Nouvelles annales de mathématiques

Issaly

Sur les équations fondamentales de la théorie des surfaces, rapportées à deux trièdres birectangles supplémentaires mobiles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 49-59

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__49_0>

[K6b]

SUR LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES SURFACES, RAPPORTÉES A DEUX TRIÈDRES BIRECTANGLES SUPPLÉMENTAIRES MOBILES;

PAR M. l'abbé ISSALY.

1. Considérons comme prélude une ligne, tout d'abord quelconque (s), située sur une surface F″, ou même (¹) sur une pseudo-surface $\mathfrak{F}''$, tangentes, à l'origine M, au plan des XY, et supposons en outre que l'axe des X du trièdre *trirectangle* mobile MXYZ, ou T, coïncide avec la tangente en M à la courbe.

Soient a, b, c, a', ... les cosinus directeurs des arêtes de ce trièdre, par rapport au trièdre fixe T_0, et soit enfin R le rayon de première courbure de la ligne proposée. La simple projection sur l'axe OX_0, par exemple, d'un triangle isoscèle ayant pour longueur de ses côtés égaux l'unité, nous donnera

$$a + d\sigma \cos(R, X_0) - (a + da) = 0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{da}{d\sigma} = \cos(R, X_0).$$

Mais on a, par définition, $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R}$; donc

$$\frac{da}{ds} = \frac{\cos(R, X_0)}{R} = \frac{a'}{R_y} + \frac{a''}{R_z} = a'r - a''q,$$

(¹) *Voir* notre *Théorie des systèmes triples de pseudo-surfaces* (*Nouvelles Annales*, p. 204; 1890).

en posant

$$r = \frac{1}{R_y} \qquad \text{et} \qquad q = -\frac{1}{R_z}.$$

Que si maintenant, d'isolée qu'elle était, la courbe (3) devient une ligne *coordonnée*, on conçoit sans peine que, par une généralisation ou une extension convenables de la même méthode, on puisse établir *geométriquement* ([1]) le système qui suit :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial s} &= a'r - a''q, \\ \frac{\partial a'}{\partial s} &= a''p - ar, \\ \frac{\partial a''}{\partial s} &= aq - a'p, \end{aligned} \right.$$

aussi bien que son analogue

$$(1') \qquad \frac{\partial a}{\partial s'} = a'r' - a''q',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

De là diverses conséquences dignes de toute attention.

1° Lorsqu'il s'agit de pseudo-surfaces, les arcs ds, ds' doivent être regardés comme *indépendants*. S'il s'agit de surfaces, au contraire, on a, pour les soumettre au calcul, les expressions usuelles

$$ds = A\,du, \qquad ds' = A'\,du'.$$

2° On sait que, de nos jours, le système communément adopté pour tenir lieu des relations (1) est

$$\frac{\partial a}{\partial u} = a'r - a''q,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

([1]) Pour plus de détails, *voir* dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* l'article intitulé *Nouveaux principes de la théorie des congruences de droites*; 1888.

Or, le calcul précédent fait voir qu'un tel système est manifestement *fautif* et qu'on doit, bon gré mal gré, dans le cas des surfaces notamment, le remplacer par cet autre

$$(1') \qquad \frac{\partial a}{\partial s} = \frac{1}{A}\frac{\partial a}{\partial u} = a'r - a''q,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3° Il est vrai que, pour neutraliser ou compenser l'erreur ainsi commise, on prend $r = \frac{A}{R_y}$, $q = -\frac{A}{R_z}$, au lieu de $r = \frac{1}{R_y}$, $q = -\frac{1}{R_z}$; mais une telle substitution n'en est pas moins vicieuse, ainsi que la démonstration ci-dessus le prouve quasi par surcroît.

4° Au reste, la compensation indiquée est loin d'être toujours aussi efficace qu'on pourrait le croire, car, substituer, par exemple, la condition analytique explétive

$$A'p + Aq' = 0,$$

à la condition géométrique exacte $p + q' = 0$, dans les calculs relatifs aux surfaces en général, c'est se mettre dans l'impossibilité d'établir *directement* la propriété caractéristique de toute surface, laquelle consiste, on le sait, dans l'orthogonalité de ses lignes de courbure. Mais nous aurons à revenir tout à l'heure sur ce point important.

2. Au trièdre trirectangle mobile qui nous a servi jusqu'ici, substituons deux trièdres *birectangles* supplémentaires MXYZ ou T, d'angle Φ, et MX_1Y_1Z ou T_1, d'angle $\pi - \Phi$. Soient a, b, c, a', ... et a_1, b_1, c_1, a'_1, ... les cosinus directeurs de leurs arêtes respectives. Par rapport au premier de ces trièdres, le sys-

tème (1′) devra être remplacé par le suivant :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial s} &= \frac{1}{A}\frac{\partial a}{\partial u} = a'_1 r - a''_1 q \sin\Phi,\\ \frac{\partial a'}{\partial s} &= \frac{1}{A}\frac{\partial a'}{\partial u} = a''_1 p \sin\Phi - a_1 n,\\ \frac{\partial a''}{\partial s} &= \frac{1}{A}\frac{\partial a''}{\partial u} = a_1 q - a'_1 p,\end{aligned}\right.$$

dans lequel

$$(3)\qquad n = r + \frac{\partial\Phi}{\partial s} = r + \frac{1}{A}\frac{\partial\Phi}{\partial u},$$

et où les cosinus qui y figurent sont liés entre eux par les relations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} a\sin\Phi &= a_1 + a'_1\cos\Phi,\\ a'\sin\Phi &= a'_1 + a_1\cos\Phi,\\ a'' &= a''_1.\end{aligned}\right.$$

Par rapport au trièdre T_1, on aura de même

$$(2')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial s} &= \frac{1}{A}\frac{\partial a_1}{\partial u} = a' n_1 - a'' q_1 \sin\Phi,\\ \frac{\partial a'_1}{\partial s} &= \frac{1}{A}\frac{\partial a'_1}{\partial u} = a'' p_1 \sin\Phi - a r_1,\\ \frac{\partial a''_1}{\partial s} &= \frac{1}{A}\frac{\partial a''_1}{\partial u} = a q_1 - a' p,\end{aligned}\right.$$

avec

$$(3')\qquad n_1 = r_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial s} = r_1 + \frac{1}{A}\frac{\partial\Phi}{\partial u};$$

ce qui, rapproché de (3), entraîne, remarquons-le dès à présent,

$$n_1 = n, \qquad r_1 = r.$$

Quant à la *démonstration* de ces formules, on la trouvera implicitement renfermée dans notre Mémoire déjà cité de 1890. Disons toutefois que les composantes *orthogonales* qui entrent dans les formules, beaucoup plus générales, de ce premier Travail, se rattachent à nos composantes *obliques* actuelles par les relations simples

$$(5)\qquad \begin{cases} p + q\cos\Phi = p = p_1 \sin\Phi, \\ q + p\cos\Phi = q = q_1\sin\Phi, \\ \qquad\qquad r = r = r_1, \end{cases}$$

et par leurs inverses

$$(5')\qquad \begin{cases} p_1 - q_1\cos\Phi = p_1 = p\sin\Phi, \\ q_1 - p_1\cos\Phi = q_1 = q\sin\Phi, \\ \qquad\qquad r_1 = r_1 = r. \end{cases}$$

3. Appliquons immédiatement ces éléments de calcul à la rectification ou à la correction (dans le sens expliqué plus haut) du premier des deux systèmes ternaires usuels de la théorie des surfaces.

A cet effet, si x_0, y_0, z_0 désignent les coordonnées de l'origine M, par rapport au trièdre *fixe* T_0, on aura

$$dx_0 = \frac{\partial x_0}{\partial u}du + \frac{\partial x_0}{\partial u'}du' = a\,ds + a'ds' = \mathrm{A}a\,du + \mathrm{A}'a'\,du,$$

et, par suite,

$$(6)\qquad \frac{\partial x_0}{\partial u} = \mathrm{A}a, \qquad \frac{\partial x_0}{\partial u'} = \mathrm{A}'a'.$$

Égalant entre elles les dérivées $\frac{\partial^2 x_0}{\partial u\,\partial u'}$ et $\frac{\partial^2 x_0}{\partial u'\,\partial u}$, et annulant, après les avoir développés, les coefficients des cosinus a, a'_1, a''_1, on obtient (sous la forme la plus avantageuse pour nos calculs ultérieurs) le système exact annoncé, savoir :

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'} = -\dfrac{\mathrm{A}\mathrm{A}'}{\sin\Phi}(n - r'\cos\Phi), \\ \dfrac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u} = \dfrac{\mathrm{A}\mathrm{A}}{\sin\Phi}(r' - n\cos\Phi), \\ \qquad p + q' = 0. \end{cases}$$

De lui-même, on le voit, il nous fournit, sous sa vraie forme, la condition *caractéristique* dont nous avons parlé précédemment. Que cette condition soit telle, en effet, cela résulte de ce que l'équation générale des lignes de courbure de la pseudo-surface $\mathfrak{F}''$ étant, comme on peut s'en assurer, à part,

$$p_1\, ds^2 + (q_1 + p'_1)\, ds\, ds' + q'_1\, ds'^2 = 0,$$

ces mêmes lignes ne peuvent devenir celles de la surface F″ que si la condition classique d'orthogonalité

$$p_1 + q'_1 + (q_1 + p'_1) \cos\varphi = 0,$$

ou bien, d'après (5),

$$p + q' = 0,$$

se trouve satisfaite, ce qui est justement la troisième des équations (7).

Au surplus, si l'on reprend le calcul précédent au moyen des identités corrélatives

$$(6')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_0}{\partial u} &= \frac{\mathrm{A}}{\sin\Phi}(a_1 + a'_1 \cos\Phi), \\ \frac{\partial x_0}{\partial u'} &= \frac{\mathrm{A}'}{\sin\Phi}(a'_1 + a_2 \cos\Phi), \end{aligned}\right.$$

le trièdre T_1 permettra de contrôler les résultats acquis (7) à l'aide du système similaire et *équivalent*

$$(7')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'} &= -\frac{\mathrm{AA}'}{\sin\Phi}(n_1 - r'_1 \cos\Phi), \\ \frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u} &= \frac{\mathrm{AA}'}{\sin\Phi}(r'_1 - n_1 \cos\Phi), \\ p_1 + q'_1 &- (q_1 + p'_1)\cos\Phi = 0. \end{aligned}\right.$$

4. Arrivons au second système ternaire de la théorie qui nous occupe, et pour cela reprenons d'abord le trièdre T. C'est de l'identité $\frac{\partial^2 a}{\partial u\, \partial u'} = \frac{\partial^2 a}{\partial u'\, \partial u}$ qu'il nous

faudra partir ici. Mais, sans nous engager dans un calcul analogue au précédent, il sera beaucoup plus simple d'utiliser les formules (19) de notre premier Mémoire, en les adaptant aux variables s et s', et l'on aura

$$(8) \qquad \frac{\partial(\mathrm{A}p_1)}{\partial u'} - \frac{\partial(\mathrm{A}'p'_1)}{\partial u} = \mathrm{AA}'(qn' - nq'),$$

ou bien (en vue de réductions prochaines)

$$\mathrm{A}\frac{\partial p_1}{\partial u'} - \mathrm{A}'\frac{\partial p'_1}{\partial u} = -p'_1\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'} + p_1\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u} + \ldots.$$

Passant de ces projections orthogonales aux projections obliques correspondantes (5′) et éliminant $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'}$, $\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u}$ à l'aide de leurs premières expressions (7), il viendra (après avoir divisé les deux membres par AA')

$$\frac{\partial(p\sin\Phi)}{\partial s'} - \frac{\partial(p'\sin\Phi)}{\partial s} = \left\{ \begin{array}{l} p(n - r'\cos\Phi) + p'(r' - n\cos\Phi) \\ \quad + n'(q + p\cos\Phi) - n(q' + p'\cos\Phi). \end{array} \right.$$

Il ne reste plus qu'à développer ces deux dérivées partielles, puis à y remplacer $\frac{\partial\Phi}{\partial s}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial s'}$ par $n - r$ ou $n' - r'$ (6) pour obtenir la première des équations cherchées. Et comme les deux autres se calculent de la même façon, nous les grouperons toutes dans le Tableau qui suit :

$$(9)\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial p}{\partial s'} - \frac{\partial p'}{\partial s}\right)\sin\Phi = (pn + p'r') + (qn - nq') - p'(n + r)\cos\Phi, \\ \left(\frac{\partial q}{\partial s'} - \frac{\partial q'}{\partial s}\right)\sin\Phi = (qn + q'r') + (rp' - pr') - q(n' + r')\cos\Phi, \\ \left(\frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{\partial r'}{\partial s}\right)\sin\Phi = (rn + r'^2) + (pq' - qp')\sin^2\Phi - r'(n + r)\cos\Phi; \end{array} \right.$$

en rappelant que ∂s, $\partial s'$ peuvent, si bon semble, y être remplacés par $\mathrm{A}\,\partial u$, $\mathrm{A}'\,\partial u'$ et qu'on a en sus $p + q' = 0$ [1].

---

[1] L'équation de l'indicatrice d'une surface quelconque pouvant

Lorsque l'angle Φ est constant, il vient $n = r$, $n' = r'$, et s'il est droit ces derniers termes disparaissent.

5. Vérifions notre Tableau dans le cas remarquable où les axes MX, MY coïncident avec les tangentes, à l'origine, des lignes de courbure de la surface F″. Outre les conditions précédentes, on a encore $p = q' = 0$ par hypothèse. D'autre part on peut constater (n° 1) qu'avec $r = \frac{1}{R_y}$, $q = -\frac{1}{R_z}$, on a également $p' = \frac{1}{R'_z}$, $r' = -\frac{1}{R'_x}$. Tenant compte de toutes ces particularités, le système (9) se réduit à

$$(9')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{1}{R'_z}\right) = \dfrac{1}{R'_x}\left(\dfrac{1}{R'_z} - \dfrac{1}{R_z}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial s'}\left(\dfrac{1}{R_z}\right) = \dfrac{1}{R_y}\left(\dfrac{1}{R_z} - \dfrac{1}{R'_z}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial s'}\left(\dfrac{1}{R_y}\right) + \dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{1}{R'_x}\right) = \dfrac{1}{R_y^2} + \dfrac{1}{R'^2_x} + \dfrac{1}{R_z R'_z}. \end{cases}$$

Or, sous cette forme on reconnaît à vue trois des neuf relations différentielles signalées par Lamé dans ses recherches sur les systèmes orthogonaux, à savoir celles qui sont relatives à la surface F″, tangente en M au plan des XY.

6. Le trièdre T_1 donne lieu à des considérations ana-

---

s'écrire

$$qX^2 - (p - q')XY - p'Y^2 = -\frac{1}{\sin\Phi}.$$

On voit qu'elle ne peut représenter une hyperbole équilatère que si l'on a

$$q - p' + (p - q')\cos\Phi = 0,$$

ou bien (5)

$$p_1 - p'_1 = 0.$$

Telle est, dès lors, sous sa double forme, la condition (auxiliaire) qui sert à spécifier les *surfaces minima*.

logues, que nous allons retracer en peu de mots. Et d'abord il n'y a rien à ajouter à ce qui a été dit au sujet du premier des systèmes ternaires déjà étudié (n° 3). En ce qui concerne le second, les formules (20) de notre premier Mémoire nous donnent immédiatement

$$(10)\qquad \frac{\partial(\mathrm{A}p)}{\partial u'}-\frac{\partial(\mathrm{A}'p')}{\partial u}=\mathrm{AA}'(q_1r'_1-r_1q'_1),$$

ou bien

$$\mathrm{A}\frac{\partial p}{\partial u'}-\mathrm{A}'\frac{\partial p'}{\partial u}=-p\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u'}+p'\frac{\partial \mathrm{A}'}{\partial u}+\ldots.$$

Procédant à l'exemple du premier cas, on trouve

$$\frac{\partial(p_1\sin\Phi)}{\partial u'}-\frac{\partial(p'_1\sin\Phi)}{\partial u}=\left\{\begin{array}{l}p_1(n_1-r'_1\cos\Phi)+p'_1(r'_1-n_1\cos\Phi)\\ \quad+r'_1(q_1-p_1\cos\Phi)-r_1(q'_1-p'_1\cos\Phi);\end{array}\right.$$

puis enfin, conjointement avec la troisième des relations (7'),

$$(11)\quad\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial p_1}{\partial s'}-\dfrac{\partial p'_1}{\partial s}\right)\sin\Phi=(p_1n_1+p'_1r'_1)+(q_1r'_1-r_1q'_1)-p_1(r'_1+n'_1)\cos\Phi,\\[2ex] \left(\dfrac{\partial q_1}{\partial s'}-\dfrac{\partial q'_1}{\partial s}\right)\sin\Phi=(q_1n_1+q'_1r'_1)+(n_1p'_1-p_1n'_1)-q'_1(r_1+n_1)\cos\Phi,\\[2ex] \left(\dfrac{\partial n_1}{\partial s'}-\dfrac{\partial n'_1}{\partial s}\right)\sin\Phi=(n_1^2+n'_1r'_1)\\ \qquad\qquad+(p_1q'_1-q_1p'_1)\sin^2\Phi-n_1(r'_1+n'_1)\cos\Phi.\end{array}\right.$$

Que si, à titre de vérification, on se propose de passer de ce dernier système à son corrélatif (9) et *vice versa* il sera indispensable de reprendre avant tout les variables u, u' et, par elles, les fonctions A, A'. On s'aidera ensuite (pour la première de ces opérations) de la seconde des formes données aux relations (3), et l'on tiendra compte enfin utilement de l'identité suivante :

$$pq'-qp'=p_1q'_1-q_1p'_1.$$

Dans le cas particulier où Φ est constant, il suffira de faire partout $n_1=r_1$, $n'_1=r'_1$.

7. Les développements dans lesquels nous venons d'entrer au sujet des surfaces ne doivent pas nous faire perdre de vue la part que dans ces questions réclament à bon droit, elles aussi, les pseudo-surfaces. C'est même par ces dernières que nous aurions dû commencer, si nous nous étions astreint à suivre pas à pas la même marche que dans notre premier Travail. Quoi qu'il en soit, on vérifiera sans peine qu'en considérant s, s', non plus comme des fonctions de u et de u', mais comme des variables indépendantes, il vient, pour correspondre au trièdre T et prendre la place des équations (9),

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial p}{\partial s'} - \frac{\partial p'}{\partial s}\right)\sin\Phi = (qn' - nq') - (rp' - pr')\cos\Phi,\\
&\left(\frac{\partial q}{\partial s'} - \frac{\partial q'}{\partial s}\right)\sin\Phi = (rp' - pr') - (qn' - nq')\cos\Phi,\\
&\left(\frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{\partial r'}{\partial s}\right)\sin\Phi = (pq' - qp')\sin^2\Phi - \mathrm{K}''.
\end{aligned}\right.$$

On trouvera de même, pour correspondre à T_1 et remplacer les équations (11),

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial p_1}{\partial s'} - \frac{\partial p'_1}{\partial s}\right)\sin\Phi = (q_1 r'_1 - r_1 q'_1) + (n_1 p'_1 - p_1 n'_1 \cos\Phi,\\
&\left(\frac{\partial q_1}{\partial s'} - \frac{\partial q'_1}{\partial s}\right)\sin\Phi = (n_1 p'_1 - p_1 n'_1) + (q_1 r'_1 - r_1 q'_1 \cos\Phi,\\
&\left(\frac{\partial n_1}{\partial s'} - \frac{\partial n'_1}{\partial s}\right)\sin\Phi = (p_1 q'_1 - q_1 p'_1)\sin^3\Phi = \mathrm{K}''.
\end{aligned}\right.$$

Dans le cas d'exception où $\Phi = \text{const.}$, les deux premières équations de (12) peuvent, à cause de $n = r = r_1$ et de $n' = r' = r'_1$, s'écrire plus simplement ainsi en vertu des relations (5')

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial s'} - \frac{\partial p'}{\partial s} = q_1 r'_1 - r_1 q'_1,\\
&\frac{\partial q}{\partial s'} - \frac{\partial q'}{\partial s} = r_1 p'_1 - p_1 r'_1.
\end{aligned}\right.$$

Pareillement, les deux premières de (13) reviennent, d'après (5), à

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial s'} - \frac{\partial p'_1}{\partial s} &= qr' - rq', \\ \frac{\partial q_1}{\partial s'} - \frac{\partial q'_1}{\partial s} &= rp' - pr', \end{aligned}\right.$$

Quant aux dernières équations des deux systèmes, on établira leur coïncidence absolue en observant qu'outre $K'' = K''_1$ (selon une remarque déjà faite), on a actuellement par hypothèse $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial s'} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s' \partial s}$ et, par suite, à cause de $n = n_1$, $n' = n'_1$

$$\frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{\partial r'}{\partial s} = \frac{\partial\left(n_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)}{\partial s'} - \frac{\partial\left(n'_1 - \frac{\partial \Phi}{\partial s'}\right)}{\partial s} = \frac{\partial n_1}{\partial s'} - \frac{\partial n'_1}{\partial s},$$

ce qui démontre bien l'identité des équations considérées.