Nouvelles annales de mathématiques

C. Lamioni

Sur deux théorèmes de géométrie différentielle

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 557-560

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__557_1>

[O51]

SUR DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE;

Par M. C. LAMIONI.

M. Bianchi, en partant de la formule qui exprime la deuxième courbure d'une ligne géodésique en un point M d'une surface ([1]), a démontré les deux théorèmes suivants :

1° *Si une ligne de courbure est géodésique, elle est plane.*

([1]) *Voir* Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, p. 161.

2° *Chaque ligne géodésique plane est ligne de courbure.*

Le but de cette Note est de donner une démonstration directe et très simple de ces deux théorèmes.

1. Soit L une ligne de courbure et géodésique située sur une surface; les coordonnées

$$x,\quad y,\quad z$$

d'un point quelconque de L peuvent être exprimées en fonction de l'arc s de L.

Soient

$$X,\quad Y,\quad Z$$

les cosinus directeurs de la normale à la surface;

$$\cos\xi,\quad \cos\eta,\quad \cos\zeta$$

les cosinus de la normale principale de L; d'après l'hypothèse que nous avons posée, nous aurons [1]

$$\frac{dx}{ds} : \frac{dy}{ds} : \frac{dz}{ds} = \frac{dX}{ds} : \frac{dY}{ds} : \frac{dZ}{ds}, \tag{1}$$

$$X = \cos\xi, \qquad Y = \cos\eta, \qquad Z = \cos\zeta. \tag{2}$$

En dérivant par rapport à s les relations (2) et en tenant compte des formules de Serret, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX}{ds} &= -\frac{\cos\alpha}{\rho} - \frac{\cos\lambda}{T}, \\ \frac{dY}{ds} &= -\frac{\cos\beta}{\rho} - \frac{\cos\mu}{T}, \\ \frac{dZ}{ds} &= -\frac{\cos\gamma}{\rho} - \frac{\cos\nu}{T}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Si nous exprimons par $\frac{1}{k}$ la valeur commune des rap-

---

(1) *Voir* Bianchi, *Lezioni, etc.*, p. 98.

ports

$$\frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dX}{ds}} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dY}{ds}} = \frac{\frac{dz}{ds}}{\frac{dZ}{ds}},$$

les formules (3), en tenant compte de la relation (1) et de l'identité

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \qquad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma,$$

nous donneront

$$(4) \qquad \begin{cases} k\cos\alpha = -\dfrac{\cos\alpha}{\rho} - \dfrac{\cos\lambda}{T}, \\ k\cos\beta = -\dfrac{\cos\beta}{\rho} - \dfrac{\cos\mu}{T}, \\ k\cos\gamma = -\dfrac{\cos\gamma}{\rho} - \dfrac{\cos\nu}{T}. \end{cases}$$

En multipliant respectivement les équations (4) par

$$\cos\lambda, \quad \cos\mu, \quad \cos\nu$$

et en ajoutant, on obtient

$$\frac{1}{T} = 0,$$

d'où il suit que la ligne L est bien une ligne plane.

2. Pour la démonstration du deuxième théorème, il faut remarquer que, d'après la nouvelle hypothèse

$$\frac{1}{T} = 0,$$

les formules (3) (vérifiées aussi dans ce cas) nous donneront

$$\frac{\frac{dX}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\frac{dY}{ds}}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\frac{dZ}{ds}}{\frac{dz}{ds}} = -\rho,$$

d'où l'on tire

$$dX : dY : dZ = dx : dy : dz ;$$

proportion caractéristique que l'on obtient en se déplaçant le long d'une ligne de courbure, et, par suite, la ligne L est bien ligne de courbure. C. Q. F. D.