NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

Formes réduites d'une relation triplement linéaire entre trois variables

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 494-498
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__494_1>

[M²3hβ]

FORMES RÉDUITES D'UNE RELATION TRIPLEMENT LINÉAIRE ENTRE TROIS VARIABLES;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Considérons la relation triplement linéaire

$$Axyz + B_1 yz + \ldots + C_1 x + \ldots + D = 0. \tag{1}$$

Si l'on suppose

$$AC_i - B_j B_k = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

en posant $x = x' + a$, $y = y' + b$, $z = z' + c$, on peut faire que, dans la relation de même forme qui lie x', y', z', on ait

$$B'_1 C'_1 = B'_2 C'_2 = B'_3 C'_3 = AD';$$

en supposant $D' = 0$ et en supprimant les accents, on a

$$Axyz + B_1 yz + \ldots + AD\left(\frac{x}{B_1} + \ldots\right) + D = 0$$

ou

$$AB_1 B_2 B_3 \frac{x}{B_1}\frac{y}{B^2}\frac{z}{B_3} + B_1 B_2 B_3 \left(\frac{y}{B_2}\frac{z}{B_3} + \ldots\right)$$
$$+ AD\left(\frac{x}{B_1} + \ldots\right) + D = 0.$$

Si l'on pose

$$\frac{\frac{x}{B_1}}{X} = \frac{\frac{y}{B_2}}{Y} = \frac{\frac{z}{B_3}}{Z} = k,$$

on a donc

$$k^3 AB_1 B_2 B_3 XYZ + k^2 B_1 B_2 B_3 (YZ + \ldots)$$
$$+ k\,AD(X + \ldots) + D = 0.$$

Le rapport des coefficients pris de deux en deux est le même, et l'on peut disposer de k pour que ce rapport ait la valeur $+1$ ou la valeur -1, selon le signe du produit $B_1 B_2 B_3 D$; il suffit de poser

$$\frac{k^2 B_1 B_2 B_3}{D} = \varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1);$$

on a ainsi les formes réduites

$$(2) \qquad \frac{X + Y + Z + \varepsilon XYZ}{1 + \varepsilon(YZ + ZX + XY)} = H.$$

D'ailleurs, ε est le signe du discriminant du premier membre de la relation (1) rendue homogène; on peut le voir en considérant la relation (2).

On peut exprimer X, Y, Z par les formules

$$(3)\quad \varepsilon = -1 \quad \begin{cases} X = \operatorname{tang} u, \quad Y = \operatorname{tang} v, \quad Z = \operatorname{tang} w, \\ u + v - w = \text{const.} = 0, \end{cases}$$

$$(3')\quad \varepsilon = +1 \quad \begin{cases} X = \operatorname{Th} u, \quad Y = \operatorname{Th} v, \quad Z = \operatorname{Th} w. \\ u - v + w = \text{const.} = 0, \end{cases}$$

les Th étant des tangentes hyperboliques.

A priori, sauf des conditions d'inégalité et des conditions de réalité qui se trouvent vérifiées d'après ce qui précède, on doit pouvoir exprimer les variables x, y, z de la relation (1) par des formules de la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{x-a}{L} = T(u), \quad \dfrac{y-b}{M} = T(v), \quad \dfrac{z-c}{N} = T(w), \\ u + v + w = \text{const.} = 0, \end{cases}$$

les T étant des tangentes circulaires ou hyperboliques; on aurait pu craindre toutefois que les relations (1) amenées par les formules (4) ne fussent soumises à une condition invariante : on a vu qu'il n'en est rien.

2. Voici une application : Soit S une surface du troisième ordre ayant trois points doubles A, B, C; nous supposerons, pour plus de simplicité, que ces points sont les points à l'infini sur trois axes de coordonnées Ox, Oy, Oz.

L'équation de la surface est évidemment linéaire par rapport à chacune des variables x, y, z; elle est de la forme (1). Par un transport d'origine et en remplaçant x, y, z par des quantités proportionnelles X, Y, Y, on arrive en général à l'équation (2) ou aux formules (3) et (3'); on pourrait d'ailleurs employer les formules (4). Parmi les cas écartés se trouve le cas où l'on aurait

$$D' = 0, \qquad C'_1 = 0, \qquad C'_2 = 0, \qquad C'_3 = 0;$$

la surface aurait alors un quatrième point double : ce serait la surface corrélative de la surface de Steiner ; le discriminant dont on a parlé serait alors nul.

Cherchons les droites de la surface représentée par l'équation (2). Comme A, B, C sont des points doubles, on a d'abord les droites BC, CA, AB. Une autre droite située sur la surface perce le plan ABC en un point situé sur l'une des droites BC, CA, AB : elle est donc dans un plan parallèle à l'un des plans de coordonnées. Comme un plan $X = X_1$ coupe la surface suivant une conique passant en B et C, si cette conique se compose de deux droites, deux cas sont possibles : l'une des droites passera en B, l'autre passant en C, ou bien l'une des deux droites sera confondue avec BC, le plan $X = X_1$ étant alors tangent à la surface le long de BC. On obtient les droites en question comme il suit :

1° Avec les formules (3'), l'hypothèse $X = \sqrt{\varepsilon} = 1$, ou $\operatorname{Th} u = 1$, ou $u = \infty$, donne v ou w égal à $-\infty$, $\operatorname{Th} v$ ou $\operatorname{Th} w$ égal à -1, c'est-à-dire que la relation entre Y et Z devient

$$(Y + 1)(Z + 1) = 0;$$

avec les formules (3), l'hypothèse $X = \sqrt{\varepsilon} = i$ ou $\operatorname{tang} u = i$ ou $u = i\infty$, donne de même

$$(Y + i)(Z + i) = 0.$$

Si l'on considère alors l'hexaèdre dont les plans de trois faces ont pour équations

$$X = \sqrt{\varepsilon}, \qquad Y = \sqrt{\varepsilon}, \qquad Z = \sqrt{\varepsilon},$$

les plans des trois autres faces ayant pour équations

$$X = -\sqrt{\varepsilon}, \qquad Y = -\sqrt{\varepsilon}, \qquad Z = -\sqrt{\varepsilon},$$

les six droites à distance finie obtenues en coupant le premier trièdre par le second dessinant sur la surface un contour hexagonal gauche $A'B''C'A''B'C''A'$.

2° Avec les formules (3) ou (3'), l'hypothèse $u = \theta$ donne

$$v + w = 0,$$

c'est-à-dire que l'hypothèse $X = H$ donne

$$Y + Z = 0;$$

le plan $X = H$ est donc tangent à la surface le long de BC, et il donne sur la surface une droite située dans le plan des deux droites $B'C''$ et $B''C'$. Chacun des deux plans $Y = H$, $Z = H$ donne de même une droite de la surface.

Un calcul direct, effectué en partant de $X = X_1$, montre que la surface n'a pas d'autres droites. Si l'on compare ce calcul à celui que doit donner la surface générale du troisième ordre contenant les droites BC, CA, AB, on trouve qu'il faut ici compter quatre fois chacune de ces trois droites, deux fois chacune des six droites $A'B''$, ..., et une fois chacune des trois autres droites

$$3 \times 4 + 6 \times 2 + 3 \times 1 = 27.$$

Si l'on effectue le calcul sur l'équation (1), on n'aperçoit pas aussi facilement le contour hexagonal dont il a été question (Cf. *Nouvelles Annales*, p. 141; 1894).

3. M. d'Ocagne a appliqué la méthode nomographique à la relation (1), en traduisant cette relation par l'alignement de trois points, dans le cas où le discriminant est positif ou nul (*Bulletin de la Société Mathématique*, p. 53; 1898). Pour le cas où le discriminant est négatif, les formules (3) donnent une relation graphique assez simple entre les trois variables auxiliaires X, Y, Z.