NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. IAGGI

Sur l'intégrale d'Euler et l'addition des fonctions elliptiques de première espèce

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 443-450

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__443_0>

[F4]

SUR L'INTÉGRALE D'EULER ET L'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE;

PAR M. E. IAGGI.

Il s'agit, dans cette Note, de l'intégration de l'équation

$$\frac{dx}{\Delta x} + \frac{dy}{\Delta y} = 0, \tag{1}$$

où

$$\Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, \qquad \Delta y = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}.$$

Depuis qu'Euler en a donné, sans démonstration, l'intégrale générale, il en a été fait de nombreuses démonstrations; on connaît notamment celle de Clebsch ([1]), où entrent des considérations géométriques, et la démonstration plus analytique de M. Darboux ([2]). La méthode analytique suivante emploie des calculs analogues à ceux de la méthode de M. Darboux, mais procède d'un raisonnement plus direct et plus intuitif, par conséquent préférable au point de vue de l'enseignement.

L'équation (1) s'écrit

$$\Delta y\, dx + \Delta x\, dy = 0. \tag{2}$$

Le premier membre de cette équation est l'ensemble de deux termes de la différentielle de la fonction

$$x\,\Delta y + y\,\Delta x,$$

([1]) CLEBSCH, *Traité de Géométrie.*

([2]) DARBOUX, *Sur une classe de courbes du quatrième ordre et l'addition des fonctions elliptiques* (*Annales de l'École Normale supérieure,* 1re série, t. IV; 1867).

et l'on a donc, en tenant compte de l'équation (2),

$$d(x\,\Delta y + y\,\Delta x) = x\,d\Delta y + y\,d\Delta x. \tag{3}$$

Or, on peut calculer cette expression ; on a

$$\left\{\begin{aligned} \Delta x^2 &= 1 - (1+k^2)x^2 + k^2 x^2,\\ \Delta y^2 &= 1 - (1+k^2)y^2 + k^2 y^4, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

et par conséquent

$$d\Delta x = \frac{-(1+k^2) + 2k^2x^2}{\Delta x}\,x\,dx,$$

$$d\Delta y = \frac{-(1+k^2) + 2k^2y^2}{\Delta y}\,y\,dy,$$

d'où

$$\begin{aligned} d(x\,\Delta y + y\,\Delta x) &= x\,d\Delta y + y\,d\Delta x\\ &= -(1+k^2)xy\left(\frac{dx}{\Delta x} + \frac{dy}{\Delta y}\right)\\ &\quad + 2k^2xy\left(\frac{x^2\,dx}{\Delta x} + \frac{y^2\,dy}{\Delta y}\right), \end{aligned}$$

et, en tenant compte de l'équation (1),

$$d(x\,\Delta y + y\,\Delta y) = 2k^2xy\left(\frac{x^2\,dx}{\Delta x} + \frac{y^2\,dy}{\Delta y}\right). \tag{5}$$

Le second membre de cette équation différentielle n'est pas sous forme intégrable ; on ne pourrait l'y mettre qu'avec l'aide de la relation entre x et y que justement nous cherchons : mais observons que l'on peut obtenir une expression de la fonction dont le premier membre est la différentielle : les formules (4) donnent en effet

$$x^2\,\Delta y^2 - y^2\,\Delta x^2 = (x^2 - y^2)(1 - k^2x^2y^2),$$

d'où

$$x\,\Delta y + y\,\Delta x = \frac{(x^2-y^2)(1-k^2x^2y^2)}{x\,\Delta y - y\,\Delta x}. \tag{6}$$

En divisant membre à membre (5) et (6), on a alors

$$\frac{d(x\,\Delta y + y\,\Delta x)}{x\,\Delta y + y\,\Delta x} = \frac{2k^2xy\left(\dfrac{x^2\,dx}{\Delta x} + \dfrac{y^2\,dy}{\Delta y}\right)(x\,\Delta y - y\,\Delta x)}{(x^2-y^2)(1-k^2x^2y^2)}.$$

En effectuant le produit des deux derniers facteurs du numérateur de cette expression, on voit que ce produit se met, grâce à l'équation (1), sous la forme

$$(y^2 - x^2)(x\,dy + y\,dx),$$

et l'on a

$$\frac{d(x\,\Delta y + y\,\Delta x)}{x\,\Delta y + y\,\Delta x} = \frac{-2k^2xy(x\,dy + y\,dx)}{1 - k^2x^2y^2}.$$

Les deux membres sont maintenant, d'une manière explicite, sous forme de différentielle exacte, et l'on obtient sans difficulté l'intégrale générale avec une constante arbitraire c

$$\frac{x\,\Delta y + y\,\Delta x}{1 - k^2x^2y^2} = c. \tag{7}$$

De là on tire, comme on sait, la formule d'addition de $\operatorname{sn} z$.

Si l'on considère les deux fonctions

$$u = \operatorname{sn} x = \frac{\mathrm{H}(x)}{\sqrt{k}\,\Theta(x)}, \qquad v = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} = \operatorname{sn}(\mathrm{K} + x) = \frac{\mathrm{H}_1(x)}{\sqrt{k}\,\Theta_1(x)},$$

qui sont déterminées par l'inversion des intégrales [1]

$$x = \int_0^u \frac{du}{\Delta u}, \qquad x = \int_1^v \frac{dv}{-\Delta v}, \tag{8}$$

on voit que

$$dx = \frac{du}{\Delta u} = -\frac{dv}{\Delta v}.$$

La relation différentielle

$$\frac{du}{\Delta u} + \frac{dv}{\Delta v} = 0$$

permet de trouver directement la relation en termes

---

[1] *Sur les fonctions elliptiques de première espèce* (*Nouvelles Annales*, 1898).

finis qui lie u et v. L'intégrale générale de l'équation précédente est en effet, d'après ce qui précède,

$$\frac{u\,\Delta v + v\,\Delta u}{1 - k^2 u^2 v^2} = c;$$

or, en supposant $x = 0$, on a

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = 1.$$

Il s'ensuit

$$c = 1$$

et par conséquent

$$u\,\Delta v + v\,\Delta u = 1 - k^2 u^2 v^2. \tag{9}$$

Telle est la relation qui lie $u(x)$ et $v(x)$. Mais on peut l'avoir sous forme rationnelle d'une manière plus simple qu'en rendant rationnelle la précédente : l'équation (6) s'écrit maintenant

$$u^2\,\Delta v^2 - v^2\,\Delta u^2 = (u^2 - v^2)(1 - k^2 u^2 v^2)$$

et par conséquent, en tenant compte de (9),

$$u\,\Delta v - v\,\Delta u = u^2 - v^2, \tag{10}$$

(9) et (10) donnent alors

$$2u\,\Delta v = u^2 - v^2 + 1 - k^2 u^2 v^2,$$
$$2v\,\Delta u = v^2 - u^2 + 1 - k^2 u^2 v^2$$

ou

$$1 - v^2 - 2u\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2v^2} + u^2(1 - k^2v^2) = 0,$$
$$1 - u^2 - 2v\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-k^2u^2} + v^2(1 - k^2u^2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\sqrt{1-v^2} - u\sqrt{1-k^2v^2}\right)^2 = 0,$$
$$\left(\sqrt{1-u^2} - v\sqrt{1-k^2u^2}\right)^2 = 0,$$

d'où les deux formules

$$u = \sqrt{\frac{1-v^2}{1-k^2v^2}}, \qquad v = \sqrt{\frac{1-u^2}{1-k^3u^2}}, \tag{11}$$

qui se résument dans la relation

$$u^2 + v^2 = 1 + k^2 u^2 v^2. \tag{12}$$

Dans les deux formules précédentes, il n'y a aucune ambiguïté sur les lignes des radicaux. La manière dont nous les avons trouvées montre que u et v sont de mêmes signes que Δv et Δu, tant qu'il s'agit de variables réelles $(u^2, v^2 < 1)$.

Les calculs précédents donnent d'ailleurs sans ambiguïté de signes

$$\begin{aligned} 2vu'_x &= 2v\,\Delta u = 1 - u^2 + v^2(1 - k^2u^2) = 2(1 - u^2), \\ -2uv'_x &= 2u\,\Delta v = 1 - v^2 + u^2(1 - k^2v^2) = 2(1 - v^2), \end{aligned}$$

d'où

$$u' = \frac{1 - u^2}{v}, \qquad v' = -\frac{1 - v^2}{u},$$

formules *identiques* à celles qu'on pourrait écrire pour les fonctions circulaires

$$\begin{aligned} u &= \sin x, \\ v &= \cos x. \end{aligned}$$

Au moyen de la relation (12), ces formules se mettent encore sous d'autres formes rationnelles

$$\left\{ \begin{aligned} u' &= \frac{1 - u^2}{v} = v(1 - k^2u^2) = \frac{k'^2 v}{1 - k^2 v^2}, \\ v' &= -\frac{1 - v^2}{u} = -u(1 - k^2v^2) = -\frac{k'^2 u}{1 - k^2 u^2}. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Les dernières expressions de u' et de v' montrent que, comme pour les fonctions circulaires, u' s'exprime rationnellement en v seule, v' s'exprime rationnellement en u seule.

Formons encore au moyen de l'intégrale d'Euler les expressions de $u(x + y)$ et de $v(x + y)$ que nous avons indiquées dans une Note précédente (*loc. cit.*).

Changeant x en $u(x)$, y en $u(y)$ dans la formule (7), cette formule donne, comme on sait,

$$(14)\qquad u(x+y) = \frac{u_x u'_y + u_y u'_x}{1 - k^2 u_x^2 u_y^2}.$$

Si dans cette formule on remplace u'_x et u'_y par les valeurs données par la formule

$$u' = v(1 - k^2 u^2),$$

puis par les valeurs données par la formule

$$u' = \frac{1 - u^2}{v},$$

on a

$$u(x+y) = \frac{u_x v_y + u_y v_x - k^2 u_x u_y (u_x v_x + u_y v_y)}{1 - k^2 u_x^2 u_y^2}$$
$$= \frac{u_x v_x + u_y v_y - u_x u_y (u_x v_y + u_y v_x)}{v_x v_y (1 - k^2 u_x^2 u_y^2)}.$$

Ces formules peuvent être simplifiées de deux manières :

1° En multipliant les deux termes de la deuxième formule par $k^2 u_x u_y$ et les ajoutant aux termes correspondants de la première;

2° En multipliant les deux termes de la première formule par $u_x u_y$ et les ajoutant aux termes correspondants de la deuxième.

Dans les deux cas, le facteur $(1 - k^2 u_x^2 u_y^2)$ disparaît, et l'on a les formules rationnelles

$$(15)\qquad u(x+y) = \frac{u_x v_y + u_y v_x}{1 + k^2 u_x v_x u_y v_y} = \frac{u_x v_x + u_y v_y}{u_x u_y + v_x v_y}.$$

On peut passer de ces formules à celles de $v(x+y)$, en changeant x en $x + \mathrm{K}$. Mais l'intégrale d'Euler peut donner également ces formules. On a en effet

$$dx = \frac{dv_x}{-\Delta v_x}, \qquad dy = \frac{du_y}{\Delta u_y},$$

et en supposant $x+y$ constant

$$\frac{dv_x}{\Delta v_x} - \frac{du_y}{\Delta u_y} = 0.$$

Cette équation ne diffère de (1) que par le changement de x en v_x, y en $-u_y$. L'intégrale d'Euler (7) donne donc, par les mêmes changements,

$$\frac{v_x \Delta u_y - u_y \Delta v_x}{1 - k^2 v_x^2 u_y^2} = c.$$

Si l'on fait $y = 0$, le premier membre se réduit à v_x. c, qui est fonction de $x+y$ ou de $v(x+y)$, n'est donc autre que $v(x+y)$. Nous servant alors des formules

$$\begin{aligned} \Delta u_y &= \quad u'_y = v_y(1 - k^2 u_y^2), \\ \Delta v_x &= - v'_x = u_y(1 - k^2 v_y^2), \end{aligned}$$

puis des formules

$$\begin{aligned} \Delta u_y &= \quad u'_y = \frac{1 - u_y^2}{v_y}, \\ \Delta v_x &= - v'_x = \frac{1 - v_x^2}{u_x}, \end{aligned}$$

nous obtenons, en opérant comme précédemment, les formules rationnelles

$$(16) \qquad v(x+y) = \frac{v_x v_y - u_x u_y}{1 - k^2 u_x u_y v_x v_y} = \frac{u_x v_x - u_y v_y}{u_x v_y - v_x v_y}.$$

On peut remarquer l'analogie des formules (15) et (16) avec les formules relatives aux fonctions circulaires.

Les numérateurs des premières des formules (15) et (16) sont les formules d'addition

$$\begin{aligned} u(x+y) &= u_x v_y + u_y v_x, \\ v(x+y) &= v_x v_y - u_x u_y, \end{aligned}$$

des fonctions circulaires

$$u_x = \sin x,$$
$$v_x = \cos x.$$

Quant aux secondes formules (15) et (16), elles sont *identiques* aux formules d'addition des fonctions circulaires que l'on peut écrire ainsi

$$\frac{u_x v_x + u_y v_y}{u_x u_y + v_x v_y} = \frac{\sin x \cos x + \sin y \cos y}{\sin x \sin y + \cos x \cos y}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 2y)}{\cos(x-y)} = \sin(x+y) = u(x+y),$$

$$\frac{u_x v_x - u_y v_y}{u_x v_y - v_x u_y} = \frac{\sin x \cos x - \sin y \cos y}{\sin x \cos y - \sin y \cos x}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 2y)}{\sin(x-y)} = \cos(x+y) = v(x+y).$$

Ceci est d'ailleurs une loi générale pour les formules relatives aux fonctions elliptiques u et v : *toute formule qui ne contient pas k explicitement, ou dont on a éliminé k soit au moyen de l'équation* (12), *soit de toute autre manière, est* IDENTIQUE *à la formule correspondante des fonctions circulaires.* En effet, les fonctions elliptiques u et v se réduisant, lorsque l'on fait $k = 0$, aux fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$, les formules relatives aux fonctions elliptiques u et v doivent donc se réduire, lorsqu'on annule k, aux formules relatives aux fonctions circulaires; si donc ces formules ne contiennent pas explicitement k, elles sont identiques aux formules correspondantes des fonctions circulaires. Ceci montre combien serait méthodique et simple une théorie des fonctions elliptiques faite en prenant pour éléments les fonctions u et v.