Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 45-47

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__45_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 193.

(1848, p. 368; 1898, p. 99)

Trouver et discuter l'équation de la surface qui jouit de cette propriété que la somme des distances de ses points aux trois côtés d'un angle trièdre trirectangle est constante.

SOLUTION

Par M. L. Ripert.

Le trièdre donné étant pris pour trièdre coordonné, en rendant rationnelle l'équation

$$(1) \qquad \sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}+\sqrt{x^2+y^2}=2a,$$

on trouve aisément

$$[y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+4a^2(x^2+y^2+z^2)-4a^4]^2 \\ -16a^2(y^2+z^2)(z^2+x^2)(x^2+y^2)=0,$$

ou

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Sigma y^2z^2)^2-8a^2[x^2y^2z^2+\Sigma y^2z^2(y^2+z^2)] \\ \quad +8a^4(2\Sigma x^4+3\Sigma y^2z^2)-32a^6\Sigma x^2+16a^8=0. \end{array} \right.$$

Cette surface du huitième ordre admet les trois plans coordonnés et leurs six plans bissecteurs pour plans de symétrie. La section par un plan coordonné se décompose en quatre hyperboles équilatères

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} z=0, \\ [xy\pm 2a(x+y)+2a^2] \\ \quad \times[xy\pm 2a(x-y)-2a^2]=0. \end{array} \right.$$

La section par un plan bissecteur se décompose en deux droites doubles (parallèles à l'axe correspondant) et en deux ellipses ayant leurs centres sur ces droites doubles

$$y = z, \qquad (y \pm a\sqrt{2})^2(2x^2 - y^2 \pm 2a\sqrt{2}y - 2a^2) = 0.$$

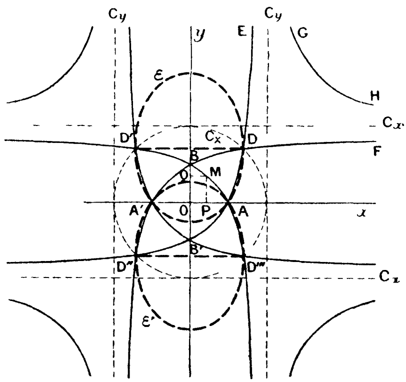
La surface a donc *douze* hyperboles, *douze* ellipses et *douze* droites doubles (arêtes d'un cube concentrique dont le côté est $2a\sqrt{2}$); la section par une face de ce cube (x, y ou $z = \pm a\sqrt{2}$) se compose des quatre arêtes (doubles) de cette face.

La courbe de l'infini se réduit aux trois points à l'infini sur les axes coordonnés, points qui sont *quadruples*, car. pour toute droite ($x = \lambda$, $y = \mu$), l'équation (2) a quatre racines z infinies. Ces points sont sommets *doubles* de trois cylindres de révolution ($x^2 + y^2 = 4a^2, \ldots$), passant chacun par quatre des droites doubles, et doublement asymptotes à la surface (2).

Cette surface correspond d'ailleurs, non seulement à l'équation (1), mais à l'équation

$$(4) \qquad \pm\sqrt{y^2 + z^2} \pm \sqrt{z^2 + x^2} + \sqrt{x^2 + y^2} = 2a.$$

En construisant les quatre hyperboles (3), qui coupent les axes aux points A, A' ($x = \pm a$, $y = 0$), B, B' ($x = 0$, $y = \pm a$),



on reconnaît aisément que la partie de la surface correspondant à l'équation (1), c'est-à-dire plus spécialement à l'énoncé, est celle qui est limitée, dans le plan des xy, par le quadrilatère curviligne ABA'B'. Cette partie de la surface est tout entière à l'intérieur de la sphère de rayon a.

Coupe par le plan des XY.

C_x Cylindre $y^2 + z^2 = 4a^2$.
C_y Cylindre $z^2 + x^2 = 4a^2$.
C_z Cylindre $x^2 + y^2 = 4a^2$.
D, D', D'', D''' pieds de quatre droites doubles. Les huit autres se projettent deux à deux suivant DD', D'D'', D''D''', D'''D.

En prenant toutes les distances positivement, on voit que, dans l'angle XOY, on a respectivement

Sur AB........	$OM + PM + QM = 2a$
Sur AE........	$OM + PM - QM = 2a$
Sur BF........	$OM - PM + QM = 2a$
Sur GH	$-OM + PM + QM = 2a$

Les autres parties sont symétriques.
ε, ε', DD', D''D''' projection des sections par les plans $Y = \pm z$.

Ce qui a empêché sans doute de donner plus tôt une solution de la question 193, c'est que, après avoir obtenu l'équation (2) de la surface, on a abandonné l'équation initiale (4). Or, (2) est presque impossible à manier, tandis que (4) montre beaucoup de choses. Par exemple, de (2), on tire

$$(5)\quad \begin{cases} z = 0, \\ x^4y^4 - 8a^2x^2y^2(x^2+y^2) \\ \quad + 8a^4(2x^4 + 2y^4 + 3x^2y^2) - 32a^6(x^2+y^2) + 16a^8 = 0. \end{cases}$$

Il est très difficile de voir *directement* que le premier membre est décomposable en quatre facteurs, tandis que, avec (4), on a

$$z = 0, \qquad \pm y \pm x \pm \sqrt{x^2+y^2} = 2a.$$

On voit alors que, dans le plan des xy, le lieu se compose de quatre hyperboles, et l'on a les quatre facteurs de (5), comme il est facile ensuite de le vérifier.

La même remarque s'applique aux sections par $y = \pm z$, ...