Questions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 571-575

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__571_0>

QUESTIONS.

1876. Pour quelles valeurs de x_1 et x_2, la somme

$$\frac{1}{x_1(n-1)+x_2}+\frac{1}{x_1(n-2)+2x_2}+\ldots+\frac{1}{x_1+(n-1)x_2}$$

a-t-elle une limite, quand n grandit indéfiniment?

Calculer cette limite. (E. WEILL.)

1877. On donne un triangle CAB. Sur AB, AC comme demi-diamètres conjugués, on construit une ellipse (E); sur AB, BC on construit pareillement une seconde ellipse (E'). Etudier les intersections des deux ellipses (E), (E').

(C.-A. LAISANT.)

1878. On considère une ellipse E et le cercle C concentrique à l'ellipse ayant pour diamètre la somme des axes de E. D'un point M quelconque de C on mène les tangentes à E dont les points de contact sont P et Q. Soit (Π) la parabole tangente en P et Q aux droites MP et MQ.

1° Le lieu du foyer des paraboles (Π) est l'ellipse E;

2° Les paraboles (Π) sont tangentes à la développée de l'ellipse E;

3° La directrice des paraboles (Π) enveloppe un cercle;

4° L'axe des paraboles (Π) enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. (E.-N. BARISIEN.)

1879. La tangente en un point M d'une conique à centre, coupe les axes en A et B, la normale au même point les rencontre en A' et B'; soit m le centre de courbure du point M. Démontrer que

$$\frac{mA'}{mB'}=\frac{MA}{MB},$$

et déduire de cette propriété une construction simple du centre de courbure. (DROZ-FARNY.)

1880. Les intersections des plans principaux d'une quadrique avec la normale en un point M de cette quadrique déterminent trois régions sur cette normale. La région qui comprend le point M ne contient aucun des centres de courbure principaux correspondant à ce point M. Pour un point P de cette région, PM est la plus courte distance du point P à la quadrique, si celle-ci n'est pas un ellipsoïde. Dans le cas de l'ellipsoïde, la région contenant le point M se compose de deux segments infinis; pour un point P situé dans le même segment que M, PM est la plus courte distance; pour un point P situé dans l'autre segment, PM est la plus grande distance. Pour les points P situés dans les autres régions de la normale, PM n'est ni la plus petite ni la plus grande des normales menées du point P à la quadrique. (A. PELLET.)

1881. Les pieds des quatre perpendiculaires abaissées du centre d'un hyperboloïde équilatère sur les faces d'un tétraèdre conjugué sont situés dans un même plan.

(A. PELLET.)

1882. Étant données deux paraboles focales l'une de l'autre dans l'espace, la surface réglée engendrée par une droite s'appuyant sur ces deux paraboles et parallèle à un plan passant par l'axe commun des paraboles est un conoïde droit.

(A. PELLET.)

1883. Par chaque point de l'espace on mène une perpendiculaire sur le plan polaire de ce point par rapport à une quadrique donnée. On a ainsi un complexe. Les droites du complexe situées dans un plan enveloppent une conique. Trouver le lieu des foyers de cette conique pour les plans parallèles à un plan donné. (A. PELLET.)

1884. Dans le plan, une courbe de troisième classe C et une cubique C′ pouvant se correspondre ainsi : l'un des trois systèmes de coniques S qui admettent C pour jacobienne tangentielle se compose des coniques inscrites à l'un des trois systèmes de quadrilatères inscrits à S′, et l'un des trois systèmes de coniques S′ qui admettent C′ pour jacobienne ordinaire se compose des coniques circonscrites à l'un des trois systèmes de quadrangles circonscrits à C. On peut se donner C′, par exemple, et il y a alors trois courbes C.

(G. FONTENÉ.)

1885. Les hexaèdres complets conjugués à quatre quadriques dépendent de deux paramètres. Démontrer que les plans des faces sont osculateurs à une cubique gauche Γ, et que, si t est un paramètre qui correspond uniformément aux plans osculateurs de la courbe, les six valeurs de t pour les divers hexaèdres sont données par une équation de la forme

$$f(t) + \lambda\,\varphi(t) + \mu\,\psi(t) = 0,$$

λ et μ variant. (G. FONTENÉ.)

1886. Si l'on inscrit dans une circonférence un quadrilatère quelconque $abcd$, et un rectangle $efgh$, dont les diagonales eg et fh sont perpendiculaires aux diagonales ac et bd du quadrilatère $abcd$, les quatre côtés de deux quadrilatères se coupent en seize points, qui sont, de quatre en quatre, sur des lignes droites I, J, K, L. La polaire du point d'intersection de deux quelconques de ces quatre droites par rapport à la circonférence passe par l'intersection des deux autres droites.

(L. KLUG.)

1887. Dans un tronc de cône de révolution, soient B le rayon de la grande base, b celui de la petite, et soit h la hauteur du tronc. Un plan mené tangentiellement à la petite base par le centre de la grande détache du tronc de cône un onglet. Si l'on désire connaître le volume de cet onglet, c'est-à-dire la formule de ce volume en fonction de B, b, h, et qu'à cet effet on décompose l'onglet en éléments par des plans parallèles aux deux bases du tronc de cône, on se trouve en présence d'une opération longue et pénible.

On propose de trouver une marche qui, par un très léger calcul, ramène tout à l'intégration d'une différentielle unique et de la forme $\sqrt{a + bx + cx^2}\,dx$. (CH. RUCHONNET.)

1888. Lorsqu'une transversale $\alpha\beta\gamma$, à un triangle ABC, passe par le centre du cercle circonscrit à ce triangle, les trois cercles, ayant pour diamètres les diagonales du quadrilatère complet $\mathrm{AC}\alpha\gamma\beta\mathrm{B}$, se coupent en deux points qui sont situés, l'un sur le cercle circonscrit au triangle ABC, l'autre sur le cercle des neuf points relatifs au même triangle. (C. BLANC.)

1889. Lorsque deux triangles, l'un inscrit dans l'autre, sont involutifs, tout système de trois droites passant par les sommets du triangle circonscrit détermine, sur les côtés de l'inscrit, trois points qui forment six segments involutifs.

(C. BLANC.)

1890. Lorsque trois triangles sont homologiques deux à deux, si, dans le triangle formé par les trois axes d'homologie, un sommet est un centre d'homologie, chacun des deux autres sommets est aussi un centre d'homologie. (C. BLANC.)

1891. Dans un pentagone, les lignes menées par le milieu d'un côté et par le milieu de la droite qui joint les intersections des diagonales issues des extrémités de ce côté sont concourantes.

1892. Dans un pentagone, les cercles de neuf points, relatifs aux triangles formés par deux côtés consécutifs et une diagonale, se coupent, deux à deux, en 5 points qui sont sur un même cercle. (C. BLANC.)

1893. On donne une parabole P représentée par $y^2 - 2px = 0$; on considère les paraboles Q qui touchent OX en O et dont les directrices sont tangentes à P.

1° Former l'équation générale des paraboles Q, démontrer que par chaque point du plan il passe trois de ces paraboles, déterminer la région où sont situés les points tels que deux des trois paraboles qui y passent soient confondues;

2° Former l'équation de l'axe d'une parabole Q, en déduire qu'il passe trois axes par chaque point du plan, trouver le lieu des points tels que deux axes correspondants soient rectangulaires;

3° Trouver le lieu des foyers des paraboles Q;

4° Former l'enveloppe des tangentes aux sommets.

(CH. BIOCHE.)

1894. On donne les trois surfaces du 2e degré

$$Q_1 = yz + a(z - y) + 3a^2 = 0,$$
$$Q_2 = zx + a(x - z) + 3a^2 = 0,$$
$$Q_3 = xy + a(y - x) + 3a^2 = 0;$$

1° Démontrer que ces surfaces passent par une même cubique gauche;

2° Trouver le lieu des centres des quadriques passant par cette cubique;

3° Trouver les droites situées sur ce lieu. (CH. BIOCHE.)

1895. On considère l'hyperbole équilatère (H) ayant pour sommet les foyers d'une ellipse (E). D'un point quelconque P de cette hyperbole, on abaisse une des normales dont le pied est en A. Du centre O de (E) on abaisse la perpendiculaire OS sur la tangente en A et OQ sur la normale en A. On obtient ainsi le rectangle OQAS. Montrer que le produit des aires des quatre rectangles analogues correspondant aux pieds des quatre normales est une quantité constante.

(E.-N. Barisien.)

1896. Étant données deux tangentes rectangulaires à l'ellipse dont les points de contact sont A et B, du centre O de l'ellipse on abaisse les perpendiculaires OS et OS′ sur les tangentes en A et en B, et les perpendiculaires OQ et OQ′ sur les normales en A et B. Quelle que soit la position des tangentes, on a

$$OS \times OQ = OS' \times OQ' = \text{constante.}$$

(E.-N. Barisien.)

1897. Si l'on considère toutes les hyperboles équilatères qui passent par deux points donnés et dont les asymptotes ont une direction fixe :

1° Le lieu des centres de ces hyperboles est une droite;

2° Le lieu des sommets se compose d'une ellipse et d'une hyperbole;

3° Le lieu des foyers se compose aussi d'une ellipse et d'une hyperbole concentriques. (E. Barisien.)

1898. Soient ABCD un quadrilatère; A′, B′, C′, D′ les centres des cercles inscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC respectivement; α, β, γ, δ les périmètres de ces triangles. Démontrer que le centre de gravité des poids α, β, γ, δ placés en A, B, C, D est le même que celui des mêmes poids placés en A′, B′, C′, D′ respectivement. (C.-A. Laisant.)

1899. On donne un point A et une droite D située à une distance d du point A. Une longueur $BC = \frac{2d}{\sqrt{3}}$ se déplace sur D. Montrer que la droite d'Euler du triangle ABC enveloppe une parabole. (E.-N. Barisien.)

1900. On considère deux points fixes A et B et un cercle décrit du milieu O de AB comme centre avec un rayon égal à $OA\sqrt{3}$. Montrer que pour un point C quelconque de ce cercle le triangle ABC jouit de cette propriété que l'axe radical de son cercle des neuf points est parallèle à la médiane OC.

(E.-N. Barisien.)