Nouvelles annales de mathématiques

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1900. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 512-526

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__512_0>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1900. — COMPOSITIONS.

Caen.

Éléments généraux de mathématiques.

I. *Trouver la surface* S *lieu des points équidistants d'un plan* P *et d'un point* F *donné à une distance* p *de* P *et montrer que ses sections planes se projettent sur* P *suivant des cercles. Aire de la partie de* S *comprise entre le sommet et le parallèle dont le plan passe par* F.

Montrer que les lignes tracées sur S *de telle sorte que leurs tangentes fassent un même angle* α *avec* P *se projettent orthogonalement sur ce plan suivant des développantes de cercle.*

L'aire demandée est $\frac{2}{3}\pi(\sqrt{8}-1)_p^2$. Les projections des courbes proposées ont une équation de la forme $r\frac{dr}{ds} = p\tang\alpha$: leurs tangentes sont à une distance constante, $p\tang\alpha$, du pôle.

II. *Deux points pesants,* M, *de masse* 1, M′, *de masse* 3, *s'attirent avec une intensité* $3\omega^2\overline{MM'}$; M′ *peut se mouvoir librement,* M *est assujetti à glisser sans frottement sur une verticale fixe; les vitesses initiales sont nulles. Mouvement des deux points; mouvement de* M′ *relativement à des axes de directions fixes menés par* M.

Épreuve pratique. — *Quand une étoile, d'ascension droite* A, *se lève à l'horizon d'un lieu dont la latitude est* λ, *son azimut est* α; *calculer, pour cet instant, l'angle horaire de l'étoile,* H, *et l'heure sidérale* T.

Cas de $A = 9^h 17' 12''$, $\lambda = 48° 41' 3''$, $\alpha = 225°$,

$$\cot H = \sin\lambda \cot\alpha, \qquad H = 233° 5' 26'', \qquad T = 16^h 9^m 30^s.$$

Mécanique.

I. *Une parabole* P *roule sur une parabole égale* Q, *fixe, de manière que les deux courbes soient toujours symétriques par rapport à la tangente au point de contact* M. *Lieu décrit par le foyer de* P. *Déterminer, pour une position de la figure mobile :* 1° *la circonférence des inflexions;* 2° *le rayon de courbure de* P *et de* Q *en* M; 3° *le point* E *où l'axe de* P *touche son enveloppe et le rayon de courbure* ρ *de cette enveloppe au point* E; 4° ρ *est de la forme*

$$p\,\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\left(1+2\sin^2\frac{1}{2}\alpha\right)}{2\sin^3\frac{1}{2}\alpha}.$$

II. *Une barre très mince, homogène, pesante, de longueur* $2a$, *a l'une de ses extrémités* A *assujettie à rester sur l'axe* OZ, *qui est vertical, l'autre extrémité* B *sur la surface de l'ellipsoïde de révolution*

$$\frac{x^2+y^2}{4a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1;$$

il n'y a pas de frottement. A l'instant initial, la barre située dans l'intérieur de l'ellipsoïde a son extrémité supérieure A *immobile, elle-même tournant autour de* OZ *avec une vitesse* ω *et inclinée de* 45° *sur l'horizon.*

Mouvement de la barre; réactions exercées sur les points A *et* B.

Le centre de gravité G reste dans le plan OXY;

$$OG = a \sin\theta;$$

$$\psi' \sin^2\theta = \frac{\omega}{2}, \qquad (\cos^2\theta + \tfrac{1}{3})\theta'^2 + \tfrac{4}{3}\psi'^2 \sin^2\theta = \tfrac{2}{3}\omega^2.$$

La réaction en A, paralèlle à GO, est

$$\tfrac{9}{2}\tang\theta + \frac{5a\omega^2 \sin\theta}{2(4-3\sin^2\theta)^2};$$

la réaction en B est

$$g\frac{\sqrt{4-3\sin^2\theta}}{2\cos\theta}.$$

Toulouse.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Intégration de l'équation aux différentielles totales*

$$X\,dx + Y\,dy + X\,dz = 0,$$

où X, Y, Z *désignent des fonctions données variables* x, y, z.

II. *Déterminons la valeur de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx.$$

III. *On considère la surface définie par les formules*

$$x = \frac{a}{4}\cos u \cos v,$$

$$y = \frac{a}{4}\cos u \sin v,$$

$$z = a\left(1 - \cos\frac{u}{2} + \sin\frac{u}{2}\right),$$

où a est donné, et qui déterminent, en fonction de deux paramètres u et v, les coordonnées x, y, z d'un de ses points par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

Déterminer sur cette surface les courbes dont les normales principales rencontrent constamment l'axe Oz *et établir que ces courbes sont algébriques.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Construire la courbe ayant pour équation*

$$\theta = \int \frac{(10r - 9)\,dr}{r\sqrt{r^4 - 100r^2 + 180r - 81}}$$

et passant par le point

$$(\theta = 0,\ r = -5 + \sqrt{34})$$

Nota. — On remarquera que la quantité sous le radical s'annule pour certaines valeurs entières de r.

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Une surface de révolution est engendrée par la courbe*

$$x^2y = a^3 \qquad (a \text{ constant})$$

tournant autour de l'axe des y qui est vertical et tourné vers le bas, dans le sens de la pesanteur.

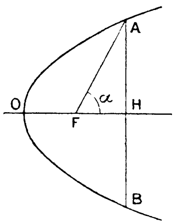
Étudier le mouvement d'un point pesant sur cette surface et indiquer les conditions initiales qui doivent être satisfaites pour que la trajectoire coupe les méridiens sous un angle constant.

Réaction de la surface.

II. *Exposer très sommairement la méthode géométrique de Poinsot pour étudier le mouvement d'un* *corps solide qui est assujetti à tourner autour d'un point fixe et qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'attraction newtonienne d'un solide homogène limité par un paraboloïde de révolution et par un plan perpendiculaire à l'axe sur un point matériel situé au foyer de la parabole génératrice.*

Fig. 1.



Soit AB *la trace du plan sécant qui limite le segment.*

On donne le paramètre p *de la parabole génératrice, l'angle* $\mathrm{AFH} = \alpha$, *la densité* ρ *du paraboloïde, le coefficient* μ *d'attraction.*

Pour quelle valeur de l'angle α *l'attraction du segment sur le foyer est-elle nulle?*

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Les circonférences primitives* O *et* O′ *de deux engrenages plans tournent autour de leurs centres respectifs avec des vitesses angulaires constantes, et leur point de contact* I, *considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre, a même vitesse* V. *Un point* M *se meut d'une façon quelconque et l'on désigne par* Γ *sa trajectoire absolue, par* v *sa* *vitesse absolue et par* γ *et* γ' *ses trajectoires relatives dans les plans des deux cercles* O *et* O'.

1° *Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que* γ *et* γ' *soient des profils conjugués est que les deux segments* V *et* v *aient toujours des projections égales sur la droite* TM.

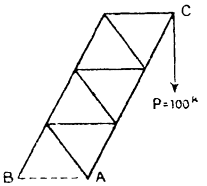
On peut se donner arbitrairement la trajectoire Γ. *Quelle tranformation subissent les deux profils* γ *et* γ' *quand on remplace* Γ *par une de ses conchoïdes par rapport au point* I?

2° *Déterminer la nature géométrique des profils* γ *et* γ' *quand la courbe* Γ *est une droite passant par* I *et quand cette courbe est le cercle décrit sur* IO *comme diamètre.*

II. *Recherche générale des systèmes articulés plans dont on peut déterminer toutes les tensions par la statique.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère le système articulé ci-dessous formé de triangles équilatéraux; les*

Fig. 2.



deux points A *et* B *sont fixés de façon que* AB *soit horizontale et égale à la longueur commune de toutes les tiges.*

Déterminer les tensions et réactions produites par le poids propre du système et par une charge de 100^{kg} *appliquée en* C.

Poids de chaque barre, 10^{kg}.

On construira le diagramme en adoptant comme échelle des forces 1^{cm} *par* 10^{kg}.

ASTRONOMIE OU MÉCANIQUE CÉLESTE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Aberration des astres fixes.*

Établir les formules qui donnent les changements apportés par l'aberration à l'ascension droite et à la déclinaison d'une étoile. Aberration annuelle.

On admettra, sans les démontrer, les formules suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt} - \frac{n}{\cos\varphi}(\quad \sin\odot - \sin\varphi\cos\varpi),$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dt} - \frac{n}{\cos\varphi}(-\cos\odot - \sin\varphi\cos\varpi)\cos\varepsilon,$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{dZ}{dt} - \frac{n}{\cos\varphi}(-\cos\odot - \sin\varphi\cos\varpi)\sin\varepsilon.$$

Dans ces formules, x, y, z *désignent les coordonnées rectangulaires équatoriales de l'observateur* (Ox *passant par le point vernal*), X, Y, Z *celles du centre du Soleil,* n, φ, $\odot$, ϖ *et* ε *le moyen mouvement diurne, l'angle d'excentricité, la longitude du périgée et l'inclinaison de l'orbite du Soleil sur l'équateur.* (*L'angle d'excentricité est l'angle dont le sinus est égal à l'excentricité.*)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *La durée de la révolution de la planète Junon autour du Soleil est de* $1591^{j},988$; *l'excentricité de son orbite est* 0,25786. *Calculer, avec la précision que comportent les données, le temps qui s'écoule depuis son passage au périhélie jusqu'au moment où son rayon vecteur est perpendiculaire au grand axe.*

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Démontrer que, si des courbes planes formant une congruence sont normales à toute une famille de surfaces, elles conservent cette propriété lorsqu'elles sont entraînées dans la déformation de la surface enveloppe de leurs plans.*

Cas particulier où les courbes considérées sont des cercles.

II. *On considère une congruence de cercles. Une sphère* S *passant par un cercle* C *de la congruence est, en général, tangente en deux points* M, M′ *de ce cercle à une surface* Σ *de la congruence passant par* C.

Lorsque la sphère S *varie, en passant par* C, *la droite* MM′ *passe constamment par un point* P *du plan du cercle* C; *lorsque, au contraire,* S *restant fixe,* Σ *varie en passant par* C, *la droite* MM′ *passe constamment par un point* Q.

1° *Démontrer que, si la surface* Σ *varie,* C *restant fixe, le point* P *décrit une conique, et que si la sphère* S *varie,* C *restant fixe, le point* Q *décrit la même conique.*

2° *Établir que cette conique coupe* C *en ses points focaux et que ses asymptotes sont perpendiculaires aux plans focaux de l'axe du cercle* C *relativement à la congruence engendrée par cette droite.*

3° *Examiner le cas où cette conique est un cercle.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la surface* S *lieu des points dont les coordonnées rectangulaires* X, Y, Z *sont définies par les équations*

$$X = 3u + 3uv^2 - u^3,$$
$$Y = 3v + 3u^2v - v^3,$$
$$Z = 3u^2 + 3v^2,$$

dans lesquelles u et v désignent des variables indépendantes.

Un trièdre trirectangle $Mxyz$ se meut de manière que dans chacune de ses positions l'arête Mz soit normale en M à la surface S et l'arête Mx tangente à la courbe (v) de S qui passe au sommet M.

Exprimer en fonction de u et v les différentes quantités ξ, η, ξ_1, η_1, p, q, r, p_1, q_1, r_1 qui figurent dans les formules relatives au trièdre mobile.

Former pour la surface S et pour chacune des nappes de sa développée l'équation des lignes de courbure, celle des lignes asymptotiques et celle qui détermine les rayons de courbure principaux.

Marseille.

Analyse infinitésimale.

1° *Démontrer que les trajectoires orthogonales des génératrices d'une surface développable peuvent être considérées comme les développantes de l'arête de rebroussement de cette surface, ou comme les lignes de courbure de l'un des systèmes;*

2° *Un plan mobile P ayant, en coordonnées rectangulaires, une équation de la forme*

$$P = ax + by + cz + d = 0,$$

où a, b, c, d sont des fonctions d'une variable indépendante t, on considère la surface développable S enveloppe du plan P.

A. *Trouver les équations de la génératrice mobile G de la surface S.*

B. *Trouver les équations de l'arête de rebroussement de la surface S.*

C. *Déterminer les trajectoires orthogonales des gé-*

nératrices caractéristiques G *sur la surface* S. *Montrer que le problème dépend d'une équation différentielle linéaire entre* z *et* t.

3° *Intégrer cette équation dans le cas où l'on a*

$$P = 2tx + (t^2 - 1)y + (t^2 + 1)z + \sin t = 0,$$

et donner la signification géométrique du résultat.

SOLUTION.

En écrivant que le déplacement élémentaire sur la génératrice et le déplacement élémentaire de la forme la plus générale sont rectangulaires, on arrive à l'équation linéaire en z et t

$$\begin{vmatrix} a & b & c\,dz \\ a' & b' & c'\,dz + (a''x + b''y + c''z + d'')\,dt \\ bc' - cb' & ca' - ac' & (ab' - ba')\,dz \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation se réduit à $dz = 0$, si l'on a

$$a(ca' - ac') - b(bc' - cb') = 0.$$

Cette condition peut s'intégrer. Elle est satisfaite par

$$c^2 = K(a^2 + b^2),$$

K étant une constante arbitraire.

On a $K = 1$ dans l'exemple de calcul choisi.

Les lignes $z =$ const. sont les lignes de niveau quand le plan des xy est pris pour plan horizontal.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère tous les points de contact où le plan tangent est également incliné sur l'axe* Oz *de la surface*

$$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Déterminer, pour une inclinaison donnée, l'aire limitée sur la surface par le lieu de ces points.

SOLUTION.

La courbe limite est déterminée en projection sur le plan des xy par l'équation

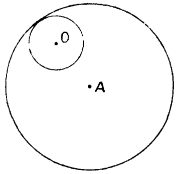
$$1 + \rho^2\left(\frac{\cos^2\omega}{a^4} + \frac{\sin^2\omega}{b^4}\right) = K^2,$$

et l'on a pour l'aire

$$A = \frac{2\pi}{3} a^2 b^2 (K^3 - 1).$$

MÉCANIQUE.

Dans un plan vertical est fixé un disque circulaire O. Ce disque O est à l'intérieur d'un cerceau A qui



s'appuie sur le disque. A l'origine des temps, ce cerceau, qui est pesant et homogène, est sans vitesse, et la ligne qui joint le centre du disque au centre du cerceau fait un angle de 45° avec la verticale.

On abandonne le cerceau à lui-même, et l'on demande de trouver le mouvement.

1° *En supposant qu'il n'y a pas de frottement;*

2° *En supposant le frottement assez grand pour qu'il y ait roulement sans glissement.*

Comparer la durée des oscillations dans les deux cas.

Examiner le cas particulier où le disque est réduit à un point.

SOLUTION.

Soient R le rayon du cerceau, r le rayon du disque, M la masse du cerceau, θ l'angle de OA avec la verticale descendante, φ l'angle d'un rayon fixe dans le cerceau avec la même verticale; on a d'abord

$$M(R-r)\theta'' = -Mg\sin\theta + T,$$
$$M(R-r)\theta'^2 = -Mg\cos\theta + N.$$

En appliquant le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe passant au centre A, on a

$$MR\varphi'' = -T.$$

Supposons d'abord que le frottement cesse; nous aurons $T=0$, $\varphi''=0$, et, comme le disque part du repos, nous voyons que le cerceau ne tourne pas, c'est-à-dire que tous ces rayons ont une direction fixe. En même temps, on a

$$(R-r)\theta'^2 = 2g\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Le centre A oscille entre $+45^\circ$ et -45° comme un pendule de longueur $OA = R - r$. Le cerceau, dans ce mouvement, *roule* et *glisse* sur le disque.

Cette étude préliminaire permet de fixer le signe de T dans l'équation qui donne φ''.

Supposons maintenant le frottement assez grand pour qu'il y ait roulement; il viendra la condition géométrique

$$R\varphi' = (R-r)\theta'$$

ou

$$R\varphi'' = (R-r)\theta'':$$

on a par suite l'équation

$$\theta'' = \frac{g}{R+r}\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Le point A oscille encore comme un pendule de longueur $2(R-r)$. Les vitesses angulaires dans les deux cas sont dans le rapport de $\sqrt{2}$ et les temps des oscillations s'en déduisent.

Mais pour qu'il y ait roulement on doit avoir

$$T < N\rho ;$$

on en déduit facilement

$$f > \frac{1}{2}.$$

Épreuve pratique. — *Un bassin rempli d'eau maintenue à une hauteur constante s'écoule par un tuyau* AB *dont le diamètre est égal à* $0^m,20$, *et qui a* 1000^m *de longueur. Ce tuyau débouche par son extrémité* B *dans un canal dont la section, qui est rectangulaire, a* $0^m,50$ *de largeur, et dont la pente est de* 1^m *par kilomètre. La hauteur de la surface libre du bassin au-dessus de l'extrémité* B *du tuyau est de* 10^m. *On demande quel sera le débit du tuyau, et quelle sera la profondeur de l'eau dans le canal.*

Solution.

Supposons le régime permanent établi, soit v la vitesse de l'eau dans le tuyau, et u le débit du canal. On se sert de la formule $v = 50\sqrt{\frac{1}{4}DJ}$, où D est le diamètre du tuyau et J la pente. On a

$$v = 1^m.117 \text{ par seconde}$$

et

$$q = 35^{lit} \text{ à la seconde pour le débit du tuyau.}$$

On a

$$u = \frac{q}{ab} = 50\sqrt{\frac{ab}{a+2b} \times I}, \qquad I = 0,001, \qquad a = 0^{m},50.$$

On tire de là

$$b^3 - 0,008\,b - 0,002 = 0.$$

Il y a une variation dans l'équation; on en conclut l'existence d'une racine positive. On trouve environ

$$b = 0^{m},14.$$

On a ensuite

$$u = 0^{m},50.$$

ASTRONOMIE.

PREMIÈRE QUESTION. — *Exposé des phénomènes de précession et de nutation.*

Expliquer la signification des termes : LIEU MOYEN, LIEU VRAI, LIEU APPARENT.

SECONDE QUESTION. — *Théorie de l'aberration planétaire.*

Une éphéméride donnant les lieux vrais d'une planète ou d'une comète, comment en tire-t-on les lieux apparents?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Connaissant les coordonnées équatoriales* (α, δ), (α', δ') *de deux étoiles, on demande de calculer :*

1° *L'inclinaison i sur l'équateur du grand cercle passant par les deux étoiles, ainsi que l'ascension droite a de son nœud ascendant (i est compris entre* 0° *et* 90°);

2° *Les ascensions droites et les déclinaisons* (A, D), (A', D') *des pôles de ce grand cercle.*

Données numériqeus

$$\alpha = 1^{h}.53^{m}.18^{s},22 \qquad \delta = 63^{\circ}.43'.51'',4$$
$$\alpha' = 7.42.31,64 \qquad \delta' = 19.13.\ 9,2$$