NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. IAGGI

Sur les substitutions uniformes et le problème de Babbage

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 483-489

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__483_0>

[G2]

SUR LES SUBSTITUTIONS UNIFORMES ET LE PROBLÈME DE BABBAGE;

PAR M. E. IAGGI.

MM. Leau et Lémeray se sont occupés à plusieurs reprises, dans ce Journal et dans d'autres Recueils, des fonctions itérées

$$f_n(x) = f_{n-1}[f_1(x)]$$

en supposant que l'itération de f_1 ne produise qu'un nombre fini m de fonctions distinctes, c'est-à-dire que

$$f_{m+1}(x) = x,$$

et M. Leau a notamment démontré que, lorsque les f_n sont uniformes, elles sont algébriques et linéaires ([1]).

Or on peut démontrer que ces fonctions sont linéaires non seulement dans le cas particulier d'un groupe d'un nombre fini de substitutions obtenues avec une seule substitution fondamentale f_1, mais même dans le cas général d'un groupe de substitutions uniformes, en nombre quelconque fini ou infini, obtenues par répétitions et combinaisons de substitutions fondamentales en nombre quelconque.

On sait que, si $f_n(x)$ est une substitution d'un groupe quelconque, la fonction $f_{-n}(x)$, obtenue par inversion de f_n, fait aussi partie du groupe ([2]) (dans le cas par-

([1]) *Sur les fonctions iterees.* Note de M. Leau parue en 1898 dans le *Bulletin de la Société Mathématique.*

([2]) *Recherches sur la Theorie des fonctions*, par M. Iaggi. Besançon, 1897.

ticulier précédent, f_1 et f_m, f_p et f_{m-p+1} sont inverses deux à deux); il s'ensuit que, si f_n et f_{-n} sont uniformes, elles sont linéaires. On peut d'ailleurs entrer dans plus de détails.

Soit s une substitution d'un groupe donné quelconque, et soit

$$s = f(x) \tag{1}$$

la formule de s, qui l'exprime en x au moyen d'opérations qu'indique f.

Le groupe qui contient s contient aussi son inverse σ que l'on peut écrire

$$\sigma = \varphi(x), \tag{2}$$

où φ est obtenue par inversion de f; or de (1) on tire :

$$x = \varphi(s). \tag{3}$$

Si donc s et σ sont des fonctions uniformes de x, c'est-à-dire si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont uniformes, (1) et (3) font voir que s et x sont fonctions uniformes l'une de l'autre, c'est-à-dire sont liées par une équation du premier degré par rapport à chacune d'elles, ou enfin que s est une fonction linéaire de x, et alors il en est évidemment de même de σ.

Il en résulte que, *si un groupe d'un nombre quelconque, fini ou infini, de substitutions obtenues au moyen de substitutions fondamentales en nombre quelconque, ne contient que des substitutions uniformes, ce groupe est exclusivement composé de substitutions linéaires.*

On peut aussi énoncer ce fait de la manière suivante : *Si un groupe formé d'un nombre quelconque, fini ou infini, de substitutions avec des substitutions fonda-*

mentales en nombre quelconque, n'est pas exclusivement composé de substitutions linéaires, ce groupe contient des substitutions non uniformes.

Les considérations précédentes montrent encore que si l'on veut constituer un nombre fini m de substitutions avec une seule substitution fondamentale $f_1(x)$, cette fonction doit être *algébrique*.

En effet, si $f_1(x)$ était transcendante, uniforme ou non uniforme, son inverse, qui fait partie du groupe, le serait aussi; or de deux fonctions transcendantes inverses l'une de l'autre, l'une au moins a une infinité de valeurs, sinon ces fonctions sont algébriques; toutes ces déterminations devant faire partie du groupe, on voit que le groupe ne peut se composer d'un nombre fini de substitutions si $f_1(x)$ n'est pas algébrique, ainsi que toutes les autres fonctions f_n obtenues par répétition de $f_1(x)$; il est évident d'ailleurs que, si $f_1(x)$ satisfait à cette condition, toutes les autres y satisfont. Si maintenant on considère un groupe d'ordre quelconque p, c'est-à-dire formé au moyen de p substitutions fondamentales

$$f_1, \quad f'_1, \quad f''_1, \quad \ldots, \quad f_1^p,$$

ce groupe contient comme sous-groupe le groupe d'ordre un, formé au moyen d'une seule, f_1 par exemple, des p substitutions fondamentales; or nous venons de démontrer qu'un tel groupe d'ordre un ne peut être composé d'un nombre fini de substitutions que si f_1 est algébrique : il s'ensuit qu'*a fortiori* le groupe d'ordre p considéré *ne peut être composé d'un nombre fini de substitutions que si ses p substitutions fondamentales et, par suite, toutes les autres sont algébriques.*

Cette condition nécessaire n'est pas suffisante; on connaît trop d'exemples de groupes de substitutions algébriques en nombre infini pour qu'il soit utile d'insister.

On peut cependant caractériser davantage les groupes d'un nombre fini de substitutions obtenues, soit avec plusieurs substitutions fondamentales, soit avec une seule :

Si

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_n, \quad \ldots, \quad f_m$$

sont les m substitutions algébriques d'un groupe d'ordre quelconque, le produit

$$F(x) = \prod_n f_n(x) \qquad [n = 0, 1, 2, \ldots; f_0(x) = x]$$

reste invariable quand on substitue à x une quelconque des fonctions f_n :

$$F[f_n(x)] = F(x).$$

Or cette fonction est algébrique. Considérons donc une fonction algébrique quelconque, uniforme ou multiforme,

$$y = F(x)$$

dont l'inverse, la fonction x de y, ait $m+1$ valeurs; *les fonctions f déterminées par l'équation*

$$F(f) = F(x) \quad (^1)$$

sont les fonctions les plus générales qui forment un groupe de $m+1$ substitutions (y compris la substitution identique $f_0 = x$), $F(x)$ ne restant assujettie, bien entendu, qu'à ces conditions : 1° d'être algébrique; 2° d'avoir pour inverse une fonction ayant $m+1$ valeurs.

---

(1) Le cas où $F(x)$ est rationnelle et de degré $m+1$ en x n'est qu'un cas particulier auquel ne peuvent se ramener tous les cas possibles des groupes considérés (*loc. cit.*).

Les groupes obtenus ainsi ne sont pas nécessairement du premier ordre. Ceux qui sont du premier ordre forment la solution la plus générale du problème de Babbage :

Déterminer des fonctions itérées en nombre m telles que

$$f_{m+1}(x) = f_m[f_1(x)] = x. \tag{4}$$

A ce sujet il y a lieu de remarquer que, dans la solution qu'en a proposée Babbage, solution reproduite dans quelques Traités d'Analyse ([1]), entre une fonction *arbitraire,* ce qui serait en contradiction avec nos conclusions.

Si f_1 est une solution particulière de l'équation fonctionnelle précédente, par exemple une substitution linéaire, il forme la fonction

$$\varphi_1(x) = \psi_{-1}\{f_1[\psi_1(x)]\}, \tag{5}$$

où ψ_1 est une fonction *arbitraire,* ce qui donne, en écrivant ψx au lieu de $\psi(x)$,

$$\varphi_2(x) = \psi_{-1} f_1 \psi_1 \psi_{-1} f_1 \psi_1 x. \tag{6}$$

Or, ψ_1 et ψ_{-1} étant inverses l'une de l'autre, il suppose que

$$\psi_1 \psi_{-1} x = x, \tag{7}$$

pour en conclure

$$\varphi_2(x) = \psi_{-1} f_2 \psi_1 x. \tag{8}$$

Mais ceci suppose que $\psi_1 x$ est uniforme (transcendante ou algébrique). En effet, si $\psi_1(x)$ n'est pas uni-

---

([1]) LAURENT, *Analyse*, t. VI.

forme, $\psi_1\psi_{-1}x$ ne l'est pas non plus et a plusieurs valeurs; parmi ces valeurs se trouve x, mais les autres valeurs ne peuvent être x, sinon ψx serait uniforme, et la formule (8) n'est équivalente à la formule (6) qu'autant que ψx est uniforme.

Le but de la formation (5) de φ_1 étant de pouvoir écrire

$$\begin{aligned}
\varphi_2 x &= \psi_{-1} f_2 \psi_1 x,\\
\varphi_3 x &= \psi_{-1} f_3 \psi_1 x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi_{m+1}(x) &= \psi_{-1} f_{m+1} \psi_1 (x = \psi_{-1}\psi_1 x = x,
\end{aligned}$$

on doit tout d'abord supposer que $\psi_1(x)$ est uniforme. Mais on peut remarquer en outre que, si $\psi_{-1}x$ n'est pas uniforme et a, par exemple, p valeurs, chacune des fonctions $\varphi_n x$ a p valeurs. La dernière, par exemple, qui est égale à $\psi_{-1}\psi_1 x$, ne se réduit à x que si ψ_{-1} est uniforme. Supposons, par exemple, que ψ_1, qui est uniforme, soit égale à $\sin x$. On aurait

$$\varphi_{m+1} x = \psi_{-1}\psi_1 x = \text{arc sin}(\sin x) = \begin{cases} x + 2n\pi, \\ (2n+1)\pi - x. \end{cases}$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Si ψ_1 est une fonction rationnelle de degré p en x, ψ_{-1} a p valeurs.

Donc, dans aucun cas, ni ψ_1 ni ψ_{-1} ne peuvent être multiformes, et, par conséquent, ces deux fonctions inverses l'une de l'autre ne peuvent être que *linéaires*. Mais alors les fonctions φ_n sont elles-mêmes *linéaires*. Le procédé de formation des fonctions φ_n par la formule de Babbage, qui n'est valable que pour des fonctions ψ linéaires, ne donne donc rien si l'on se sert de fonctions f_1 linéaires, car on sait trouver directement tous les groupes de m substitutions linéaires. Cependant, si l'on connaît une solution f_1 non linéaire de l'équation (4), la formule (5), où ψ est une fonction linéaire, conduira à d'autres groupes de m substitutions. Mais ce ne seront encore évidemment que des solutions particulières du problème de Babbage.