Nouvelles annales de mathématiques

Blutel

Sur le minimum de l'angle que fait un diamètre d'un ellipsoïde avec son plan diamétral conjugué

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 466-468

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__466_1>

[L²4c]

SUR LE MINIMUM DE L'ANGLE QUE FAIT UN DIAMÈTRE D'UN ELLIPSOÏDE AVEC SON PLAN DIAMÉTRAL CONJUGUÉ;

PAR M. BLUTEL,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Si l'on appelle x, y, z les paramètres directeurs d'une corde, l'angle V que fait cette corde avec le plan diamétral conjugué est fourni par la formule

$$(1)\quad \sin^2 V\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}-\frac{z^2}{c^4}\right)(x^2+y^2+z^2)-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=0.$$

Cette équation, où V est donné, définit un cône du quatrième degré, lieu des cordes répondant à la question. L'angle V sera maximum ou minimum quand ce cône présentera une génératrice *double isolée.*

L'application des méthodes usuelles pour la recherche des génératrices doubles montre que ces génératrices sont nécessairement dans un des plans de coordonnées.

1° Une pareille génératrice est confondue avec l'un des axes, cela exige $\sin^2 V = 1$.

2° Une pareille génératrice n'est pas confondue avec l'un des axes.

Si elle est dans le plan $z = 0$, on démontre de suite qu'elle est confondue avec l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse principale

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et alors

$$\sin^2 V = \frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (1), on est amené à étudier le cône

$$4a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + b^2)^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = 0$$

dans le voisinage de la droite

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{0},$$

ou bien, ce qui revient au même, en prenant la trace du cône sur le plan ($y = b$), cela revient à étudier la courbe

$$4a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4} + \frac{1}{b^2}\right)(x^2 + z^2 + b^2) - (a^2 + b^2)^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1\right)^2 = 0$$

dans le voisinage du point ($x = a$, $z = 0$).

En y transportant l'origine, on vérifie que c'est bien un point double et que les tangentes y sont fournies par l'équation

$$\frac{X^2}{a^2}(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)\frac{Z^2}{c^4}(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) = 0.$$

Ces tangentes seront imaginaires si l'on a

$$(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) < 0,$$

ce qui exige que c soit l'*axe moyen*.

On n'obtient donc un minimum *non seulement absolu, mais relatif,* que si la corde en question est confondue avec un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse principale dont le plan est perpendiculaire à l'axe moyen ([1]).