STUYVAERT

Sur une gerbe de cubiques gauches

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 548-557

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__548_0>

[M³5j]

SUR UNE GERBE DE CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. STUYVAERT,
Professeur à Gand.

Tandis que les coniques ayant un double contact constituent un cas particulier d'un faisceau ponctuel, dont elles possèdent les propriétés, les cubiques gauches passant par deux points et y possédant mêmes tangentes et mêmes plans osculateurs s'écartent beaucoup de celles qui ont cinq points communs (¹).

Les unes et les autres constituent bien une gerbe, et chaque point de l'espace détermine une courbe du système, comme von Staudt l'a montré le premier (²); mais là s'arrête à peu près l'analogie.

M. R. Sturm (³) a d'abord attiré l'attention sur la gerbe qui nous occupe. Il a fait voir qu'un tétraèdre d'osculation ABCD, lorsqu'on ne spécifie pas lesquelles de ses arêtes sont tangentes, corde, etc., appartient à douze gerbes de cubiques gauches.

A son exemple, nous ne considérons que les courbes qui passent par A et C, y touchent respectivement AB et CD, et y osculent les plans ABD, CBD; par suite, AD et CB sont, pour toutes ces cubiques, deux droites associées de Cremona.

(¹) Cette dernière gerbe a été étudiée par MM. Reye (*Zeitsch. f. Math. u. Phys.*, t. XIII), R. Sturm (*Journ. de Crelle*, t. 79), Königs [*Nouv. Ann. de Math.* (3ᵉ série), t. II].

(²) *Geometrie der Lage, Beitrage*, § 464.

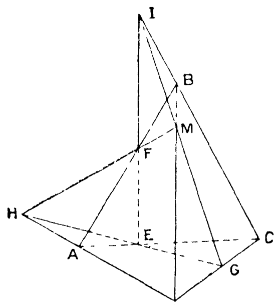
(³) *Math. Annalen*, t. XXVI, p. 465-508.

M. Heinrichs (¹) a publié une étude approfondie du sujet, en se servant de la Géométrie projective. Après ce travail très complet, il ne reste guère de résultat important à trouver, mais on peut essayer d'autres méthodes pour établir la théorie. Dans un travail récemment soumis à l'Académie de Belgique, nous proposons une légère modification à la représentation paramétrique des courbes gauches du troisième ordre, de manière à la rendre applicable à la gerbe de cubiques ayant même tétraèdre d'osculation.

Ici, nous essayerons de retrouver quelques-unes des propriétés de ce système en utilisant la Géométrie analytique plane.

1. Un plan ν ne passant par aucun sommet du tétraèdre ABCD (*fig.* 1) coupe respectivement en E,

Fig. 1.



F, G, H, I, M les arêtes AC, AB, CD, AD, BC, BD de ce dernier et contient trois points P, Q, R d'une des courbes de la gerbe.

Le cône de sommet A perspectif à cette cubique coupe

(¹) E. Heinrichs, *Ueber den Bundel derjenigen kubischen Raumcurven, welche*, etc. (*Diss. Munster*, 1887).

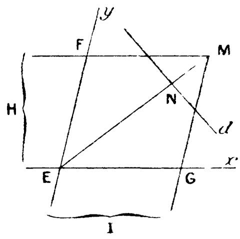
le plan ν suivant une conique passant par P, Q, R, E, F et tangente en E à EG et en F à FH.

La trace, sur ν, du cône de sommet C perspectif à la cubique est une conique passant par P, Q, R, touchant EF en E et GI en G.

En faisant varier la cubique de la gerbe, on engendre, dans le plan ν, deux faisceaux de coniques ayant un double contact et situés de manière que l'une des tangentes communes de l'un des systèmes est corde de contact de l'autre et inversement.

La généralité du raisonnement ne sera pas restreinte si nous supposons les points I et H à l'infini, car le principe d'homographie permettra d'étendre les résultats. En prenant ensuite EG et EF pour axes de coor-

Fig. 2.



données, nous pourrons représenter IG et FH respectivement par les équations

$$x = a, \qquad y = b.$$

Dès lors, le problème est ramené à la recherche des propriétés des ternes de points P, Q, R qui, avec l'origine E, constituent l'intersection de deux courbes quelconques des systèmes représentés par les équations

$$x(x - a) = \lambda y^2,$$
$$y(y - b) = \mu x^2.$$

dont la première se rapporte aux coniques ayant un double contact en E et G.

Remarquons en passant que les points P, Q, R communs à deux des courbes considérées appartiennent aussi à une conique passant par H, E, G, I, car les équations précédentes donnent, par multiplication,

$$(x-a)(y-b)=\lambda\mu\, xy,$$

et cette relation représente une hyperbole à asymptotes parallèles aux axes coordonnés et passant par F et G.

2. Toute la question est de préciser la liaison des points P, Q, R.

Or, un point $P(x', y')$ détermine une conique de chacun des deux systèmes considérés ci-dessus; ces deux courbes ont respectivement pour équation

$$x(x-a)y'^2=x'(x'-a)y^2, \tag{1}$$

$$y(y-b)x'^2=y'(y'-b)x^2. \tag{2}$$

Multiplions, par bx' et ay', respectivement les termes de la première et de la seconde égalité et soustrayons; nous obtenons, après quelques calculs,

$$(xy'-x'y)[(bx'+ay'-ab)(xy'+x'y)-abx'y']=0.$$

Cette équation représente deux droites passant par E, P, Q, R; et comme le premier facteur, égalé à zéro, représente EP, on a, en faisant abstraction de ce facteur, l'équation de la droite QR.

Celle-ci est parallèle à la droite

$$xy'+x'y=0,$$

c'est-à-dire à la conjuguée harmonique de EP par rapport aux axes; donc, dans le cas général, les droites EP, QR déterminent, sur HI, deux points conjugués harmoniques par rapport à H et I.

Or on sait que les points d'une droite HI alignés, avec les sommets d'un triangle PQR, sur un point fixe E, et les intersections de HI avec les côtés opposés de PQR sont en involution. Nous voyons ici que les involutions, déterminées de cette façon par les triangles PQR relatifs à toutes les cubiques de la gerbe, se confondent et ont H et I pour points doubles.

3. Pour qu'une courbe du système soit tangente au plan ν, il faut que deux des points P, Q, R coïncident, ou que QR passe par P; cette condition s'exprime par l'égalité

$$bx' + ay' = \frac{3ab}{2}. \tag{3}$$

Le lieu des points de contact du plan ν avec les cubiques de la gerbe auxquelles il est tangent est une droite.

Appelons cette droite d; nous y reviendrons bientôt. Remarquons auparavant que les points P, Q, R jouent évidemment le même rôle et qu'en faisant coïncider P avec un des deux autres points, nous n'enlevons rien à la généralité de la solution qui précède.

Nous découvrirons une autre propriété en exprimant que les points Q et R se confondent, ou que la droite QR, représentée par

$$(ay' + bx' - ab)(xy' + x'y) - abx'y' = 0 \tag{4}$$

touche l'une des coniques (1) ou (2), par exemple celle qui a pour équation

$$x(x-a)y'^2 - x'(x'-a)y^2.$$

En posant

$$s = \frac{x'y'}{ay' + bx' - ab},$$

ou peut écrire l'égalité (4) sous la forme

$$xy' + x'y - abs = 0.$$

La condition de contact est alors

$$\begin{vmatrix} y'^2 & 0 & -\dfrac{ay'^2}{2} & y' \\ 0 & -x'(x'-a) & 0 & x' \\ -\dfrac{ay'^2}{2} & 0 & 0 & -abs \\ y' & x' & -abs & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$(5) \qquad (ay' + bx' - ab)^2 = 4ab(x'-a)(y'-b).$$

Si x' et y' sont les coordonnées courantes, cette relation représente une conique S, lieu du point P, tel que les points correspondants Q et R coïncident.

Les cubiques gauches de la gerbe qui touchent un plan ν le coupent encore sur une conique.

La conique S est une parabole dont l'axe est parallèle à EM et qui touche MG en G et MF en F; elle est tangente aussi à la droite d dont l'équation

$$(3) \qquad ay' + bx' = \frac{3ab}{2}$$

a été trouvée plus haut; cette droite joint les milieux de FM et GM; son point de contact avec S est au milieu N du segment déterminé sur elle par les axes coordonnés ou par FM et GM.

Dans le cas général, S touche HI au conjugué harmonique, relativement à H et I, du point de rencontre de FG et HI; le point N est toujours à l'intersection de d et de EM.

Si le point P est sur d, l'un des autres points, Q par exemple, coïncide avec P, et la droite correspondante QR a pour équation

$$(4) \qquad (ay' + bx' - ab)(yx' + xy') - abx'y' = 0,$$

avec la relation

$$(3) \qquad ay' + bx' = \frac{3ab}{2}.$$

Cette droite coupe la conique S en deux points, mais il est évident qu'un seul de ceux-ci est le point R.

Pour établir la distinction, qui sera d'ailleurs précisée par ce qui va suivre, on peut observer dès à présent que ce point R doit se trouver sur une courbe déterminée de chacun des deux faisceaux considérés au début.

Si l'on cherche l'enveloppe de la droite mobile représentée par l'équation (4), ses coefficients étant liés par la relation (3), on obtient la conique

$$(ay + bx - 3ab)^2 = 4abxy.$$

C'est encore une parabole T touchant d en N et, par suite, tangente, en ce point, à la conique S; T touche les axes en des points $x = 3a$, $y = 3b$.

Dans le cas général, nous pouvons énoncer la propriété suivante, qui s'établit d'ailleurs très facilement aussi par la Géométrie projective :

La droite qui joint un point P *de d au point correspondant* R *de la conique* S *enveloppe une conique* T *ayant avec* S *un double contact, en* N *et sur la droite* HI.

4. Si l'on veut chercher directement l'enveloppe des tangentes aux cubiques de la gerbe qui touchent le plan ν, c'est-à-dire des droites QR représentées par

$$(ay' + bx' - ab)(yx' + xy') - abx'y' = 0,$$

les coefficients x', y' (coordonnées de P) étant liés par la condition

$$(ay' + bx' - ab)^2 = 4ab(x' - a)(y' - b),$$

les calculs sont assez longs. On les évite en posant

$$p = \frac{ay' + bx' - ab}{abx'}, \qquad q = \frac{ay' + bx' - ab}{aby'};$$

p et q sont alors les coordonnées tangentielles de la droite dont on cherche l'enveloppe : on tire de là

$$x' = \frac{abq}{ap + bq - abpq}, \qquad y' = \frac{abp}{ap + bq - abpq}.$$

Substituant dans la condition, on obtient, après avoir simplifié,

$$abpq = 4(1 - bq)(1 - ap),$$

équation représentant une conique ; on l'écrit, en coordonnées ponctuelles,

$$(4ay + 4bx - 3ab)^2 = 16abxy.$$

On reconnaît une ellipse U tangente aux axes coordonnés respectivement en des points

$$x = \frac{3a}{4}, \qquad y = \frac{3b}{4},$$

tangente à d au même point N où cette droite touche S et T, tangente à la parallèle à FG menée par le milieu de EF, tangente enfin aux droites FH et HG.

Dans le cas général, *l'enveloppe des tangentes des cubiques gauches de la gerbe, situées dans le plan ν, est une conique touchant les traces des quatre faces du tétraèdre d'osculation.*

Comme une tangente variable d'une conique coupe quatre tangentes fixes (EF, EG, FM, GM) en quatre points dont le rapport anharmonique est constant; comme, en outre, pour la tangente spéciale d, ce rapport est $\frac{1}{4}$ et ne dépend par conséquent pas de la position du plan ν, on voit que les tangentes à toutes les cubiques de la gerbe coupent les faces du tétraèdre d'osculation en quatre points dont le rapport anharmonique est constamment égal à $\frac{1}{4}$. Ceci démontre le théorème suivant, dû à M. Sturm et précisé par M. Heinrichs, qui a trouvé la valeur $\frac{1}{4}$ du rapport anharmonique.

Les tangentes aux cubiques de la gerbe sont les rayons d'un complexe tétraédral.

5. Le point N, déjà rencontré plusieurs fois, est évidemment le point de contact de la cubique de la gerbe qui oscule le plan ν.

Dans le cas général, on voit donc que si, en trois points A, C, N d'une cubique gauche, on mène les plans osculateurs α, γ, ν : 1° le point M commun à ces plans, le point N et la trace E de la corde AC sur le plan ν sont en ligne droite, c'est-à-dire que M est dans le plan ACN (théorème de Chasles); 2° la droite NME coupant en L la droite HI du plan ν qui s'appuie sur les droites associées AD, CB, on a le rapport anharmonique

$$(\mathrm{MENL}) = -\frac{1}{3}.$$

On voit sans peine que la conique S est la trace, sur ν, de la développable osculatrice, à la cubique gauche qui oscule le plan ν.

Des relations

$$x' = \frac{abq}{ap + bq - abpq}, \qquad y' = \frac{abp}{ap + bq - abpq},$$

on déduit encore : qu'une seule cubique de la gerbe admet pour sécante une droite donnée, ayant pour coordonnées tangentielles p et q; que, si le point $P(x', y')$ décrit une droite, la droite correspondante $QR(p, q)$ enveloppe une conique; que, si QR pivote autour d'un point, P décrit une conïque.

Enfin, on peut établir avec précision la transformation dans laquelle un sommet du triangle PQR répond au côté opposé. Si l'on considère le point P_1, ayant pour coordonnées $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$, on voit immédiatement qu'il correspond à P dans une homologie harmonique, dont le centre est E et dont l'axe a pour équation

$$ay' + bx' = 2ab,$$

c'est-à-dire que cet axe joint le point M au point de rencontre de HI et FG. Quant au point P_1 et à la droite QR, on les déduit l'un de l'autre par la transformation très simple que voici : QR joint les points où HP_1 et IP_1 rencontrent respectivement EF et EG.