Nouvelles annales de mathématiques

E. Iaggi

Sur une nouvelle transcendante qui transforme l'intégrale elliptique de première espèce en une intégrale circulaire

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 537-547

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__537_0>

[F2]

SUR UNE NOUVELLE TRANSCENDANTE QUI TRANSFORME L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE DE PREMIÈRE ESPÈCE EN UNE INTÉGRALE CIRCULAIRE;

PAR M. E. IAGGI.

Considérons la fonction elliptique

$$u = \operatorname{sn} x \qquad (\operatorname{mod} k), \tag{1}$$

dont les substitutions sont

$$\left\{\begin{array}{l} 4mK + 2niK' + x \\ 2(2m+1)K + 2niK' - x \end{array}\right. \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{2}$$

et la fonction circulaire

$$y = \sin \frac{\pi}{2K} x, \tag{3}$$

dont les substitutions sont

$$\left\{\begin{array}{l} 4mK + x \\ 2(2m+1)K - x \end{array}\right. \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{4}$$

Le groupe des substitutions (4) de la fonction y est contenu comme sous-groupe dans le groupe des substitutions (2) de la fonction u. Il s'ensuit que la fonction u de x est une fonction *uniforme* de la fonction y de x [1].

En effet, si l'on se donne une valeur quelconque de y, toutes les valeurs de x qui lui correspondent sont

[1] Ce théorème a été démontré par l'Auteur, pour des substitutions quelconques, dans ses *Recherches sur la Théorie des Fonctions*, Besançon, 1897.

données par les formules

$$\begin{aligned} x &= 4mK + \alpha \\ x &= 2(2m-1)K - \alpha \end{aligned} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

α étant l'une d'elles, et il est clair que les valeurs de $\operatorname{sn} x$ qui en résultent sont toutes égales à $\operatorname{sn}\alpha$; une valeur de y ne détermine donc qu'une valeur de u et, par suite, u est une fonction uniforme de y.

Nous écrirons donc, φ étant une fonction uniforme,

$$\operatorname{sn} x = \varphi\left(\sin \frac{\pi}{2K} x\right),$$

ou simplement

$$u = \varphi(y) \qquad \left(u = \operatorname{sn} x,\ y = \sin \frac{\pi}{2K} x\right).$$

Cette fonction φ jouit de propriétés remarquables que la présente Note a pour but d'indiquer.

1° On a

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = dx, \qquad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2K}\,dx,$$

et, par conséquent,

$$(5) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)}} = \frac{2K}{\pi}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Cette équation, jointe à la condition évidente

$$\varphi(0) = 0,$$

détermine complètement la fonction φ. On peut d'ailleurs écrire

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{2K}{\pi}\frac{\sqrt{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)}}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Cette équation paraît plus compliquée que celle qui détermine u comme fonction de x. Nous verrons cependant

dant que la fonction $\varphi(y)$ a une forme explicite *plus simple* que celle de $\operatorname{sn} x$.

2° On sait que l'intégrale générale de l'équation qui détermine $u = \operatorname{sn} x$ est

$$\operatorname{sn}(x + c),$$

c étant une constante quelconque, c'est-à-dire

$$\frac{u\,\Delta\lambda + \lambda\,\Delta u}{1 - k^2\lambda^2 u^2},$$

où l'on a posé

$$\Delta u = \sqrt{(1 - u^2(1 - k^2 u^2)},$$

et où λ est une constante quelconque ($\lambda = \operatorname{sn} c$).

Il en résulte que l'intégrale générale de l'équation différentielle à laquelle satisfait $\varphi(y)$ est

$$(6)\quad \begin{cases} \varphi\left(y\sqrt{1 - c'^2} + c'\sqrt{1 - y^2}\right) = \dfrac{\varphi(y)\,\Delta\varphi(c') + \varphi(c')\,\Delta\varphi(y)}{1 - k^2\varphi^2(y)\,\varphi^2(c')} \\ \left(c' = \sin\dfrac{\pi}{2K}c\right). \end{cases}$$

C'est ainsi que se transforme, à l'égard de $\varphi(y)$, le théorème d'addition de $\operatorname{sn} x$.

3° Les zéros de $\varphi(y)$ sont les valeurs de

$$y = \sin\frac{\pi}{2K}x$$

obtenues par les valeurs suivantes de x qui sont les zéros de $\operatorname{sn} x$:

$$2mK + 2niK'.$$

Ces zéros sont donc donnés par la formule générale

$$(7)\quad \begin{cases} y = \sin\dfrac{\pi}{2K}(2mK + niK') = \pm\sin ni\pi\dfrac{K'}{K} = \dfrac{q^n - q^{-n}}{2i} \\ \left(q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}\right) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{cases}$$

Ces points sont tous purement imaginaires, à l'exception du point zéro obtenu en annulant n.

Les infinis de $\varphi(y)$ sont les valeurs de y obtenues par les valeurs suivantes de x qui sont les infinis de $\operatorname{sn} x$:

$$2mK + (2n+1)iK'.$$

Ces infinis sont donc donnés par la formule générale

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} y &= \sin\frac{\pi}{2K}[2mK + (2n+1)iK'] = \pm\sin\frac{2n+1}{2}i\pi\frac{K'}{K} \\ &= \frac{q^{\frac{2n+1}{2}} - q^{-\frac{2n+1}{2}}}{2i} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{aligned}\right.$$

Ces points sont tous purement imaginaires.

4° La fonction $\varphi(y)$ est impaire. On a, en effet,

$$\operatorname{sn}(-x) = -\operatorname{sn} x$$

et, par conséquent,

$$\varphi\left(-\sin\frac{\pi}{2K}x\right) = -\varphi\left(\sin\frac{\pi}{2K}x\right),$$

c'est-à-dire

$$(9)\qquad \varphi(-y) = -\varphi(y).$$

5° La fonction $\varphi(y)$ étant uniforme a des substitutions qui la laissent invariable ([1]). La manière dont $\varphi(y)$ est déterminée donne immédiatement ces substitutions. On a, en effet,

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \operatorname{sn} x = \operatorname{sn}(x + 2niK') \\ &= \varphi\left[\sin\frac{\pi}{2K}(x + 2niK')\right] = \varphi(b_n y + a_n\sqrt{1-y^2}) \end{aligned}$$

où

$$a_n = \sin ni\pi\frac{K'}{K} = \frac{q^n - q^{-n}}{2i} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

$$b_n = \cos ni\pi\frac{K'}{K} = \frac{q^n + q^{-n}}{2} \qquad (a_n^2 + b_n^2 = 1).$$

Posant

$$\alpha_n = ia_n, \qquad \beta_n = b_n \qquad (\beta_n^2 - \alpha_n^2 = 1),$$

([1]) *Loc. cit.*

on voit que $\varphi(y)$ admet les substitutions réelles

$$s_n(y) = \beta_n y - \alpha_n \sqrt{y^2 - 1}, \tag{10}$$

qui sont toutes obtenues par répétition ou inversion de la substitution fondamentale

$$\beta_1 y - \alpha_1 \sqrt{y^2 - 1},$$

car on a

$$s_n(y) = s_{n-1}[s_1(y)].$$

Le changement de x en $4K + x$ ou en $2K - x$ ne donne évidemment pas d'autres substitutions pour la fonction $\varphi(y)$.

$\operatorname{sn} x$ n'admettant pas d'autres substitutions que celles dont nous nous sommes servis, $\varphi(y)$ n'admet pas d'autres substitutions que les précédentes.

6° Si, dans l'égalité

$$u = \operatorname{sn} x = \varphi\left(\sin \frac{\pi}{2K} x\right),$$

on change x en $K + x$, on obtient

$$v = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} = \varphi\left(\cos \frac{\pi}{2K} x\right), \tag{11}$$

où v est la fonction dont nous avons parlé déjà dans ce Journal, dont les propriétés corrélatives avec u montrent, mieux que $\operatorname{cn} x$, l'analogie des fonctions elliptiques et des fonctions circulaires, et dont l'emploi serait de nature à simplifier la théorie des fonctions elliptiques ([1]).

L'égalité précédente montre une nouvelle corrélation entre u et v : *u et v sont la même fonction uniforme, l'une de* $\sin \frac{\pi}{2K} x$, *l'autre de* $\cos \frac{\pi}{2K} x$. Ce fait montre bien comment, à l'égard de la période réelle $4K$, u joue le rôle de sinus et v le rôle de cosinus.

On pouvait d'ailleurs se rendre compte directement

([1]) *Sur les fonctions elliptiques de première espèce* (*Nouvelles Annales*, 1898).

que v est une fonction uniforme de $\cos \frac{\pi}{2K} x$ en remarquant que le groupe des substitutions de $\cos \frac{\pi}{2K} x$

$$4mK \pm x \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

est contenu comme sous-groupe dans le groupe des substitutions de la fonction v

$$4mK + 2niK' \pm x \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

7° La fonction $\varphi(y)$ étant telle qu'en posant

$$y = \sin \frac{\pi}{2K} x,$$

on obtient la fonction $u(x)$, et qu'en posant

$$y = \cos \frac{\pi}{2K} x,$$

on obtient la fonction $v(x)$, on pourra obtenir de deux manières différentes son expression en y; on a, en effet,

$$u = \frac{H(x)}{\sqrt{k}\,\Theta(x)} = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \sin \frac{\pi}{2K} x \prod_n \frac{1 - 2q^{2n} \cos \frac{\pi}{K} x + q^{4n}}{1 - 2q^{2n-1} \cos \frac{\pi}{K} x + q^{2(2n-1)}},$$

$$v = \frac{H_1(x)}{\sqrt{k}\,\Theta_1(x)} = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \cos \frac{\pi}{2K} x \prod_n \frac{1 + 2q^{2n} \cos \frac{\pi}{K} x + q^{4n}}{1 + 2q^{2n-1} \cos \frac{\pi}{K} x + q^{2(2n-1)}}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si, dans la première de ces formules, on remplace $\sin \frac{\pi}{2K} x$ par y, ou si dans la seconde on remplace $\cos \frac{\pi}{2K} x$ par y, on a l'expression cherchée de $\varphi(y)$:

$$(12) \qquad \varphi(y) = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}}\, y \prod_n \frac{(1 - q^{2n})^2 + 4q^{2n} y^2}{(1 - q^{2n-1})^2 + 4q^{2n-1} y^2}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sur cette formule on vérifie facilement les propriétés que nous avons démontrées plus haut.

Les fonctions

$$\operatorname{cn} x = \sqrt{1 - \varphi^2(y)}, \qquad \operatorname{dn} x = \sqrt{1 - k^2 \varphi^2(y)}$$

$\left(\text{où } y = \sin \frac{\pi}{2K} x\right)$ peuvent aussi s'exprimer par des formules analogues rationnelles. La formule de la dérivée $\varphi'(y)$ se transforme d'une manière intéressante : on a en effet

$$\varphi(y) = \operatorname{sn} x \qquad \left(y = \sin \frac{\pi}{2K} x\right),$$

d'où

$$\varphi'(y) \frac{\pi}{2K} \cos \frac{\pi}{2K} x = \frac{d}{dx} \operatorname{sn} x = \frac{k'}{\sqrt{k}} \frac{H_1(x)\Theta_1(x)}{\Theta^2(x)},$$

et par conséquent

$$(13) \quad \varphi'(y) = \frac{4K}{\pi} \sqrt[4]{q} \frac{k'}{\sqrt{k}} \prod_n \frac{(1+q^n)^2 - 4q^n y^2}{[(1-q^{2n-1})^2 + 4q^{2n-1} y^2]^2}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

8° Si l'on a

$$u(x) = \varphi(y).$$

on aura

$$v(x) = \varphi\left(\sqrt{1-y^2}\right),$$

et par conséquent, grâce aux propriétés connues de u et de v [1]

$$\varphi\left(\sqrt{1-y^2}\right) = \sqrt{\frac{1-\varphi^2(y)}{1-k^2\varphi^2(y)}},$$

$$\varphi(y) = \sqrt{\frac{1-\varphi^2\left(\sqrt{1-y^2}\right)}{1-k^2\varphi^2\left(\sqrt{1-y^2}\right)}},$$

relations qui peuvent être réunies dans la suivante

$$\varphi^2(y) + \varphi^2\left(\sqrt{1-y^2}\right) = 1 + k^2 \varphi^2(y)\varphi^2\left(\sqrt{1-y^2}\right),$$

---

[1] *Loc. cit.* (*Nouvelles Annales*).

qu'on pouvait obtenir en faisant $c' = 1$ dans le théorème d'addition (6).

D'autre part, ce théorème d'addition pourra, grâce à la fonction v, être transformé au moyen des relations connues ([1])

$$u(a+b) = \frac{u_a v_b + v_a u_b}{1 + k^2 u_a u_b v_a v_b}, \qquad v(a+b) = \frac{v_a v_b - u_a u_b}{1 - k^2 u_a u_b v_a v_b}.$$

En posant

$$\alpha = \sin\frac{\pi}{2K}a, \qquad \beta = \sin\frac{\pi}{2K}b,$$

la première de ces formules donne

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(\alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2}) \\ &\quad = \frac{\varphi(\alpha)'\varphi(\sqrt{1-\beta^2}) + \varphi(\beta)\varphi(\sqrt{1-\alpha^2})}{1 + k^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\sqrt{1-\alpha^2})\varphi(\sqrt{1-\beta^2})}. \end{aligned} \right.$$

En posant

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{2K}a, \qquad \beta = \cos\frac{\pi}{2K}b,$$

la formule de $v(a+b)$ donne

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi(\alpha\beta - \sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}) \\ &\quad = \frac{\varphi(\alpha)\varphi(\beta) - \varphi\sqrt{1-\alpha^2})\varphi(\sqrt{1-\beta^2})}{1 - k^2\varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\sqrt{1-\alpha^2})\varphi(\sqrt{1-\beta^2})}. \end{aligned} \right.$$

Ces formules (14) et (15) sont, au fond, identiques; mais si l'on y fait $\beta = \alpha$, on obtient les deux formules distinctes

$$(16) \qquad \varphi(2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}) = \frac{2\varphi(\alpha)\varphi(\sqrt{1-\alpha^2})}{1 + k^2\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\sqrt{1-\alpha^2})},$$

$$(17) \qquad \varphi(2\alpha^2 - 1) = \frac{\varphi^2(\alpha) - \varphi^2(\sqrt{1-\alpha^2})}{1 - k^2\varphi^2(\alpha)\varphi^2(\sqrt{1-\alpha^2})},$$

([1]) *Loc. cit.* (*Nouvelles Annales*).

qui sont, à l'égard de $\varphi(y)$, les transformées des formules de multiplication par 2, des fonctions elliptiques $u(2x)$, $v(2x)$. Les formules qui donnent $u(3x)$, $v(3x)$, $u(4x)$, $v(4x)$, etc., se transformeraient d'une manière analogue.

Enfin, on peut transformer l'expression de la dérivée de la manière suivante; on a

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{2K}\sqrt{1-y^2}\,\varphi'(y)\\&\quad = u'(x) = v(1-k^2u^2) = \frac{1-u^2}{v} = \frac{k'^2 v}{1-k^2v^2} \quad (^1),\end{aligned}$$

et par conséquent

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi'(y) &= \frac{2K}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,\varphi\left(\sqrt{1-y^2}\right)[1-k^2\varphi^2(y)]\\ &= \frac{2K}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,\frac{1-\varphi^2(y)}{\varphi\left(\sqrt{1-y^2}\right)}\\ &= \frac{2K}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,k'^2\,\frac{\varphi\left(\sqrt{1-y^2}\right)}{1-k^2\varphi^2\left(\sqrt{1-y^2}\right)}.\end{aligned}\right.$$

Ces formules ne contiennent explicitement pas d'autre irrationnelle que le dénominateur $\sqrt{1-y^2}$. D'ailleurs $\varphi\left(\sqrt{1-y^2}\right)$ ne contient pas d'autre irrationnelle que $\sqrt{1-y^2}$ en facteur d'une expression rationnelle. Ces formules suffisent donc à montrer que $\varphi'(y)$ est rationnelle en y. La transformation de $v'(x)$ ne conduit pas à d'autres formules.

9° Les formules que nous avons établies permettent d'étudier facilement les variations de la fonction *réelle* φ de la variable *réelle* φ et de construire la courbe représentative de ces variations. Remarquons tout d'abord que φ étant une fonction impaire, la courbe est symétrique par rapport à l'origine des coordonnées φ et y,

---

(1) *Loc. cit.* (*Nouvelles Annales*).

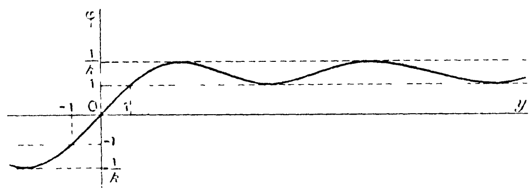
et qu'il nous suffira de faire varier y par des valeurs positives. Les égalités

$$\varphi'(y) = \frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)}{1-y^2}}, \qquad \varphi(0)=0, \qquad \varphi(1)=1$$

montrent que lorsque y croît de 0 à 1, φ croît aussi de 0 à 1. La tangente à l'origine est donnée par

$$\varphi'(0) = \frac{2K}{\pi}.$$

La tangente au point 1 nous est donnée par la dernière



formule que nous avons démontrée pour φ' (18)

$$\varphi'(1) = \frac{2K}{\pi}k'^2 \lim\left[\frac{\varphi(\sqrt{1-y^2})}{\sqrt{1-y^2}}\right]_{y=1}$$
$$= \frac{2K}{\pi}k'^2 \lim\left[\frac{\varphi(y)}{y}\right]_{y=0} = \frac{4K^2}{\pi^2}k'^2.$$

Lorsque y croît au delà de l'unité, φ croît au delà de l'unité et, à partir de ce moment, reste toujours compris entre 1 et $\frac{1}{k}$.

φ atteint la valeur $\frac{1}{k}$, pour les valeurs de y données par la formule

$$y = \sin\frac{\pi}{2K}[K+(2n+1)iK']$$
$$= \cos\frac{2n+1}{2}i\pi\frac{K'}{K} = \frac{q^{\frac{2n+1}{2}} + q^{-\frac{2n+1}{2}}}{2}$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

qui sont données par l'égalité

$$\varphi(y) = \operatorname{sn} x = \frac{1}{k}.$$

Ces valeurs annulent d'ailleurs φ' et rendent négative φ'' que l'on calcule facilement; on obtient donc ainsi des maxima pour φ. Il n'y a de difficulté, pour trouver le signe φ'', que de zéro au premier maximum $\frac{1}{k}$; on trouve que φ'' est négative dans tout cet intervalle, mais nous n'en reproduirons pas ici la démonstration, qui est longue.

φ atteint la valeur 1 pour les valeurs de y données par la formule

$$y = \sin\frac{\pi}{2K}(K + 2niK') = \cos ni\pi\frac{K'}{K} = \frac{q^n + q^{-n}}{2}$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

qui sont données par l'égalité

$$\varphi(y) = \operatorname{sn} x = 1.$$

Ces valeurs annulent toutes φ', sauf la première, qui est 1 et pour laquelle nous avons calculé la valeur de φ'; la dérivée seconde φ'' est positive en toutes ces valeurs, sauf en la première, où elle est négative. Ces points pour lesquels $\varphi = 1$, $\varphi' = 0$ sont donc des minima.

Enfin, si l'on calcule l'intervalle sur l'axe Oy, entre un maximum et le minimum suivant, ou entre un minimum et le maximum suivant, on voit que cet intervalle croît indéfiniment et au delà de toute limite.

A partir du point $y = 1$, la courbe, tout entière contenue entre les deux parallèles 1 et $\frac{1}{k}$, affecte donc une forme sinueuse et oscille entre ces deux parallèles de manière que les sinuosités s'élargissent indéfiniment et au delà de toute limite.