HENRI PICCIOLI

Sur les développements de certaines lignes en S_n et sur une propriété caractéristique des courbes hypersphériques à courbure constante

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 385-390

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__385_0>

[Q2]

SUR LES DÉVELOPPANTES DE CERTAINES LIGNES EN S_n (1) ET SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES COURBES HYPERSPHÉRIQUES A COURBURE CONSTANTE;

PAR M. HENRI PICCIOLI.

1. Proposons-nous de résoudre la question que voici :

Chercher s'il y a des courbes en S_n telles que leurs développantes soient des lignes sphériques.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les coordonnées d'un point fixe dans l'S_n,

$$x_1 = x_1(s), \qquad x_2 = x_2(s), \qquad x_n = x_n(s)$$

les équations d'une ligne L dont s est l'arc,

$$(1) \quad x'_1 = x_1 - s\alpha_{11}, \qquad x'_2 = x_2 - s\alpha_{12}, \qquad x'_n = x_n - s\alpha_{1n}$$

celles d'une de ses développantes L'. Posons, R étant une constante,

$$\Sigma_i(y_i - x_i + s\alpha_{1i})^2 = R^2,$$

En différentiant, on obtient

$$\Sigma_i(y_i - x_i)\alpha_{2i} = 0,$$

c'est-à-dire

$$A_2 = 0.$$

Nous en concluons, d'après un théorème connu, que :

(1) Par *ligne en* S_n, l'auteur entend une ligne dans un espace à n dimensions.

A. *Les courbes qui ont pour développantes des lignes sphériques sont les géodésiques des cônes ayant pour sommet le centre de la sphère.*

On pouvait arriver plus rapidement à ce résultat, en observant que des formules (1) l'on tire

$$(2) \qquad \alpha'_{1i} = -\alpha_{2i},$$

$\alpha'_{11}, \alpha'_{12}, \ldots, \alpha'_{1n}$ étant les cosinus directeurs de la tangente à L' et $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}$ ceux de la normale principale de L. Alors il s'ensuit que l'on a

$$(3) \qquad A'_1 = -A_2,$$

d'où la propriété dont il s'agit.

La même formule (3) nous montre que les courbes qui ont les plans rectifiants tangents à une sphère admettent pour développantes des courbes qui ont leurs plans normaux tangents à une sphère concentrique.

2. Soit $\mathcal{C}$ une courbe quelconque en S_n; lorsqu'un point se meut sur cette courbe pour la parcourir tout entière, le plan hyperosculateur en ce point enveloppe une surface à $(n-1)$ dimensions Σ_{n-1} constituée par les ∞^1 S_{n-2} osculateurs à $\mathcal{C}$. En nous bornant au cas où la dernière direction principale de $\mathcal{C}$ coupe sous un angle constant une direction donnée d, si nous considérons une géodésique de Σ_{n-1}, l'on voit tout de suite que sa normale principale coupe d sous un angle constant et, par conséquent, ses développantes, à cause des formules (2), sont des hélices cylindriques.

On a donc le théorème suivant :

A'. *Les géodésiques de la surface engendrée par les S_{n-2} osculateurs d'une courbe dont la dernière direction principale coupe, sous un angle constant, une di-*

rection fixe, ont pour développantes des hélices cylindriques.

Remarque. — On énonce ce théorème en S_3 en disant que les développantes des géodésiques d'un hélicoïde développable sont des hélices cylindriques. La raison pour laquelle nous en avons modifié l'énoncé en l'étendant à l'S_n, c'est que les courbes de S_n qui ont la dernière direction principale inclinée d'un angle constant sur une direction donnée, ne rentrent plus dans la classe des hélices cylindriques lorsque n est égal ou supérieur à 4.

Cependant, on peut trouver des lignes jouissant des deux propriétés : ainsi, par exemple, en S_4 on a les hélices dans lesquelles le premier et le troisième rayon de courbure sont égaux, et le théorème qui précède leur est applicable.

On a aussi cet énoncé :

Les courbes de S_{2h+1} *définies par les équations*

$$\frac{R_2}{R_1} = a_1, \qquad \frac{R_4}{R_3} = a_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{R_{2h}}{R_{2h-1}} = a_h,$$

les quantités a étant des constantes, sont telles que leurs directions impaires coupent sous un angle constant une direction donnée, pendant que les autres lui sont perpendiculaires.

A ces courbes, de même que celles à courbures constantes de S_{2h+1} qui en sont un cas particulier, est aussi applicable le théorème que nous venons d'exprimer.

3. Le théorème A′ peut s'appliquer même aux géodésiques de la surface à $(n-1)$ dimensions enveloppée par les S_{n-1} passant par un point fixe et tangente à une hypersphère de S_n.

Comme cas particulier, faisons ici $n = 3$ et joignons-y le résultat du théorème A. On obtient la proposition que voici :

Les développantes des géodésiques du cône de rotation de l'espace ordinaire sont des hélices sphériques.

Cependant ce théorème n'est pas complet. On sait, en effet, que dans l'S_4 on peut trouver des lignes qui soient à la fois géodésiques d'un cylindre et d'un cône, ce qui ne peut pas arriver en S_3. Or, si nous appliquons à ces courbes le résultat obtenu par le théorème A, en rappelant que les développantes des hélices cylindriques de S_4 sont des courbes de S_3, l'on voit tout de suite que ces *géodésiques cylindro-coniques* de S_4 ont elles-mêmes pour développantes des hélices sphériques de S_3 et que, par conséquent, la proposition qui précède peut se compléter ainsi :

Les courbes qui ont pour développantes des hélices sphériques de S_3 *sont les géodésiques du cône de révolution de* S_3 *et les géodésiques cylindro-coniques de* S_4.

Ce théorème, comme on le reconnaît facilement, peut s'étendre à l'espace à n dimensions.

4. Avant d'étudier les courbes hypersphériques à courbures constantes il faut rappeler que ces courbes ne peuvent exister que dans un espace à un nombre pair de dimensions, comme l'a démontré M. Brunel, et que l'équation différentielle qui lie les $2p-1$ rayons de courbure d'une courbe hypersphérique générale de S_{2p} est représentée par

$$H_{2p}=0,$$

$$H_m=\frac{d}{ds}(R_{m-1}H_{m-1})+\frac{R_{m-2}H_{m-2}}{R_{m-1}}$$

étant la relation qui fait dépendre un H_m quelconque des deux qui le précèdent; on a en outre

$$H_1 = 1, \qquad H_2 = \frac{dR_1}{ds}.$$

Cela posé, l'on voit immédiatement que pour qu'une courbe hypersphérique de S_{2p} soit à courbures constantes, il faut et il suffit que l'on ait

$$H_{2i} = 0, \qquad H_{2i-1} = h_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les h étant des constantes différentes entre elles. Or, si nous prenons les formules

$$\frac{dA_t}{ds} = \frac{A_{t+1}}{R_t} - \frac{A_{t-1}}{R_{t-1}} \qquad (t = 1, 2, \ldots, p),$$

de l'hypothèse

$$A_1 = 0$$

qui caractérise les courbes hypersphériques, quelle que soit la dimension de l'espace ambiant, il résulte

$$A_t = R_{t-1} H_{t-1}.$$

En conséquence, nous avons pour une courbe hypersphérique de S_{2p},

$$A_{2i-1} = 0, \qquad A_{2i} = h_i R_{2i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Donc on peut énoncer le théorème que voici :

Pour qu'une courbe de S_{2i} *soit à courbures constantes, il faut et il suffit que les hyperplans à index impair passent tous par un même point* P *et que les autres demeurent tangents à des sphères de centre* P *dont les rayons varient, en général, avec l'index.*

Ce qui nous donne la propriété caractéristique que nous cherchions.

Remarquons en passant que A_2 étant constant, les développantes de ces courbes rentrent dans la catégorie de celles définies par l'équation

$$A_1 = \text{const.}$$

applicable aux courbes ayant les hyperplans normaux tangents à une hypersphère.