

A. VACQUANT

**Démonstration géométrique d'une propriété  
des normales à une conique à centre**

*Nouvelles annales de mathématiques 3<sup>e</sup> série*, tome 19  
(1900), p. 502-506

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1900\\_3\\_19\\_502\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19_502_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[L'5b]

**DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE PROPRIÉTÉ  
DES NORMALES A UNE CONIQUE A CENTRE;**

PAR M. A. VACQUANT.

---

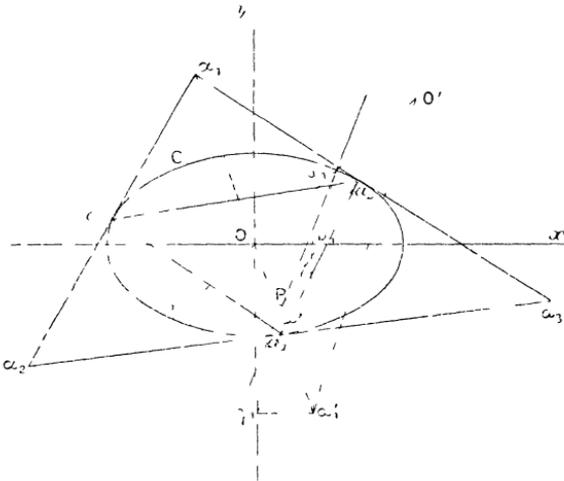
I. THÉORÈME. — *Si un point décrit une normale en  $\omega_1$  à une conique C, les pieds des trois autres normales menées de ce point à C sont les sommets d'un triangle dont les pôles des côtés, par rapport à C, sont sur une hyperbole équilatère H passant par le centre de C, ayant ses asymptotes parallèles aux axes de C et son centre au point  $\omega$  de C diamétralement opposé à  $\omega_1$ .*

Cette propriété est connue; par exemple, elle est indiquée, en partie, sous sa forme corrélatrice dans l'Ouvrage de M. E. Duporcq (*Premiers principes de Géométrie moderne*, p. 70); on la rencontre aussi dans un article de Neuberg (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI).

On peut démontrer très simplement cette proposition en se servant de la relation qui existe entre les pôles de deux cordes d'une conique telles que les normales aux extrémités de ces cordes concourent, savoir : *le pôle de l'une des cordes est le centre de l'autre*, en appe-

lant, avec Laguerre, *centre* d'une droite par rapport à des axes de coordonnées rectangulaires le point dont les projections sur les axes sont symétriques, relativement à l'origine. des points où les axes sont rencontrés par la droite; celle-ci sera la *centrale* du point.

Soient P un point de la normale en  $\omega_1$  à la conique C et  $a_1, a_2, a_3$  les pieds des trois autres normales à C menées par P. La corde  $\omega_1 a_1$  rencontre les axes  $Ox, Oy$



de C en  $\beta_1$  et  $\gamma_1$ ; le point  $\alpha'_1$  qui se projette en  $\beta_1$  et  $\gamma_1$  sur  $Ox$  et  $Oy$  est le symétrique par rapport à O du pôle  $\alpha_1$  de la corde  $a_2 a_3$ . Dans le rectangle  $O\beta_1\alpha'_1\gamma_1$  les diagonales  $O\alpha'_1, \beta_1\gamma_1$  se coupent en leur milieu  $\alpha'$  et sont également inclinées sur  $Ox$  et  $Oy$ . Soit  $O'$  le symétrique de O par rapport à  $\omega_1$ ; la droite  $O'\alpha'_1$ , parallèle à  $\omega_1\alpha'_1$ , et la droite  $O\alpha'_1$  étant également inclinées sur  $Ox, Oy$ , forment deux faisceaux homographiques; les rayons homologues et parallèles de ces faisceaux sont parallèles à  $Ox$  et  $Oy$ ; donc le lieu de  $\alpha'_1$  est une hyperbole équilatère passant en O et  $O'$ , de centre  $\omega_1$ .

Le lieu de  $\alpha_1$ , symétrique de  $\alpha'_1$  par rapport à O, est une hyperbole équilatère H, passant en O, de centre  $\omega$  diamétralement opposé à  $\omega_1$  sur C, ayant ses asymptotes parallèles aux axes de C.

On remarquera qu'il existe une infinité de triangles tels que  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  inscrits à H et circonscrits à C; les normales aux points de contact  $a_1, a_2, a_3$  des côtés d'un triangle  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  avec C concourent en un point situé sur la normale en  $\omega_1$  à C.

*Réciproquement, si une hyperbole équilatère H a son centre en un point  $\omega$  d'une conique C et ses asymptotes parallèles aux axes de C, on peut lui inscrire une infinité de triangles qui soient en même temps circonscrits à C. Les normales aux points de contact des côtés de l'un de ces triangles concourent en un même point; le lieu de ce point est la normale menée à C au point  $\omega_1$  diamétralement opposé à  $\omega$ .*

En effet, si l'on considère la normale en  $\omega_1$  à C et un point P de cette normale, les tangentes à C aux pieds  $a_1, a_2, a_3$  des trois autres normales menées à C par P se coupent deux à deux en des points  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  situés sur une hyperbole équilatère H' passant en O, de centre  $\omega$ , d'asymptotes parallèles à Ox, Oy. Donc H' est identique à H.

II. THÉORÈME. — *Le triangle  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  inscrit à H et circonscrit à C est aussi inscrit à une conique C<sub>1</sub> coaxiale à C.*

En effet, le triangle  $Ox_\infty y_\infty$ , ayant pour sommets O et les points à l'infini sur les axes Ox, Oy, et le triangle  $a_1 a_2 a_3$  sont inscrits dans l'hyperbole d'Apollonius  $\omega_1 a_1 a_3 a_3$ ; donc ces triangles sont conjugués par rap-

port à une conique  $\Gamma$  qui aura dès lors pour axes  $Ox$ ,  $Oy$ . Si l'on prend la polaire réciproque de  $C$  par rapport à  $\Gamma$ , on a une conique  $C'$  coaxiale à  $C$  et inscrite dans  $a_1 a_2 a_3$ ; la polaire réciproque de  $C'$  par rapport à  $C$  est une conique  $C_1$ , coaxiale à  $C$  et passant par  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Les normales en  $a_1, a_2, a_3$  à  $C$  concourent en  $P$  et les normales en  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  à  $C_1$  concourent en un point  $P_1$  de l'hyperbole équilatère  $H$  qui est une hyperbole d'Apollonius pour la conique  $C_1$ .

*Réciproquement, étant données deux coniques coaxiales  $C_1$  et  $C$  telles qu'il existe un triangle  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  inscrit à  $C_1$  et circonscrit à  $C$ , les normales à  $C_1$  en  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  concourent; il en est de même des normales à  $C$  aux points de contact  $a_1, a_2, a_3$  de  $C$  avec les côtés du triangle  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ . Le centre de l'hyperbole d'Apollonius  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  est sur  $C$ .*

En effet, il existe une infinité de triangles  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  inscrits à  $C_1$  et circonscrits à  $C$ ; soient  $T$  et  $T'$  deux de ces triangles, il existe une conique  $\Gamma$  conjuguée à la fois aux triangles  $T$  et  $T'$ ; il est clair que si l'on prend la polaire réciproque de  $C_1$  par rapport à  $\Gamma$  on obtient la conique  $C$ ; d'ailleurs le triangle  $Ox_\infty y_\infty$  conjugué à la fois par rapport aux coniques  $C$  et  $C_1$  sera conjugué par rapport à  $\Gamma$ ; les triangles  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  et  $Ox_\infty y_\infty$  conjugués à  $\Gamma$  ont leurs sommets sur une conique qui est une hyperbole d'Apollonius relative à  $C_1$ ; donc les normales  $C_1$  aux points  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  concourent (E. DUPORC, *loc. cit.*, n° 101).

Si  $C'$  est la polaire réciproque de  $C_1$  par rapport à  $C$ , le triangle  $a_1 a_2 a_3$  est inscrit à  $C$  et circonscrit à  $C'$ . Comme  $C$  et  $C'$  sont coaxiales, les normales  $a_1, a_2, a_3$  à  $C$  concourent, d'après ce qui précède, en un certain point  $P$ ; de plus, l'hyperbole d'Apollonius  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  a

son centre sur  $C$  au point  $\omega$  diamétralement opposé au pied  $\omega_1$  de la quatrième normale menée à  $C$  par  $P$ ; car si  $P$  décrit la normale en  $\omega_1$  à  $C$ , les points  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  décrivent une hyperbole équilatère passant en  $O, x_\infty, y_\infty$ , de centre  $\omega$ , coïncidant avec l'hyperbole d'Apollonius  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  relative à la conique  $C_1$ .