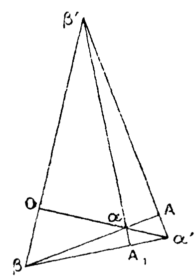
Tangentes aux points A *et* A_1. — La tangente en A est la limite de AP quant M vient en B; or le triangle MAP étant isoscèle, AP est perpendiculaire à la bissectrice de $\widehat{PMA}$; quand M vient en B cette bissectrice a pour limite BA; donc la limite de AP est $A\sigma$. De même la tangente en A_1 est $A_1\sigma$. Du point σ on peut mener à la cubique quatre tangentes réelles, savoir : σA, σA_1, σO et l'asymptote (Δ'). Par suite, de tout point de la branche infinie on peut mener à la courbe quatre tangentes réelles : deux ont leurs points de contact sur la branche infinie, deux sur l'ovale.

Tangentes aux points P *et* P'. — Considérons un rayon ON voisin de OM et soient Q et Q' les points du lieu situés sur ce rayon (le lecteur est prié de faire la figure). Les deux rayons OM, ON coupent l'asymptote en R et S. Dans le triangle ORS, les deux droites PQ et P'Q' sont deux transversales réciproques : elles coupent donc l'asymptote en deux points symétriques par rapport au milieu de RS. Lorsque N vient coïncider avec M, les droites PQ, P'Q' deviennent les tangentes en P et P'; par suite, ces deux tangentes coupent l'asymptote en deux points symétriques par rapport à R.

Tangentes parallèles à (Δ). — Une droite quelconque parallèle à (Δ) coupe la cubique en deux points variables P et Q; si OP et OQ coupent la courbe en P' et Q' la droite P'Q' est symétrique de PQ par rapport à (Δ). Les deux rayons OP, OQ sont donc deux rayons homologues d'un faisceau involutif dont les rayons doubles passent par les points de contact des tangentes parallèles à (Δ). Or $O\sigma$ et $O\Phi$, OA et OA_1 forment deux couples de rayons homologues; ces deux couples forment deux angles ayant la même bissectrice; donc deux rayons homologues quelconques sont également inclinés sur la bissectrice de $\widehat{AOA_1}$ et les rayons doubles sont les bissectrices de cet angle et de l'angle adjacent supplémentaire.

Soient $O\alpha\alpha'$, $O\beta\beta'$ ces deux bissectrices (*fig.* 2); deux des points de contact, α' et β' par exemple, sont

Fig. 2.



sur la branche infinie, les deux autres sur l'ovale. En appliquant le théorème sur les tangentiels de trois points en ligne droite on voit que $\alpha\beta$ coupe la cubique en un troisième point qui a pour tangentiel σ; or ce troisième point n'est ni O ni le point à l'infini, c'est d'ailleurs un point de la branche infinie, donc c'est le point A. On verra de même que $\alpha'\beta'$ passe par A tandis que $\alpha\beta'$ et $\beta\alpha'$ passent par A_1.

Une propriété commune à toutes les cubiques circulaires nous apprend que la cubique considérée est anallagmatique par rapport à l'un quelconque des quatre points $\alpha\beta\alpha'\beta'$. On a donc, par exemple, $\overline{\alpha\beta}.\overline{\alpha A} = \overline{\alpha O}.\overline{\alpha\alpha'}$. Donc les quatre points $\beta A O \alpha'$ sont sur un cercle et $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ sont deux droites rectangulaires. Par suite, trois quelconques des points de contact $\alpha\beta\alpha'\beta'$ sont les sommets d'un triangle dont le point de concours des hauteurs est le quatrième point.

Points conjugués. — On sait qu'on appelle points conjugués sur une cubique deux points ayant le même tangentiel ; dans une cubique n'ayant pas de points singuliers, il y a trois genres de points conjugués ; dans ce qui va suivre nous ne parlerons que des points conjugués de même genre que les points cycliques. On démontre facilement que, dans toute cubique, deux couples de points conjugués du même genre et leurs tangentiels sont sur une conique et réciproquement, si deux couples de points conjugués et leurs tangentiels sont sur une conique, les deux couples sont du même genre :

Or, dans une cubique strophoïdale, les deux points cycliques ont pour tangentiel commun le point O ; donc :

Le cercle qui passe par deux points conjugués et par leur tangentiel passe par O.

Théorème. — *Le conjugué d'un point* P *est le point* Q' *situé sur la parallèle à* (Δ) *menée par le point* P', *intersection de* OP *avec la courbe.*

En effet, appliquons le théorème sur les tangentiels de trois points en ligne droite aux trois points de la droite $P'Q'$ (le troisième est à l'infini) et aux trois points OPP' ; on en déduit facilement que les points P et Q' ont le même tangentiel. Lorsque OP vient coïncider avec OA, OQ' vient coïncider avec OA_1 ; or A et A_1 sont conjugués du même genre que les points cycliques, puisque le cercle déterminé par AA_1 et σ passe aussi par O. Les points P et Q' sont donc conjugués.

Conséquence. — Le point O a pour conjugué le point réel à l'infini, Φ a pour conjugué σ. Les trois couples de points conjugués : $(O\infty)$, $(\Phi\sigma)$, (AA_1) permettent de construire la courbe d'une manière discontinue par l'application du théorème suivant, dû à Hesse :

THÉORÈME. — *Si* (aa') (bb') *sont deux couples de points conjugués du même genre, les droites* ab', ba' *et les droites* aa', bb' *se coupent en deux points conjugués du même genre.*

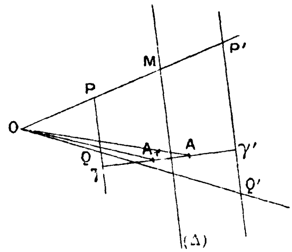
Autre mode de génération. — Considérons un rayon OPP' coupant la courbe en P et P'; soient Q' et Q les conjugués de P' et P; les droites PQ, $P'Q'$ sont parallèles à (Δ). Le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère $PQQ'P'$ est une cubique circulaire dont les six sommets du quadrilatère forment trois couples de points conjugués et les deux points cycliques sont conjugués du même genre. Ce lieu coïncide donc avec la cubique considérée; donc :

Toute cubique strophoïdale peut être, d'une infinité de manières, considérée comme le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère.

Toutes ces coniques ont leur centre sur (Δ); les deux foyers de l'une d'elles sont donc équidistants de (Δ) et comme ils ne sont pas en ligne droite avec le point O, ce sont deux points conjugués. En particulier A et A_1 sont deux foyers d'une conique inscrite dans le quadrilatère $PQQ'P'$; les sommets de la conique situés sur l'axe focal sont les points γ et γ' intersections de AA_1 avec PQ et $P'Q'$ (*fig.* 3). Cette remarque nous permet de construire les points d'intersection de la cubique avec une droite parallèle à (Δ). Le problème revient, en effet, à mener du point O les tangentes à une conique dont on connaît l'axe focal $\gamma\gamma'$ et les deux foyers A et A_1. Elle nous permet encore de donner le mode de génération suivant des cubiques strophoïdales :

Soient un système de coniques homofocales de foyers A et A_1 et un point O du plan; le lieu des points com-

Fig. 3.



muns aux tangentes à une conique issues du point O et des tangentes aux extrémités de l'axe focal est une cubique strophoïdale dont O est le foyer singulier.

On obtient immédiatement cette propriété en remarquant (*fig.* 3) que, si PP'QQ' sont les points donnés par l'une des coniques, on a

$$\widehat{PAP'} = 90^\circ$$

et, par suite,

$$MP = MP' = MA.$$

Tangente en un point quelconque. — Soient P un point de la courbe, Q le point situé sur la parallèle à l'asymptote menée par P, et Q' le troisième point situé sur OQ; P et Q' sont conjugués; soit R un point voisin de P; soit RS la parallèle à (Δ) menée par R. Nous avons vu que P et Q' sont les foyers d'une conique tangente à RO et RS; donc, d'après une propriété connue des coniques, on a

$$\widehat{ORQ'} = \widehat{PRS}.$$

Faisons tendre R vers P et soit PV la direction limite de RP, c'est à-dire la tangente en P; on a

$$\text{limite } \widehat{ORQ'} = \widehat{OPQ'},$$

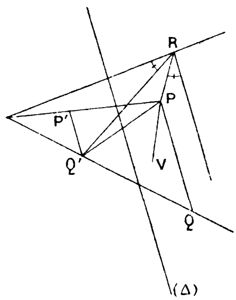
$$\text{limite } \widehat{PRS} = \widehat{VPQ};$$

donc

$$\widehat{OPQ'} = \widehat{VPQ},$$

ce qui montre que les angles $\widehat{OPQ}$ et $\widehat{VPQ'}$ ont la même

Fig. 4.



bissectrice; il en résulte une construction simple de la tangente en P (*fig.* 4).

Cette construction nous permet de déterminer le tangentiel d'un point en prenant l'intersection de la tangente en ce point avec la tangente au point conjugué ou encore avec le cercle passant par le point, par son conjugué et par O.