NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. RIPERT

Sur la simplification des formules d'angles et de distances en géométrie de l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 409-419

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__409_1>

[K13a]

SUR LA SIMPLIFICATION DES FORMULES D'ANGLES ET DE DISTANCES EN GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE;

PAR M. L. RIPERT.

Nous supposons connues les formules métriques relatives aux éléments du premier ordre en *coordonnées obliques;* nous nous proposons d'indiquer un moyen de simplifier leurs formes et, par suite, d'en faciliter l'application. Nous nous abstiendrons en général de démonstrations, la plupart d'entre elles ne différant pas, une fois les notations adoptées, de celles qui sont classiques.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

1. Par rapport au trièdre coordonné

$$Oxyz(yOz = \lambda,\ zOx = \mu,\ xOy = \nu),$$

les équations

$$\left(\frac{x-\alpha}{a}=\frac{y-\beta}{b}=\frac{z-\gamma}{c}\right)$$

d'une droite D peuvent s'écrire sous la forme *détriplée*

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{cases} \mathrm{A}(y,z)=cy-bz-(c\beta-b\gamma)=0,\\ \mathrm{B}(z,x)=az-cx-(a\gamma-c\alpha)=0,\\ \mathrm{C}(x,y)=bx-ay-(b\alpha-a\beta)=0.\end{cases}$$

Ce sont les équations des plans projetant D sur les trois plans coordonnés. Deux de ces équations sont nécessaires et suffisantes pour déterminer D; mais on peut dire aussi que D est représentée par les *trois équations* $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{C}=0$, étant entendu que deux quelconques entraînent la troisième, ou, ce qui revient au même, qu'elles sont liées par la relation

$$\mathrm{A}a+\mathrm{B}b+\mathrm{C}c=a.$$

Une seconde droite

$$\mathrm{D}'\left(\frac{x-\alpha'}{a'}=\frac{y-\beta'}{b'}=\frac{z-\gamma'}{c'}\right)$$

sera représentée de même par les trois équations

$$\mathrm{A}'=0,\qquad \mathrm{B}'=0,\qquad \mathrm{C}'=0.$$

Nous prendrons l'équation d'un plan P sous la forme

$$\mathrm{P}(x,y,z)=ux+vy+wz+r=0,$$

la même équation accentuée représentant un second plan P′, ...

2. Nous désignons la fonction sphérique par $\Phi(x,y,z)$, son discriminant par Δ et la fonction adjointe par $\Psi(x,y,z)$. En d'autres termes, nous posons

$$\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu,$$

$$\Delta=1+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu,$$

$$\Psi(x,y,z)=\Sigma\, x^2\sin^2\lambda+2\Sigma yz(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda).$$

On sait que, $Oxyz$ étant un véritable trièdre, Δ est toujours compris entre o et 1; on peut donc poser $\Delta = \sin^2\Theta$; $\sin\Theta$ est dit le *sinus du trièdre des coordonnées*.

ANGLES ET PERPENDICULARITÉ.

3. Les angles de deux droites (D, D′), ou de deux plans (P, P′), ou d'une droite (D) et d'un plan (P), sont respectivement donnés par les formules

$$(1)\qquad \cos(D, D') = \pm \frac{a'\Phi'_a + b'\Phi'_b + c'\Phi'_c}{2\sqrt{\Phi(a, b, c)\,\Phi(a', b', c')}},$$

$$(2)\qquad \cos(P, P') = \pm \frac{u'\Psi'_u + v'\Psi'_v + w'\Psi'_w}{2\sqrt{\Psi(u, v, w)\,\Psi(u', v', w')}},$$

$$(3)\qquad \sin(D, P) = \pm \frac{(au + bv + cw)\sin\Theta}{\sqrt{\Phi(a, b, c)\,\Psi(u, v, w)}}.$$

La condition de perpendicularité de (D, D′) ou de (P, P′) résulte immédiatement des formules (1) et (2). Les conditions de perpendicularité de D et de P, beaucoup plus faciles à déduire des formules (1) et (2) [1] que de la formule (3) peuvent s'écrire indifféremment sous les deux formes

$$(4)\qquad \frac{\Phi'_a}{u} = \frac{\Phi'_b}{v} = \frac{\Phi'_c}{w} \qquad \text{ou} \qquad \frac{a}{\Psi'_u} = \frac{b}{\Psi'_v} = \frac{c}{\Psi'_w}.$$

Les équations de direction des plans P perpendiculaires à D et des droites D perpendiculaires à P sont respectivement

$$(5)\qquad \Phi'_a x + \Phi'_b y + \Phi''_c z = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{\Psi'_u} = \frac{y}{\Psi'_v} = \frac{z}{\Psi'_w}.$$

---

[1] On trouve très aisément les deux formes en exprimant que : 1° une droite *arbitraire* parallèle à P est perpendiculaire à D; 2° un plan *arbitraire* parallèle à D est perpendiculaire à P (*voir* au n° 9).

L'équation du plan mené par D perpendiculairement à P est

$$(6)\qquad A\Psi'_u + B\Psi'_v + C\Psi'_w = 0.$$

4. La projection orthogonale (x_d, y_d, z_d) du point (x_1, y_1, z_1) sur D et la projection orthogonale (x_p, y_p, z_p) du même point sur P ont respectivement leurs coordonnées données par

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x_d - \alpha}{a} &= \frac{y_d - \beta}{b} = \frac{z_d - \gamma}{c} \\ &= \frac{\Phi'_a(x_1 - \alpha) + \Phi'_b(y_1 - \beta) + \Phi'_c(z_1 - \gamma)}{2\Phi(a, b, c)}, \end{aligned} \right.$$

$$(8)\qquad \frac{x_p - x_1}{\Psi'_u} = \frac{y_p - y_1}{\Psi'_v} = \frac{z_p - z_1}{\Psi'_w} = -\frac{P(x_1, y_1, z_1)}{2\Psi(u, v, w)}.$$

La projection orthogonale de D sur P résulte de la formule (6).

DISTANCES.

5. La distance du point (x_1, y_1, z_1) au plan P est (en valeur absolue)

$$(9)\qquad \Delta_P = \frac{P(x_1, y_1, z_1)\sin\Theta}{\sqrt{\Psi(u, v, w)}},$$

d'où il résulte que : 1° le volume d'un parallélépipède dont a, b, c sont trois arêtes contigues faisant deux à deux les angles λ, μ, ν, est

$$(10)\qquad V = abc\sin\Theta;$$

2° la distance des plans parallèles

$$\left(ux + vy + wz + \left\{ \begin{matrix} r = 0 \\ r' = 0 \end{matrix} \right.\right)$$

est

$$(11)\qquad \Delta_{PP'} = \frac{(r - r')\sin\Theta}{\sqrt{\Psi(u, v, w)}};$$

3° la plus courte distance de deux droites D, D′ est

$$(12)\qquad \Delta_{DD'} = \frac{[L(\alpha-\alpha')+M(\beta-\beta')+N(\gamma-\gamma')]\sin\theta}{\sqrt{\Psi(L, M, N)}}$$

où

$$L = bc' - cb', \qquad M = ca' - ac', \qquad N = ab' - ba'.$$

6. Les équations de la perpendiculaire commune à D et D′ sont [formule (6)]

$$(13)\qquad A\Psi'_L + B\Psi'_M + C\Psi'_N = 0, \qquad A'\Psi'_L + B'\Psi'_M + C'\Psi'_N = 0.$$

7. *La distance du point* (x_1, y_1, z_1) *à la droite* D *est donnée par la formule*

$$(14)\qquad \Delta_D = \sqrt{\frac{\Psi[A(y_1, z_1), B(z_1, x_1), C(x_1, y_1)]}{\Phi(a, b, c)}}.$$

Démontrons directement cette formule de forme nouvelle :

On reconnaît aisément (¹) que les coordonnées [formule (7)] de la projection de (x_1, y_1, z_1) sur D peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{x_d - x_1}{B\Phi'_c - C\Phi'_b} = \frac{y_d - y_1}{C\Phi'_a - A\Phi''_c} = \frac{z_d - z_1}{A\Phi'_b - B\Phi'_a} = \frac{1}{2\Phi(a, b, c)},$$

où A, B, C représentent respectivement $A(y_1, z_1)$, $B(z_1, x_1)$, $C(x_1, y_1)$.

La distance cherchée de (x_1, y_1, z_1) à D est

$$\Delta_D = \sqrt{\Phi(x_d - x_1, y_d - y_1, z_d - z_1)},$$

c'est-à-dire

$$\Delta_D = \frac{1}{2\Phi(a, b, c)}\sqrt{\begin{aligned}&\Sigma(B\Phi'_c - C\Phi'_b)^2\\ &+ 2\Sigma(C\Phi'_a - A\Phi'_c)(A\Phi'_b - B\Phi'_a)\cos\lambda,\end{aligned}}$$

(¹) A cause des identités

$$\frac{x_1 - \alpha}{a\Sigma\Phi'_a(x_1 - \alpha) - (B\Phi'_c - C\Phi'_b)} = \ldots = \frac{1}{2\Phi(a, b, c)}.$$

ou, en développant, ordonnant par rapport à A, B, C, et simplifiant

$$\Delta_D = \frac{1}{\Phi(a, b, c)} \times \sqrt{\begin{array}{l}\Sigma[\Phi(a, b, c)\sin\lambda - a^2\Delta]A^2 \\ \quad + 2\Sigma[\Phi(a, b, c)\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) - bc\Delta]\,BC\end{array}}$$

$$= \frac{1}{\Phi(a, b, c)}\sqrt{\Phi(a, b, c)\Psi(A, B, C) - \Delta(Aa + Bb + Cc)^2},$$

ou, finalement, à cause de $Aa + Bb + Cc \equiv 0$,

$$\Delta_D = \sqrt{\frac{\Psi(A, B, C)}{\Phi(a, b, c)}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

8. *Application.* — Pour montrer la facilité d'application des formules qui précèdent, démontrons le théorème suivant :

Le volume d'un tétraèdre, donné par les coordonnées de ses sommets, est égal, en valeur absolue, au produit du premier membre de la condition qui exprimerait que les quatre sommets sont dans un même plan par le sixième du sinus du tétraèdre des coordonnées.

En effet, soit le tétraèdre 1-2-3-4. L'arête 3-4 dont la longueur est

$$l = \sqrt{\Phi(x_3 - x_4, y_3 - y_4, z_3 - z_4)},$$

a pour équations détriplées (1, D)

$$A(y, z) = \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$B(z, x) = \begin{vmatrix} z & x & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \\ z_4 & x_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La distance du point 2 à cette droite 3-4 est [formule (14)]

$$h = \sqrt{\frac{\Psi[A(y_2, z_2), B(z_2, x_2), C(x_2, y_2)]}{\Phi(x_3 - x_4, y_3 - y_4, z_3 - z_4)}}.$$

L'aire $\left(\frac{1}{2} lh\right)$ de la base 2-3-4 est donc

$$A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\Psi[A(y_2, z_2), B(z_2, x_2), C(x_2, y_2)]}.$$

Le plan de cette base a pour équation

$$P = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= A(y_2, z_2)x + B(z_2, x_2)y + C(x_2, y_2)z - (x_2, y_3, z_4) = 0$$

et la hauteur H_1, distance du sommet 1 à ce plan, est [formule (9)]

$$H_1 = \pm \frac{P(x_1, y_1, z_1)\sin\theta}{\sqrt{\Psi[A(y_2, z_2), B(z_2, x_2), C(x_2, y_2)]}}.$$

Le volume $\left(V = \frac{1}{3} A_1 H_1\right)$ du tétraèdre est donc

$$(15) \qquad V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

COMPARAISON AVEC LES FORMULES DE GÉOMÉTRIE PLANE.

9. Plücker, dans sa *Neue Geometrie des Raumes* (Teubner, Leipzig, 1866), divise les droites du plan en deux espèces : celles dont l'équation est de la forme $\left(\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b}\right)$ qu'il appelle *rayons*, et celles dont l'équation est de la forme $(ux + vy + r = 0)$ qu'il appelle *axes*. Géométriquement, le *rayon* est la droite dirigée, menée d'un point fini (α, β) au point de l'infini

(a, b, o); l'*axe* est la trace sur le plan fondamental d'un plan quelconque; c'est aussi la droite de jonction de deux points pris sur les axes coordonnés $\left(-\frac{r}{u}, o\right)$ et $\left(o, -\frac{r}{v}\right)$.

Si, d'après cette conception de Plücker, nous prenons l'équation d'une droite du plan sous les deux formes

$$d(xy) = bx - ay - (b\alpha - a\beta) = o,$$
$$p(x, y) = ux + vy + r = o,$$

et si nous posons (avec $xOy = \theta$)

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + 2\cos\theta\, xy, \quad \psi(x, y) = x^2 + y^2 - 2\cos\theta\, xy,$$

il n'est pas sans intérêt de comparer les formules qui viennent d'être établies avec les suivantes (les numéros se correspondant)

(1) $$\cos(d, d') = \pm \frac{a'\varphi'_a + b'\varphi'_b}{2\sqrt{\varphi(a, b)\,\varphi(a', b')}},$$

(2) $$\cos(p, p') = \pm \frac{u'\psi'_u + v'\psi'_v}{2\sqrt{\psi(u, v)\,\psi(u', v')}},$$

(3) $$\sin(d, p) = \pm \frac{(au + bv)\sin\theta}{\sqrt{\varphi(a, b)\,\psi(u, v)}},$$

(4) $$\frac{\varphi'_u}{u} = \frac{\varphi'_b}{v} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\psi'_u} = \frac{b}{\psi'_v},$$

(5) $$\varphi'_a x + \varphi'_b y = o, \quad \frac{x}{\psi'_u} = \frac{y}{\psi'_v},$$

(7) $$\frac{x_d - \alpha}{a} = \frac{y_d - \beta}{b} = \frac{\varphi'_a(x_1 - \alpha) + \varphi'_b(y_1 + \beta)}{2\varphi(a, b)},$$

(8) $$\frac{x_p - x_1}{\psi'_u} = \frac{y_p - y_1}{\psi'_v} = -\frac{p(x_1, y_1)}{2\psi(u, v)},$$

(9) $$S_p = \frac{p(x_1, y_1)\sin\theta}{\sqrt{\psi(u, v)}},$$

(10) $$\mathcal{A} = ab\sin\theta,$$

(15) $$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\sin\theta.$$

Il nous paraît évident que si ces formules, conséquence de la conception de Plücker, étaient établies sous cette forme en Géométrie plane, elles faciliteraient considérablement le passage des deux aux trois dimensions, surtout si l'on a soin de les *démontrer d'une manière correspondante.* Par exemple, les formules (4) peuvent se déduire de la formule (3); mais il est préférable [et même plus simple (¹)] de les démontrer, comme leurs analogues de l'espace par les formules (1) et (2). On peut dire, dans les deux cas :

1° Un rayon *arbitraire* (a', b') sera perpendiculaire à d et parallèle à p si l'on a

$$a'\varphi'_a + b'\varphi'_b = 0,$$
$$a'u + b'v = 0,$$

Une droite *arbitraire* (a', b', c') sera perpendiculaire à D et parallèle à P si l'on a

$$a'\Phi'_a + b'\Phi'_b + c'\Phi'_c = 0,$$
$$a'u + b'v + c'w = 0,$$

conditions qui doivent subsister quels que soient a', b', (c'). Donc

$$\frac{\varphi'_a}{u} = \frac{\varphi'_b}{v}.$$

$$\frac{\Phi'_a}{u} = \frac{\Phi'_b}{v} = \frac{\Phi'_c}{w}.$$

2° Un axe arbitraire (u', v') sera parallèle à d et perpendiculaire à p si l'on a

$$\sum u'a = 0, \qquad \sum u'\psi'_u + 0.$$

Donc

$$\frac{a}{\psi'_u} = \frac{b}{\psi'_v},$$

Un plan arbitraire (u, v, w) sera parallèle à D et perpendiculaire à P si l'on a

$$\sum u'a = 0, \qquad \sum u'\Psi'_u = 0.$$

Donc

$$\frac{a}{\Psi'_u} = \frac{b}{\Psi'_v} = \frac{c}{\Psi'_w}.$$

(¹) « C'est une remarque que l'on peut faire souvent dans l'étude de la Géométrie, que les solutions de la Géométrie plane, qui ont leurs analogues dans l'espace, sont toujours les plus générales et les plus simples. » (CHASLES, *Aperçu historique,* 3e édition, p. 45.) Le fait est peut-être plus frappant encore quand on se place au point de vue analytique : l'analogie des solutions est souvent alors voisine de l'identité.

UTILITÉ DE LA FORME DÉTRIPLÉE (D).

10. La forme (D) du n° **1** et sa forme corrélative (où $A=0$, $B=0$, $C=0$ sont les équations des points communs à D et aux plans coordonnés) ont de très nombreuses applications. Nous nous bornerons aux exemples suivants :

1° L'équation de l'hyperboloïde déterminé par les trois droites D_1, D_2, D_3 et celle du paraboloïde déterminé par D_1, D_2 et le plan directeur P, sont respectivement

$$(a) \qquad (A_1, B_2, C_3)=0$$

et

$$(b) \qquad (A_1, B_2, w)=0,$$

l'hyperboloïde (a) devenant paraboloïde si l'on a

$$(a_1, b_2, c_3)=0.$$

Si l'on change de nom les coordonnées, l'équation (a) conserve la même signification, l'hyperboloïde passant par l'origine avec $(a_1, b_2, c_3)=0$. L'équation (b) représente la quadrique réglée ayant pour directrices D_1 et D_2 est telle que les plans de jonction des génératrices à l'origine passent par le point de l'infini $P(u, v, w, 0)$.

2° *L'équation ponctuelle du système des m plans tangents, menés par la droite* D *à la surface de* $m^{\text{ième}}$ *classe* $F(U, V, W, R)=0$, *est*

$$(c) \qquad F(A, B, C, P_0)=0,$$

où $P_0=-(A\alpha+B\beta+C\gamma)$ est le premier membre de l'équation du plan de jonction de D à l'origine.

En effet, un plan passant par D a pour équation

$$A + \lambda B = -\lambda c x - c y + (\lambda a - b) z \\ + \lambda (c\alpha - a\gamma) + b\gamma - c\beta = 0,$$

et sera tangent à la surface si l'on a

$$F[-\lambda c,\ c,\ \lambda a - b,\ \lambda(c\alpha - a\gamma) + b\gamma - c\beta] = 0.$$

En éliminant λ entre cette condition et $A + \lambda B = 0$, on trouve l'équation (c).

En changeant de nom les coordonnées, P_0 devient le point à l'infini de D, et l'équation (c) représente le système des m points d'intersection de D avec la surface de $m^{\text{ième}}$ ordre dont l'équation ponctuelle est $F = 0$.

3° En introduisant la notation pluckérienne

$$c\beta - b\gamma = l, \qquad a\gamma - c\alpha = m, \qquad b\alpha - a\beta = n,$$

on voit que : 1° si $(x, y, z, 1)$ représente un point donné, l'équation ponctuelle (c) devient celle du complexe des tangentes au cône circonscrit ayant ce point pour sommet; 2° si $(x, y, z, 1)$ sont les coordonnées d'un plan donné, l'équation tangentielle (c) devient celle du complexe des droites coupant la section de la surface par ce plan.