Nouvelles annales de mathématiques

A. Lagrange

Premier concours des « Nouvelles annales » pour 1900

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 529-536

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__529_1>

[$L_1^2$15c]

PREMIER CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1900.

SOLUTION PAR M. A. LAGRANGE,
Professeur de Mathématiques au lycée de Saint-Étienne.

I. *On propose d'établir le fait suivant :*

Il peut arriver de deux manières différentes que les neuf droites joignant trois points A, B, C *à trois points* A', B', C' *soient tangentes à une quadrique :*

1° *Les trois points* A, B, C *peuvent correspondre un à un aux trois points* A', B', C' *par le fait que chacun des trois quadrilatères qui ont pour sommets* B, C, B', C' *ou* C, A, C', A' *ou* A, B, A', B' *a ses quatre points de contact dans un même plan, la même chose n'ayant pas lieu pour les six autres quadrilatères de la figure;*

2° *Les deux points* C *et* C', *par exemple, peuvent* *jouer un rôle à part. Les points de contact* 1, 2, 3, 4 *des côtés du contour* AB′BA′ *sont dans un même plan, les droites* 12 *et* 34 *coupant* AB *en* S, *les droites* 14 *et* 23 *coupant* A′B′ *en* S′; *pour* C′A *et* C′B, *la corde des contacts coupe* AB *en* S, *pour* CA′ *et* CB′, *la corde des contacts coupe* A′B′ *en* S′; *les cinq contours ayant pour sommets les points de l'un des systèmes*

$$ABA'B', \quad \begin{cases} ABA'C', \\ ABB'C', \end{cases} \quad \begin{cases} A'B'AC, \\ A'B'BC, \end{cases}$$

ont donc chacun leurs quatre points de contact dans un même plan.

II. *La figure dépend de dix-huit paramètres. Pour le premier des deux systèmes indiqués, si l'on se donne la quadrique, les trois tangentes* AA′, BB′, CC′ *doivent satisfaire à une condition, et le contour hexagonal* AB′CA′BC′A *dépend alors d'un paramètre; la condition en question est satisfaite en particulier si les trois tangentes* AA′, BB′, CC′ *sont concourantes. On demande, pour les deux cas, si l'on peut se donner arbitrairement les six points* A, B, C, A′, B′, C′ *pour déterminer la quadrique, ou s'ils doivent satisfaire à une condition et donner lieu à une infinité de quadriques; à défaut d'une réponse complète à cette partie de la question, on demande d'examiner au moins le cas où les droites* AA′, BB′, CC′ *sont concourantes.*

PREMIÈRE PARTIE.

Les propriétés à établir étant projectives, nous pouvons supposer que la quadrique est une sphère. C'est ce que nous supposerons dans cette première partie.

Faisons une projection stéréographique de la figure;

soient abc, $a'b'c'$ les projections des points ABCA′B′C′. Les cercles de contact des cônes circonscrits à la sphère et ayant pour sommets A, B, ..., C′ sont projetés suivant des cercles ayant pour centres les points a, b, ..., c'; nous les désignerons par : cercles (a), (b), ..., (c'). Les cercles (a), (a'), par exemple, sont tangents comme projections de deux cercles tangents au point de contact avec la sphère de la droite AA′. Chaque cercle du groupe $(a)(b)(c)$ est donc tangent à chaque cercle du groupe $(a')(b')(c')$. Le quadrilatère AA′BB′, par exemple, aura ses points de contact avec la sphère dans un même plan, si leurs projections sont sur un cercle. Or ces projections sont les points de contact des cercles (a), (b) avec les cercles (a'), (b'). En représentant par $(+1)$ un contact extérieur, par (-1) un contact intérieur, on sait que les quatre points de contact des cercles (a), (b) et (a'), (b') sont sur un même cercle si les deux contact de (a) ont le même produit que les deux contacts de (b).

Définitions. — Posons $\varepsilon_i = \pm 1$. Étant donnés deux groupes de 3 nombres

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3), \quad (\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3),$$

nous dirons qu'ils sont *égaux* si l'on a

$$\varepsilon_i = \varepsilon'_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

qu'ils sont *symétriques* si

$$\varepsilon_i = -\varepsilon'_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et enfin qu'ils sont *inégaux* s'ils ne sont ni égaux ni symétriques.

Les propriétés suivantes sont presque évidentes :

I. *Si deux groupes sont égaux ou symétriques, on a*

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon'_i \varepsilon'_j$$

quels que soient i et j.

II. *Si deux groupes sont inégaux, il existe un seul système ij tel que*

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon'_i \varepsilon'_j,$$

ou, ce qui revient au même, tel que

$$\varepsilon_i \varepsilon'_i = \varepsilon_j \varepsilon'_j.$$

Les deux égalités sont équivalentes, car on passe de la première à la seconde en multipliant les deux membres par $\varepsilon'_i \varepsilon_j$. Pour les démontrer supposons, par exemple, tous les ε égaux à $(+1)$; alors parmi les ε' il y en a un de signe contraire aux deux autres et la propriété est évidente.

III. *Si* 3 *groupes* $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$, $(\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3)$, $(\varepsilon''_1 \varepsilon''_2 \varepsilon''_3)$ *sont deux à deux inégaux, il n'existe pas un système de nombres ij tel que*

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon'_i \varepsilon'_j = \varepsilon''_i \varepsilon''_j.$$

Pour s'en rendre compte on peut supposer les 3 nombres du premier groupe égaux à $(+1)$. Alors on a, par exemple,

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = +1, \qquad \varepsilon'_3 = -1, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2,$$

mais on ne saurait avoir

$$\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 = \varepsilon''_1 \varepsilon''_2,$$

car ε''_1 et ε''_2 seraient de même signe, ε''_3 serait de signe contraire à celui-là et les groupes (ε'), (ε'') seraient égaux ou symétriques.

Cela posé, formons le Tableau des contacts des cercles

(a), (b), (c) avec les cercles (a'), (b'), (c'), les contacts extérieurs étant, comme nous l'avons déjà dit, représentés par $+1$ et les contacts intérieurs par -1

	(a)	(b)	(c)
(a')	ε_1	ε_2	ε_3
(b')	ε'_1	ε'_2	ε'_3
(c')	ε''_1	ε''_2	ε''_3

Deux cas peuvent se présenter : 1° les 3 groupes (ε), (ε'), (ε'') sont deux à deux inégaux; 2° deux d'entre eux sont égaux ou symétriques. Cela résulte de la théorie des cercles tangents à 3 cercles donnés (a'), (b'), (c'). On sait, en effet, que les 8 cercles tangents à ces 3 cercles se décomposent en 4 groupes de deux, les cercles de chaque groupe ayant avec les 3 cercles donnés des contacts de même nature ou des contacts respectivement de natures contraires.

Premier cas. — Les propriétés (II) et (III) nous montrent alors que l'on peut trouver trois combinaisons pq, rs, tu des nombres 1, 2, 3 telles que

$$\varepsilon_p \varepsilon'_p = \varepsilon_q \varepsilon'_q, \qquad \varepsilon'_r \varepsilon''_r = \varepsilon'_s \varepsilon''_s, \qquad \varepsilon''_t \varepsilon_t = \varepsilon''_u \varepsilon_u;$$

par exemple, on peut supposer que l'on a

$$\varepsilon_1 \varepsilon'_1 = \varepsilon_2 \varepsilon'_2, \qquad \varepsilon'_2 \varepsilon''_2 = \varepsilon'_3 \varepsilon''_3, \qquad \varepsilon''_1 \varepsilon_1 = \varepsilon''_3 \varepsilon_3.$$

Donc les 3 groupes de contacts

$$(aba'b'), \quad (aca'c'), \quad (bcb'c')$$

sont sur un même cercle et ce sont les seuls. Les 3 quadrilatères AA'BB', AA'CC', BB'CC' ont leurs points de contact dans un même plan.

Second cas. — Les deux groupes $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$, $(\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3)$, par exemple, sont égaux ou symétriques. Le troisième groupe $(\varepsilon''_1 \varepsilon''_2 \varepsilon''_3)$ étant inégal aux deux premiers, il existe un système de deux nombres (ij), et un seul, tel

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon'_i \varepsilon'_j = \varepsilon''_i \varepsilon''_j,$$

nous pouvons supposer $i = 1$, $j = 2$; donc

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 = \varepsilon''_1 \varepsilon''_2.$$

La propriété (I) permet de joindre à ces égalités les deux suivantes

$$\varepsilon_1 \varepsilon_3 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_3, \qquad \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_3.$$

Chacune de ces 5 égalités exprime que l'un des quadrilatères a ses contacts dans un même plan, car leurs projections sont sur un même cercle. Ce sont les quadrilatères

AA'BB', AB'BC', AA'BC', AA'CB, BB'CA'.

SECONDE PARTIE.

Étant données deux droites (Δ), (Δ') tangentes à une quadrique, on sait qu'il existe deux séries de droites tangentes à la quadrique et s'appuyant sur (Δ) et (Δ'). Les droites de chaque série ont leurs points de contact dans un même plan et décrivent sur (Δ) et (Δ') deux divisions homographiques.

Cette propriété bien connue étant rappelée, considérons 3 droites (Δ), (Δ'), (Δ'') tangentes à une quadrique; soit A un point quelconque de (Δ). Construisons un quadrilatère AB'CA' circonscrit à la quadrique, les points B', C, A' étant respectivement sur Δ', Δ'', Δ; puis construisons un second quadrilatère AC'BA'' circonscrit à la quadrique, les points C', B, A'' étant respectivement sur Δ'', Δ', Δ, et, en outre, la droite $C'B$ étant de la même série que $B'C$, et $B''A$ étant de la même série que AB'. Pour que l'on obtienne un système de 9 droites analogue au système du premier cas, il faut que les points A' et A'' coïncident. Or, si le point A se déplace sur (Δ), A et B' décrivent deux divisions homographiques, de même B' et C, C et A'; donc A et A' décrivent deux divisions homographiques sur (Δ); il en est de même de A et A''. D'autre part, on remarquera que A se déduit de A'' de la même manière que A' se déduit de A.

Donc, s'il existe une position du point A telle que les points correspondants A' et A'' coïncident, on pourra dire que le point A' considéré successivement comme appartenant aux deux divisions décrites par A et A' a le même homologue dans l'autre. Ces deux divisions sont alors en involution et A' et A'' coïncident dans toutes les positions de A.

En d'autres termes, s'il y a un système de 9 droites satisfaisant à la question, il y en a une infinité et chaque système ne dépend que d'un paramètre, car le point A peut être pris arbitrairement sur (Δ).

Montrons que l'on peut choisir arbitrairement les deux droites Δ, Δ' et le point de contact de Δ''. Soit C ce point de contact; soient A' et B' les intersections du plan tangent à la quadrique en C avec Δ et Δ'. Menons $B'A$ et BA' tangentes à la quadrique, A' étant sur Δ, B étant sur Δ' et les deux tangentes appartenant à la même série. Les cônes circonscrits à la quadrique ayant pour sommets A et B coupent le plan tangent en C suivant deux coniques ayant 4 points communs; soit C' un de ces points; AC', CC', BC' sont tangentes à la quadrique et les 6 points A, B, C, A', B', C' ainsi déterminés répondent à la question. Il en résulte que l'on peut prendre pour (Δ'') la droite CC'.

Montrons encore que l'on peut prendre pour $\Delta, \Delta', \Delta''$ 3 tangentes concourantes quelconques. Soit O leur point de concours, et soient α, β, γ leurs points de contact. Si le point A de la droite (Δ) est pris en α, les deux quadrilatères $AB'CA'$ et $AC'BA''$ (*voir* plus haut) se réduisent à $O\beta O\alpha$ et $O\gamma O\alpha$: les points A' et A'' étant confondus en α, la condition pour que les droites conviennent est remplie.

Considérons maintenant 6 points A, B, C, A', B', C' tels que les 3 droites AA', BB', CC' soient concourantes, et nous allons montrer qu'il existe une infinité de quadriques tangentes aux 9 droites AA', AB', ..., CC'. Soit S le point de concours des 3 droites et soient ω, ω', ω'' les points d'intersection des diagonales des 3 quadrilatères $AA'BB'$, $BB'CC'$, $CC'AA'$. Choisissons arbitrairement le point de contact I de la droite AA' avec la quadrique cherchée; si les points de contact de BB' et CC' sont I' et I'', la droite II' passe par ω et la droite $I'I''$ par ω' (d'après une propriété des coniques inscrites dans un quadrilatère). Lorsque I varie, les points I et I'' décrivent deux divisions homographiques; si I vient en S, il en est de même de I''; donc II'' passe par un point fixe, et comme AC' et CA' sont deux positions particulières de cette droite, ce point fixe est ω''.

On peut donc déterminer 3 coniques Σ, Σ', Σ'' inscrites dans les 3 quadrilatères, les points de contact de ces coniques avec les droites AA', BB', CC' étant les points I, I', I''. Ces 3 coniques tangentes deux à deux sont situées sur une quadrique répondant à la question, et comme le point I est arbitraire, il y a une infinité de quadriques tangentes aux 9 droites AA', AB', ..., CC'.