

C. LAMIONI

Sur deux théorèmes de géométrie différentielle

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 19 (1900), p. 557-560

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__557_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[051]

SUR DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE;

PAR M. C. LAMIONI.

M. Bianchi, en partant de la formule qui exprime la deuxième courbure d'une ligne géodésique en un point M d'une surface (1), a démontré les deux théorèmes suivants :

1° *Si une ligne de courbure est géodésique, elle est plane.*

(1) Voir BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, p. 161.

2° Chaque ligne géodésique plane est ligne de courbure.

Le but de cette Note est de donner une démonstration directe et très simple de ces deux théorèmes.

1. Soit L une ligne de courbure et géodésique située sur une surface; les coordonnées

$$x, y, z$$

d'un point quelconque de L peuvent être exprimées en fonction de l'arc s de L.

Soient

$$X, Y, Z$$

les cosinus directeurs de la normale à la surface;

$$\cos \xi, \cos \eta, \cos \zeta$$

les cosinus de la normale principale de L; d'après l'hypothèse que nous avons posée, nous aurons ⁽¹⁾

$$(1) \quad \frac{dx}{ds} : \frac{dy}{ds} : \frac{dz}{ds} = \frac{dX}{ds} : \frac{dY}{ds} : \frac{dZ}{ds},$$

$$(2) \quad X = \cos \xi, \quad Y = \cos \eta, \quad Z = \cos \zeta.$$

En dérivant par rapport à s les relations (2) et en tenant compte des formules de Serret, on obtient

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dX}{ds} = -\frac{\cos \alpha}{\rho} - \frac{\cos \lambda}{T}, \\ \frac{dY}{ds} = -\frac{\cos \beta}{\rho} - \frac{\cos \mu}{T}, \\ \frac{dZ}{ds} = -\frac{\cos \gamma}{\rho} - \frac{\cos \nu}{T}. \end{cases}$$

Si nous exprimons par $\frac{1}{k}$ la valeur commune des rap-

(1) Voir BIANCHI, *Lezioni. etc.*, p. 98.

ports

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{ds},$$

$$\frac{dX}{ds} = \frac{dY}{ds} = \frac{dZ}{ds},$$

les formules (3), en tenant compte de la relation (1) et de l'identité

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \gamma,$$

nous donneront

$$(4) \quad \begin{cases} k \cos \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\rho} - \frac{\cos \lambda}{T}, \\ k \cos \beta = -\frac{\cos \beta}{\rho} - \frac{\cos \mu}{T}, \\ k \cos \gamma = -\frac{\cos \gamma}{\rho} - \frac{\cos \nu}{T}. \end{cases}$$

En multipliant respectivement les équations (4) par $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$

et en ajoutant, on obtient

$$\frac{1}{T} = 0,$$

d'où il suit que la ligne L est bien une ligne plane.

2. Pour la démonstration du deuxième théorème, il faut remarquer que, d'après la nouvelle hypothèse

$$\frac{1}{T} = 0,$$

les formules (3) (vérifiées aussi dans ce cas) nous donneront

$$\frac{dX}{ds} = \frac{dY}{ds} = \frac{dZ}{ds} = -\rho,$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = \frac{dz}{ds}$$

d'où l'on tire

$$dX : dY : dZ = dx : dy : dz;$$

proportion caractéristique que l'on obtient en se déplaçant le long d'une ligne de courbure, et, par suite, la ligne L est bien ligne de courbure. c. q. f. n.