MICHEL BAUER

Note sur les groupes d'ordre p^α

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 509-511

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__509_1>

[A4a]

NOTE SUR LES GROUPES D'ORDRE p^α;

PAR M. MICHEL BAUER, à Budapest.

Soit $\mathfrak{h}$ un groupe d'ordre p^α, p étant un nombre premier. Soient les sous-groupes d'ordre $p^{\alpha-1}$

$$(1) \qquad \mathfrak{h}_1, \quad \mathfrak{h}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{h}_r;$$

(1) *Beiträge zur Theorie Abel'scher, etc.* (*Monatshefte f. Math. u. Phys.*, Bd VII).

si nous désignons le plus grand commun diviseur des sous-groupes (s) par $\mathfrak{d}$, nous pouvons démontrer les théorèmes suivants :

I. *Le groupe* $\mathfrak{d}$ *est différent de l'unité, excepté le cas où* $\mathfrak{h}$ *est un groupe des opérations échangeables dont toutes les opérations outre l'unité sont d'ordre* p.

II. *Le groupe* $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}}$ *est toujours un groupe des opérations échangeables dont toutes les opérations différentes de l'unité sont d'ordre* p.

1. Le groupe $\mathfrak{h}$ n'est pas un groupe des opérations échangeables, c'est-à-dire le groupe des commutateurs (*Commutator-Gruppe*) appartenant à $\mathfrak{h}$ est différent de l'unité ([1]). Puisque les sous-groupes $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{h}_i}$ sont d'ordre p et, par conséquent, leurs opérations échangeables, tous les sous-groupes $\mathfrak{h}_i$ contiennent le groupe des commutateurs.

2. Le groupe $\mathfrak{h}$ contient des opérations d'ordre $p^\beta (\beta > 1)$. Soit $\mathcal{A}$ une telle opération; ses puissances forment un groupe circulaire dont l'ordre est p^β. Le groupe $\mathfrak{A}$ a un seul sous-groupe d'ordre $p^{\beta-1}$, que nous désignons par $\mathfrak{B}$. Or $\mathfrak{B}$ est contenu comme sous-groupe dans tous les groupes $\mathfrak{h}_i$. Car il est possible que $\mathfrak{h}_i$ contienne $\mathfrak{A}$ et par conséquent $\mathfrak{B}$. Sinon le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{h}_i$ avec $\mathfrak{A}$ est un sous-groupe d'ordre $p^{\beta-1}$, et celui-ci ne peut être que $\mathfrak{B}$.

([1]) FROBENIUS, *Ueber die Primfactoren der Gruppen determinante* (*Berliner Sitzungsberichte*. p. 1343; 1896).

3. Les opérations du groupe $\mathfrak{h}$ sont échangeables, et toutes les opérations différentes de l'unité sont d'ordre p. En ce cas, nous verrons que $\mathfrak{d}$ se réduit à l'unité. Soit une base du groupe $\mathfrak{h}$

$$\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_2, \quad \ldots \quad \mathcal{A}_\alpha,$$
$$\mathcal{A}_1^p = \mathcal{A}_2^p = \ldots = \mathcal{A}_\alpha^p.$$

Si $\mathcal{B}$ est une opération quelconque différente de l'unité, on peut construire un sous-groupe d'ordre $p^{\alpha-1}$ qui ne contient pas $\mathcal{B}$. Par exemple, soit

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_1^{r_1} \mathcal{A}_2^{r_2} \ldots \mathcal{A}_\alpha^{r_\alpha}$$

et

$$(r_1, p) = 1;$$

alors le groupe minimum des opérations

$$(\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_\alpha)$$

est un sous-groupe d'ordre $p^{\beta-1}$ qui ne contient pas $\mathcal{B}$.

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{d}}, \quad \frac{\mathfrak{h}_2}{\mathfrak{d}}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathfrak{h}_r}{\mathfrak{d}}.$$

4. Soit le groupe $\mathfrak{d}$ d'ordre p^γ; alors les sous-groupes sont les mêmes que les sous-groupes d'ordre $p^{\alpha-\gamma-1}$ du groupe $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}}$ dont l'ordre est $p^{\alpha-\gamma}$. Or il suit de la définition de $\mathfrak{d}$ que, outre l'unité, les groupes (2) n'ont pas des opérations communes, et ainsi $\frac{\mathfrak{h}}{\mathfrak{d}}$ est un groupe des opérations échangeables dont toutes les opérations différentes de l'unité sont d'ordre p.