NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. BRICARD

Au sujet d'un théorème de M. G. Humbert

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 369-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__369_1>

[$L^1$17e]

AU SUJET D'UN THÉORÈME DE M. G. HUMBERT;

PAR M. R. BRICARD.

Dans une Note présentée récemment à l'Académie des Sciences (¹), M. G. Humbert a déduit de ses recherches sur les fonctions abéliennes et leur application à l'étude des surfaces du quatrième ordre un théorème de Géométrie élémentaire, en ajoutant qu'il y aurait intérêt à en donner une démonstration directe.

Ce théorème est le suivant :

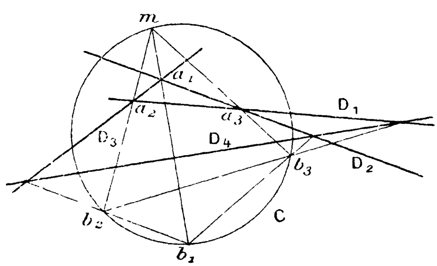
Soient données dans un plan une conique C *et quatre droites* D_1, D_2, D_3, D_4. *S'il existe une conique* C' *circonscrite au triangle formé par trois de ces droites, passant par les points communs à la quatrième droite et à* C, *et enfin tangente à* C, *il existe trois coniques analogues que l'on obtiendra en permutant les quatre droites de l'énoncé.*

(¹) *Comptes rendus*, t. CXXIX, p. 640.

En voici une démonstration élémentaire :

Soient : m le point de contact des coniques C et C′; a_1, a_2, a_3 les sommets du triangle formé par les droites D_1, D_2, D_3 (a_1 est opposé à D_1, etc.).

Si l'on considère une conique variable tangente à C en m et contenant les points a_1 et a_2, les deux autres points communs à cette conique et à C sont évidemment en relation homographique et involutive : la corde qui les joint passe donc par un point fixe. Ce point fixe, on le voit immédiatement, est situé à l'intersection de la droite a_2a_3 ou D_1 et de la droite qui joint les points b_2 et b_3 où les droites ma_2 et ma_3 rencontrent de nouveau



la conique C. Par conséquent, les droites a_2a_3 ou D_1, b_2b_3 et D_4 sont concourantes.

Répétons le même raisonnement en employant les points a_3 et a_1. On voit finalement que la condition de l'énoncé peut être remplacée par la suivante :

Les six sommets du quadrilatère complet formé par les quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 *sont situés respectivement sur les six côtés d'un quadrangle complet* $mb_1b_2b_3$, *inscrit à la conique* C.

Sous cette nouvelle forme, la condition imposée à D_1, D_2, D_3, D_4 est symétrique par rapport à ces quatre droites. Cette remarque suffit pour établir le théorème de M. Humbert.