J. Dolbnia

Remarque sur l'inversion des intégrales elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 390-392

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__390_1>

[F5eα]

REMARQUE SUR L'INVERSION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES;

PAR M. J. DOLBNIA

En exécutant l'inversion de l'intégrale

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

il est facile de se heurter à un cas qui semble, au premier abord, présenter une contradiction inexplicable.

Admettons, avec Halphen (¹), que

$$x^2 = z + \frac{1}{\frac{1-k^2}{3}};$$

nous aurons alors

$$u = \sqrt{\lambda} \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

$$\lambda^2 g_2 = \frac{4}{3}(1 - k^2 + k^4),$$

$$\lambda^3 g_3 = -\frac{1}{27}(1+k^2)(2-k^2)(1-2k^2) \quad (^2),$$

donc

$$\frac{g_2^3}{g_3^2} = \frac{108(1-k^2+k^4)^3}{(1+k^2)^2(2-k^2)^2(1-2k^2)^2}.$$

(¹) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 23.

(²) *Ibid.*, t. I, p. 60.

De pareilles formules expriment directement les invariants g_2 et g_3 en fonction du module k.

Si maintenant à l'intégrale

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 x^4 - (1+k^2)x^2 + 1}},$$

nous appliquons les formules connues de l'inversion des intégrales elliptiques et si nous calculons, conformément à ces dernières, les invariants g_2 et g_3, nous trouverons

$$g_2 = \frac{S}{a_0^2} = \frac{k^4 + 14k^2 + 1}{12k^4},$$

$$g_3 = \frac{T}{a_0^3} = \frac{k^6 - 33k^4 - 33k^2 + 1}{216k^6},$$

$$\frac{g_2^3}{g_3^2} = 27\,\frac{(k^4 + 14k^2 + 1)^3}{(k^6 - 33k^4 - 33k^2 + 1)^2}.$$

En comparant les deux résultats obtenus, nous remarquerons leur parfaite dissemblance. Il est donc indispensable de trouver un lien entre ces deux résultats et d'éclaircir cette contradiction apparente. Dans ce but, avant de calculer les invariants

$$g_2 \quad \text{et} \quad g_3,$$

d'après les formules d'inversion, soumettons l'argument u à une transformation de Landen. Grâce à ce procédé, le module k sera remplacé, comme on le sait, par

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

et nous aurons

$$u = \frac{1}{1+k} \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}},$$

Maintenant si nous faisons

$$y^2 = \frac{1}{\xi + \frac{1+e^2}{3}},$$

nous obtiendrons

$$u = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{1+k} \int \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - G_2\xi - G_3}},$$

$$\frac{\lambda_1^2}{(1+k)^4} G_2 = \frac{4}{3}(1 - e^2 + e^4),$$

$$\frac{\lambda_1^3}{(1+k)^6} G_3 = -\frac{4}{27}(1+e^2)(2-e^2)(1-2e^2),$$

d'où

$$\frac{G_2^3}{G_3^2} = \frac{108(1-e^2+e^4)^3}{(1+e^2)^2(2-e^2)^2(1-2e^2)^2};$$

ou, en introduisant dans cette formule la valeur

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

nous aurons

$$\frac{G_2^3}{G_3^2} = \frac{27(k^4+14k^2+1)^3}{(k^6-33k^4-33k^2+1)^2}.$$

Ainsi le lien entre les deux résultats est établi, et la transformation de Landen trouve sa source dans la nature même des intégrales elliptiques.