Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 376-382

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__376_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1797.

(1898, p. 244.)

Intégrer l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{n}{1}x\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + x^n y = 0.$$

(H. Laurent.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

Si l'on fait d'abord $n = 1, 2$, on trouve les intégrales

$$y = Ce^{\frac{-x^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad y = e^{\frac{-x^2}{2}}(Ce^x + C_1 e^{-x}).$$

Posons alors $y = e^{\frac{-x^2}{2}} z$ et après avoir calculé les différentielles de 1 à n de $e^{\frac{-x^2}{2}} z$, introduisons ces valeurs dans (1) nous aurons, pour n pair,

$$\begin{aligned} e^{\frac{-x^2}{2}} \Bigg\{ & \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{n(n-1)}{1.2}(1)\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(4)!}(1.3)\frac{d^{n-4}z}{dx^{n-4}} + \ldots \\ & + (-1)^{\frac{n-2}{2}}\frac{n(n-1)}{1.2}[1.3.5\ldots(n-3)]\frac{d^2 z}{dx^2} \\ & + (-1)^{\frac{n}{2}}[1.3.5\ldots(n-1)]z \Bigg\} = 0. \end{aligned}$$

Pour n impair, les deux derniers termes du développement entre crochets seront

$$\begin{aligned} & + (-1)^{\frac{n-3}{2}}\frac{n(n-1)(n-3)}{1.2.3}[1.3.5\ldots(n-4)]\frac{d^3 z}{dx^3} \\ & + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{1}[1.3.5\ldots(n-2)]\frac{dz}{dx}\Bigg\}. \end{aligned}$$

Les coefficients de ces transformées étant indépendants de la variable x, on fera $z = e^{rx}$, r étant racine de l'une des équations suivantes, pour n pair :

$$r^n - \frac{n(n-1)}{1.2} r^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(4)!} (1.3) r^{n-4} + \ldots$$
$$+ (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{n(n-1)}{1.2} [1.3.5\ldots(n-3)] r^2$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} [1.3.5\ldots(n-1)] = 0.$$

Pour n impair, les deux derniers termes de l'équation seront :

$$+ (-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} [1.3.5\ldots(n-4)] r^3$$
$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n}{1} [1.3.5\ldots(n-2)] r.$$

Il résulte de ces calculs, pour les intégrales cherchées, les formules, pour n pair :

$$y = e^{\frac{-x^2}{2}} (C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x});$$

pour n impair :

$$y = e^{\frac{-x^2}{2}} (a + C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_{n-1} e^{r_{(n-1)} x}),$$

dans lesquelles a, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n sont des constantes arbitraires et r_1, r_2, ..., r_n les racines des équations en r.

Question 1798.

(1898, p. 244.)

Par un point m d'une conique on fait passer un cercle qui coupe cette courbe aux points a, b, c. Démontrer que, quel que soit ce cercle, la droite de Simson de m, par rapport au triangle abc, passe par un point fixe.

(MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Considérons d'abord le faisceau des cercles tangents en m, à la conique. Le point a coïncide avec m et toutes les cordes bc sont parallèles à la direction symétrique de la tangente en m, par rapport à un des axes de la conique. Pour tous ces triangles la droite de Simson de m est la perpendiculaire Δ abaissée de m sur la direction bc. Considérons maintenant le faisceau des cercles passant par les deux points m et a de la conique. Chaque cercle coupe la conique encore en deux points b et c. Pour les différents cercles du faisceau, les droites ab et ac sont les rayons correspondants d'un faisceau en involution, car les cordes bc isoscéliennes de ma par rapport à un des axes de la conique sont parallèles entre elles. Les perpendiculaires $m\beta$ et $m\gamma$ abaissées de m sur ab et ac sont donc aussi les rayons d'un faisceau en involution; or β et γ appartiennent à la circonférence décrite sur ma comme diamètre, donc $\beta\gamma$, droite de Simson de m par rapport à abc, passe par un point fixe qui appartient à la droite Δ, car un des cercles du faisceau m, a est tangent en m à la conique : ce point reste fixe quand a varie, les deux faisceaux ma et ma' ayant toujours un cercle maa' en commun.

Question 1800.

(1898, p. 292.)

On coupe une cubique ayant un point de rebroussement par une droite quelconque. Par chacun des points de rencontre on peut mener à la cubique une tangente, autre que celle qui touche la cubique en ce point. Démontrer que les trois points de contact de ces tangentes sont en ligne droite.

Propriété corrélative. (A. Cazamian.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Appelons 1, 2, 3 les trois points collinéaires de la cubique C_3^3, 1' et 2' les points de contact des tangentes issues de 1 et 2, 3' le point où la droite $|1'2'|$ va couper nouvellement la cubique : comme les tangentiels des trois points collinéaires sont en ligne droite, la tangente en le point 3' passe par 3. La proposition corrélative est : Les trois tangentes d'une cubique de la troisième classe, issues d'un point de son plan, coupent la cubique en trois points dont les tangentes vont concourir en un deuxième point.

Autre solution de M. Dulimbert.

Question 1801.

(1898, p. 340.)

Si l'on prend sur les perpendiculaires communes aux arêtes opposées d'un tétraèdre des vecteurs dont les longueurs soient inversement proportionnelles aux longueurs de ces perpendiculaires, le vecteur résultant est perpendiculaire à l'une ou l'autre des faces du tétraèdre selon le sens dans lequel on dirige les vecteurs.

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par un Anonyme.

Soit le tétraèdre ABCD, dans lequel nous supposerons que le sens de circulation ABC est de droite à gauche pour un observateur qui a les pieds sur le plan ABC, la tête en D; les extrémités des perpendiculaires communes étant A', B', C' sur les arêtes issues de D, et A'', B'', C'' sur les arêtes opposées, nous dirigerons les vecteurs de A' vers A'', ...; les longueurs des perpendiculaires communes seront α, β, γ.

Considérons l'expression

$$R = -\,DA.BC - DB.CA - DC.AB,$$

dont chaque terme est un produit de deux vecteurs; la partie réelle du premier terme est

$$\text{gr}\, DA.\text{gr}\, BC \times \cos(DA, BC),$$

et la partie vectorielle est un vecteur dirigé suivant A'A'', de A' vers A'', ayant pour module

$$\text{gr}\, DA.\text{gr}\, BC \times \sin(DA.BC) \qquad \text{ou} \qquad \frac{6V}{\alpha}.$$

Or on a, en prenant D comme origine,

$$\begin{aligned} R &= -\,DA(DC - DB) - DB(DA - DC) - DC(DB - DA) \\ &= (DB.DC - DC.DB) + \ldots \\ &= 2V(DB.DC) + 2V(DC.DA) + 2V(DA.DB). \end{aligned}$$

1° L'expression R est un vecteur; en écrivant que la partie réelle est nulle, on retrouve une formule bien connue dans la théorie du tétraèdre.

2° Le premier terme de l'expression précédente est un vecteur perpendiculaire au plan DBC; en donnant à ce vecteur le point D comme origine, il est dirigé du côté de l'arête DA; son module est le quadruple de l'aire du triangle DBC. Des faits analogues ont lieu pour les deux autres termes de l'expression, et il résulte d'un théorème bien connu que le vecteur résultant est perpendiculaire au plan ABC, dirigé vers ce plan, et qu'il a pour module le quadruple de l'aire du triangle ABC. Si les vecteurs de l'énoncé ont pour modules $\frac{k^2}{\alpha}$, $\frac{k^2}{\beta}$, $\frac{k^2}{\gamma}$, le vecteur résultant a pour module

$$4\,\mathrm{ABC} \times \frac{k^2}{6V} \qquad \text{ou} \qquad \frac{2k^2}{h},$$

h étant celle des hauteurs du tétraèdre qui est parallèle au vecteur résultant.

Autre solution de M. Merlin.

Question 1802.

(1898, p. 340)

En représentant par r_1, r_2, r_3 les rayons de courbure aux points A, B, C *de l'ellipse de Steiner du triangle* ABC *et par ω l'angle de Brocard de ce triangle, on a la relation*

$$\sum \frac{r_1}{a} = \cot\omega.$$

(A. Droz-Farny.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

En appelant α, β les demi-axes de l'ellipse, les équations paramétriques de la courbe sont $x = \alpha\cos t$, $y = \beta\sin t$, t est l'angle excentrique; si le paramètre du point où vont se couper les trois cercles osculateurs en les points A, B, C (STEINER, *Crelle,* t. 32, p. 300) est -3θ, en posant $\frac{2\pi}{3}=\lambda$ les paramètres de A, B, C sont respectivement θ, $\theta+\lambda$ et $\theta+2\lambda$ et par suite

$$\begin{aligned}
a^2 &= 3(\alpha^2\sin^2\theta+\beta^2\cos^2\theta),\\
b^2 &= 3[\alpha^2\sin^2(\theta+\lambda)+\beta^2\cos^2(\theta+\lambda)],\\
c^2 &= 3[\alpha^2\sin^2(\theta+2\lambda)+\beta^2\cos^2(\theta+2\lambda)];
\end{aligned}$$

le rayon de courbure ρ au point t étant donné par

$$\alpha^2\beta^2.\rho^2=(\alpha^2\sin^2t+\beta^2\cos^2t)^3,$$

nous avons

$$\begin{aligned}
a^3 &= \alpha\beta.r_1.\sqrt{27},\\
b^3 &= \alpha\beta.r_2.\sqrt{27},\\
c^3 &= \alpha\beta.r_3.\sqrt{27},
\end{aligned}$$

$$\alpha\beta.\sqrt{27}.\sum\frac{r_1}{a}=a^2+b^2+c^2=4\text{S}.\cot\omega;$$

on trouve immédiatement que

$$2\text{S}=\begin{vmatrix} 1 & x_a & y_a\\ 1 & x_b & y_b\\ 1 & x_c & y_c\end{vmatrix}=\frac{\alpha\beta.\sqrt{27}}{2},$$

et la relation proposée est démontrée. La dernière formule et la suivante :

$$a^3+b^3+c^3=\alpha\beta(r_1+r_2+r_3).\sqrt{27},$$

sont, peut-être, nouvelles.

Question 1802.

AUTRE SOLUTION

Par M. L. RIPERT.

S étant l'aire du triangle, on a

$$\cot\text{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:\frac{2\text{S}}{bc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\text{S}}.$$

Donc

$$\cot\omega = \sum \cot A = \sum \frac{a^2}{4S}.$$

D'autre part (J. KŒHLER, *Exercices,* t. I. Chapitre VII, p. 216-217), on a $r_1 = \frac{a^3}{4S}$.

Donc

$$\sum \frac{r_1}{a} = \sum \frac{a^2}{4S} = \cot\omega. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Autre solution par M. BARISIEN.