V. JAMET

Sur la transformation, point par point, des courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 506-508

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__506_1>

[P]

SUR LA TRANSFORMATION, POINT PAR POINT, DES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. V. JAMET.

Étant donnée une courbe algébrique (C) dont tous les points multiples sont à tangentes distinctes, nous nous proposons de montrer comment on peut lui faire correspondre, point par point, une autre courbe algébrique dont tout point multiple est un point double (à tangentes distinctes ou confondues) en n'employant d'autres transformations que les suivantes :

1° Par rayons vecteurs réciproques;

2° Par polaires réciproques;

3° Par voie d'homographie.

A cet effet, nous rappelons que M. Zeuthen (*N. A.*, 2e série, t. V; 1866) a montré comment on peut calculer le nombre des points d'où l'on peut mener à (C) trois normales égales, ainsi que le nombre des points, situés sur la développée de (C), d'où l'on peut mener à celle-ci une normale égale au rayon de courbure qui y touche la développée; cela revenait évidemment à chercher le nombre des cercles *tritangents* à (C), et aussi le nombre des cercles qui, étant bitangents à (C), ont, en un de leurs points de contact, un contact d'ordre supérieur au premier avec (C). Pour nous, l'essentiel est de savoir que, si (C) est algébrique, le nombre de ces cercles est fini. Enfin, les cercles qui ont avec (C) un contact du troisième ordre au moins sont en nombre fini.

Cela posé, transformons (C) par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle d'inversion un point qui ne soit situé sur aucune des circonférences que nous venons d'énumérer. Nous obtenons une première transformée (S) dont toute tangente singulière n'ayant pas son point de contact au pôle est, ou une tangente d'inflexion, ou une tangente double : les tangentes d'inflexion répondent aux cercles osculateurs à (C), menés par le pôle de transformation ; les tangentes doubles aux cercles bitangents à (C) passant également par le pôle.

Supposons encore, chose toujours possible, qu'on ait préalablement fait subir à la courbe (C) une transformation homographique permettant de supposer que tous ses points à l'infini sont distincts ; le pôle de transformation P sera, sur (S), un point multiple à tangentes distinctes.

Transformons encore (S) par la méthode des polaires réciproques ; la transformée (T) n'aura pour points multiples que des points répondant à des tangentes singulières de (S) dont les points de contact sont, ou des points distincts, ou des points d'inflexion. Or, outre les tangentes au point P, la courbe (S) n'a pour tangentes multiples que des tangentes doubles, et à chacune d'elles répond un point double de (T) ; de plus, à chaque tangente d'inflexion de (S) répond un point de rebroussement de (T), et si (T) a d'autres points multiples, ils ne peuvent provenir que de la singularité présentée par (S) au point P. Mais ce point se transforme en une tangente multiple à points de contact distincts, et chacun d'eux est un point ordinaire de (T). Celle-ci remplit donc toutes les conditions du problème.