NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST CESÀRO

Sur une classe de courbes planes remarquables

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 489-494

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__489_1>

[O2]

SUR UNE CLASSE DE COURBES PLANES REMARQUABLES;

PAR M. ERNEST CESÀRO.

Il y a des liaisons simples et nombreuses entre les courbes représentées par l'équation intrinsèque

$$s = \int \frac{\lambda\, d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\mu} - 1}}, \tag{1}$$

λ et μ étant deux constantes, dont la première peut être prise indifféremment avec le signe + ou —. Il faut remarquer que, pour $\mu = -2$, l'équation (1) représente une ligne cycloïdale, à savoir la *cycloïde* pour $\pm\lambda = 1$, une *épicycloïde* pour $\lambda^2 > 1$, une *hypocycloïde* pour $\lambda^2 < 1$. En particulier, pour $\pm\lambda = 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, *etc.*, on trouve respectivement l'*épicycloïde à deux rebroussements*, la *cardioïde*, l'*astroïde*, l'*hypocycloïde à trois rebroussements*, etc. Pour $\mu = -1$ la courbe représentée par l'équation (1) est *parallèle à la ligne cycloïdale*, qui correspond à la même valeur de λ. Pour $\mu = 1$ la même équation représente une *alysoïde;* et, en particulier, si $\pm\lambda = \frac{1}{2}$, la *chaînette*. Elle représente aussi, pour $\mu = 2$ et $\pm\lambda = 1$, la *chaînette d'égale résistance;* pour $\mu = 4$ et $\pm\lambda = 3$, la *lemniscate de Bernoulli;* pour $\mu = \frac{2}{3}$ et $\pm\lambda = \frac{1}{3}$, la *parabole;* pour $\mu = \frac{4}{3}$ et

$\pm\lambda = \frac{1}{3}$, l'*hyperbole équilatère*. Enfin, plus généralement, pour $\pm\lambda = \mu - 1$ l'équation (1) représente une *spirale sinusoïde*, pour $\pm\lambda = \frac{1}{2}\mu \gtrless 1$ une *ligne de Ribaucour*, et pour $\pm\lambda = \mu \gtrless 1$ une autre importante famille de courbes, caractérisées par la propriété que leurs circonférences osculatrices, réduites dans un rapport constant autour des points de contact correspondants, au lieu de *passer par un point fixe*, comme dans les spirales sinusoïdes, ou d'être *normales à une même droite*, comme dans les lignes de Ribaucour, sont *tangentes à une droite fixe*. Le cas excepté ($\pm\lambda = 1$, $\mu = 1$) est celui d'une alysoïde particulière $\left(\rho = a + \frac{s^2}{4a}\right)$, lieu des points milieux des rayons de courbure d'une chaînette d'égale résistance.

Prenons comme axes (mobiles) la tangente et la normale en un point quelconque M d'une courbe (1), et partageons le rayon de courbure en M dans un rapport constant par un point M'. On sait [1] que les variations absolues des coordonnées de ce point ($x = 0$, $y = k\rho$) sont données par les formules

$$(2) \qquad \dot{x} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} + 1, \qquad \dot{y} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho},$$

qui deviennent, dans le cas actuel, $\dot{x} = 1 - k$, $\dot{y} = k\frac{d\rho}{ds}$, d'où l'on déduit, pour exprimer l'arc de (M'),

$$\frac{ds'}{ds} = \sqrt{(1-k)^2 + k^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}.$$

D'autre part on a, en vertu de (1),

$$\left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu = 1 + \lambda^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2.$$

---

[1] *Geometria intrinseca*, p. 20.

Donc, si l'on attribue à k l'une ou l'autre des valeurs suivantes

$$k_1 = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, \qquad k_2 = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

on obtient deux lignes (M_1) et (M_2), dont les arcs sont donnés par les formules

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{\lambda + 1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2}}, \qquad \frac{ds_2}{ds} = \frac{1}{\lambda - 1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2}},$$

de sorte que

$$(3) \qquad (\lambda + 1)s_1 = (\lambda - 1)s_2 = \int \frac{\lambda\, d\rho}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-\mu}}}.$$

Comme on a, d'ailleurs, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 2$, on voit que *les deux lignes partagent harmoniquement les rayons de courbure de* (M). En outre le coefficient angulaire de la tangente à (M′) est

$$\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{k}{1 - k}\,\frac{d\rho}{ds} = \pm\lambda\frac{d\rho}{ds} = \pm\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\mu} - 1}.$$

Il en résulte que les inclinaisons des tangentes à (M_1) et (M_2) sur la tangente à (M) sont deux angles supplémentaires, φ et $\pi - \varphi$, définis par la formule

$$\cos\varphi = \left(\frac{\rho}{a}\right)^{-\frac{\mu}{2}}.$$

Donc (M_1) et (M_2) peuvent être considérées comme *les deux branches de l'enveloppe d'une circonférence* Ω, qui joue par rapport à (M) le même rôle que la circonférence directrice pour les lignes cycloïdales, puisque *le centre de courbure de* (M), *en tout point* M, *appartient à la polaire de* M *par rapport à* Ω. Le centre de Ω

est un point M_0, dont les coordonnées

$$(4)\qquad x = -\frac{\lambda^2\rho}{\lambda^2-1}\frac{d\rho}{ds}, \qquad y = \frac{\lambda^2\rho}{\lambda^2-1},$$

sont proportionnelles aux coordonnées du centre de courbure de la développée de (M). Donc ce dernier point se trouve toujours, comme dans le cas ($\mu = -2$) des lignes cycloïdales, sur le diamètre de Ω, qui passe par M.

Ce qu'il y a de remarquable c'est que *les courbes* (M_0), (M_1), (M_2) *appartiennent toutes à la classe définie par l'équation* (1). Remarquons d'abord qu'on a

$$d\varphi = -\frac{1}{\sin\varphi}\, d\left(\frac{\rho}{a}\right)^{-\frac{\mu}{2}} = \frac{\mu\cot\varphi}{2\rho}\, d\rho = \frac{\mu\, ds}{2\lambda\rho},$$

d'où l'on déduit l'angle de contingence de (M′) :

$$\frac{ds'}{\rho'} = \frac{ds}{\rho} \pm d\varphi = \left(1 \pm \frac{\mu}{2\lambda}\right)\frac{ds}{\rho}.$$

Les rayons de courbure de (M_1) et (M_2) sont donc

$$\rho_1 = \frac{2\lambda a}{(\lambda+1)(2\lambda-\mu)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2}+1},$$

$$\rho_2 = \frac{2\lambda a}{(\lambda-1)(2\lambda-\mu)}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2}+1}.$$

On vérifie aisément que *les centres de courbure de* (M_1) *et* (M_2) *sont en ligne droite avec le centre de courbure de* (M). Il suffit de porter les derniers résultats dans les formules (3) pour trouver que (M_1) et (M_2) sont définies, parmi les courbes (1), par les valeurs suivantes des paramètres λ et μ :

$$\lambda_1 = \frac{2\lambda-\mu}{\mu+2}, \qquad \lambda_2 = \frac{2\lambda-\mu}{\mu-2}, \qquad \mu_1 = \mu_2 = \frac{2\mu}{\mu+2}.$$

Quant à (M_0), l'application des formules (2) aux coordonnées (4) donne

$$x = -\frac{1}{2}\frac{\mu+2}{\lambda^2-1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu, \qquad y = 0.$$

Comme on devait s'y attendre, les tangentes à (M) et (M_0) en deux points correspondants sont parallèles. Il s'ensuit

$$\frac{ds_0}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\mu+2}{\lambda^2-1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu, \qquad \frac{ds_0}{\rho_0} = \frac{ds}{\rho},$$

d'où

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} s_0 &= \frac{\lambda}{2}\frac{\mu+2}{\lambda^2-1}\int\frac{\left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^\mu - 1}},\\ \rho_0 &= \frac{\mu+2}{\lambda^2-1}\,\frac{a}{2}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\mu+1}. \end{aligned}\right.$$

L'expression de s_0 peut être mise sous une forme très simple en remarquant que

$$ds_0 = -\dot{x}\,ds = -dx + \left(\frac{y}{\rho} - 1\right)ds = -dx + \frac{ds}{\lambda^2-1},$$

d'où

$$s = (\lambda^2 - 1)(s_0 + x).$$

Enfin, par l'élimination de ρ entre les égalités (5), on arrive à voir que, dans la classe (1), la courbe (M_0) est caractérisée par les valeurs suivantes des paramètres λ et μ :

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{\mu+1}, \qquad \mu_0 = \frac{\mu}{\mu+1}.$$

On suppose, bien entendu, que (M) ne soit pas parallèle à une ligne cycloïdale. Dans ce cas ($\mu = -1$) la seconde formule (5) montre immédiatement que (M_0) est une circonférence. Il faut remarquer aussi, dans le cas général, que le rayon de Ω, évidemment égal à

$$R = -\frac{x}{\sin\varphi} = \frac{\lambda}{\lambda^2-1}\frac{\rho}{\cos\varphi} = \frac{\lambda a}{\lambda^2-1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{\mu}{2}+1},$$

peut être mis sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$R = \frac{\lambda_1 \rho_1}{\lambda_1 - 1}, \qquad R = \frac{\lambda_2 \rho_2}{\lambda_2 + 1},$$

d'où l'on déduit que (M_0) n'est autre que la ligne (M_2) relative à (M_1), en même temps qu'elle est la ligne (M_1) relative à (M_2). On remarquera, en particulier, que si (M) est une ligne de Ribaucour $(\lambda = \frac{1}{2}\mu)$, il en est de même de (M_0), et que les deux lignes admettent la *droite* (M_2) comme directrice, tandis que pour (M_1) on a $\lambda_1 = \mu_1$. Il en résulte que toute courbe (1), *à paramètres égaux,* peut être considérée comme l'*enveloppe des circonférences décrites des points d'une ligne de Ribaucour comme centres, tangentiellement à la directrice de cette ligne.* On peut aussi la considérer comme le *lieu des conjugués harmoniques, par rapport aux rayons de courbure d'une ligne de Ribaucour, des points de rencontre des normales à cette courbe avec la directrice;* et les centres de courbure des deux lignes, en deux points correspondants, se trouvent toujours sur une perpendiculaire à la directrice. Nous n'insistons pas sur une foule d'autres propriétés, qu'il serait aisé de déduire des formules qui précèdent.